解析概論II
第2部 (ベクトル解析)

桂田 祐史

2006 年1 月10 日

目 次

第1章　ベクトル解析 — まずはベクトル場から

1.1　イントロ

1.1.1　ベクトル解析とは

この章 (解析概論 II の後半) のテーマはベクトル解析である。ベクトル解析とは何だろうか? この問いかけに対しては色々な答がある。初めて学ぶ段階では理解しづらいだろうが (一通り終わった段階でもう一度ここに戻ってきて読み直してもらいたい)、いくつか紹介してみよう。

1. 「**ベクトル場**の微積分」
   これが一番安直な答だが、これだけだと中身が見えない。

2. 「曲がっているもの (曲線や曲面) の上での微積分」
   (a) 曲線上の積分である**線積分** $\displaystyle\int_C \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r}$
   (b) 曲面上の積分である**面積分** $\displaystyle\int_S \boldsymbol{f}\cdot \boldsymbol{n}\,dS$

   に関わる微積分である。

3. 微積分の基本定理

   $$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x),\quad \int_a^b F'(x)\,dx = F(b)-F(a)$$

   の高次元化である

   $$\int_\Omega \operatorname{div}\boldsymbol{f}\,dx = \int_{\partial\Omega}\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}\,dS \quad (\textbf{Gauss の発散定理})$$

   や

   $$\int_S \operatorname{rot}\boldsymbol{f}\,dS = \int_{\partial S}\boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r} \quad (\textbf{Stokes の積分定理})$$

   の活躍する世界である。

歴史的には、電磁気学[1]や流体力学に現れる現象を説明するために生まれた数学である (現在でも、これらの物理学を学ぶことはベクトル解析の学習に大いに役立つと思われる。また偏

[1]ファラデー (Michael Faraday, 1791–1867, 英国) が開拓した分野をマクスウェル (James Clerk Maxwell, 1831–1879, スコットランドの Edinburgh に生まれ、英国の Cambridge に没する) が数学的にまとめ、ヘビサイド (Oliver Heaviside, 1850–1925, 英国) が整理した。

微分方程式の入門講義では、物理学に由来する問題が重要な例として登場するので、必然的にベクトル解析が活躍する。)。20 世紀に入って高次元化され[2]、幾何学における基礎的な道具となって大発展した。

歴史メモ

古典的なベクトル解析は、電気工学者の O.Heaviside の [20] (1893) と熱力学で有名な Josiah Willard Gibbs (1839–1903, 米国) (1881, 公刊は以下に示すように 1901) によって整えられた。両者とも、James Clerk Maxwell (1831–1879) により完成された電磁気学 ([23], 1873) を数学的に整理するのが目的であった。

J.W.Gibbs の著作 [21] について、`http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Gibbs.html` から引用しておく。

> Gibbs' work on vector analysis was also of major importance in pure mathematics. He first produced printed notes for the use of his own students in 1881 and 1884 and it was not until 1901 that a properly published version appeared prepared for publication by one of his students. Using ideas of Grassmann, Gibbs produced a system much more easily applied to physics than that of Hamilton.

(ここに出て来る Hamilton[a]のシステムとは、**4 元数 (quaternion)** のことであろう。)

[a]Sir William Rowan Hamilton (1805–1865, Ireland の Dublin に生まれ、Dublin にて没する) は数学者かつ天文学者で、4 元数の発見 (1843) 以外にも解析力学の分野で大きな業績がある。論文が `http://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Hamilton/Papers.html` から入手可能である。4 元数については (色々な本に説明が書いてあるが、ベクトル解析の本ということならば) 例えば一松 [14] や小松 [6] を見よ。

1.1.2 記号に関する注意

- ベクトルを表すのに $\vec{a}$ のように矢印をつけたり、$\boldsymbol{a}$ のように太字にする習慣がある。この解析概論 II の前半ではそれを採用しなかったが、ベクトル解析の説明では、なるべくベクトルを太字で書くことにする。

- この文書では右肩に T (transpose の頭文字) を書くことで行列やベクトルの転置を表す。数ベクトルは基本的に縦ベクトルとするが、紙幅を節約するために、横ベクトルの転置、例えば $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)^T$ のようにして表すことが多い。

- 空間の点を表す変数として x という文字が使われることが多いが、伝統的なベクトル解析の教科書では $\boldsymbol{r}$ という文字がよく使われている。ここでもそれを採用することにする。なお $\boldsymbol{r}$ の成分は普通の習慣通り x, y, z で表す。

[2](外) 微分形式の理論という、ちょっと異なる見かけになった。

1.1.3　ベクトル場 — その一つの必然性

1 変数実数値関数 $f\colon I \to \mathbf{R}$ (I は $\mathbf{R}$ の区間) の一般化としては、n 変数 m 次元ベクトル値関数 $f\colon \Omega \to \mathbf{R}^m$ (Ω は $\mathbf{R}^n$ の開集合) というのがありうるが、以下に説明するように $m = n$ の場合は特に重要であるため、n **次元ベクトル場** (**vector field**) と名づけられている。素朴な幾何学的なイメージとしては、「空間内のある範囲 Ω 内のすべての点 $\boldsymbol{r}$ において矢印 (ベクトル $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r})$) がある」とき、$\Omega$ 上のベクトル場 $\boldsymbol{f}$ が与えられている、ということになる。

(ここらへんにベクトル場の例の図を入れよう。)

ベクトル場がごく自然に現れるものであることを一つの例で説明しよう。f を普通の実 1 変数の実数値関数

$$f\colon I \longrightarrow \mathbf{R} \quad (I \text{ は } \mathbf{R} \text{ の区間})$$

とするとき、導関数

$$f'\colon I \longrightarrow \mathbf{R}$$

もまた実 1 変数の実数値関数であるが、n 変数実数値関数

$$f\colon \Omega \longrightarrow \mathbf{R} \quad (\Omega \text{ は } \mathbf{R}^n \text{ の開集合})$$

については、$n \geq 2$ の場合は f の導関数に相当するものは、n 変数 <u>n 次元ベクトル値</u> 関数 (n 次元ベクトル場)

$$\nabla \boldsymbol{f}\colon \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^n$$

である (n 変数 <u>実数値関数</u> ではない)。

多変数では、導関数は元の関数と違ったタイプ (値の空間の次元が異なる) になる
実数値関数の微分はベクトル場である

なお、Ω を定義域とする実数値関数

$$f\colon \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$$

のことを Ω 上の**スカラー場** (**scalar field**) と呼ぶこともある。

1.2　準備: R^3 のベクトル積

$\mathbf{R}^3$ の二つのベクトル

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

に対して、$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の**ベクトル積**[3]とは、次式で定義される $\mathbf{R}^3$ のベクトルのことをいう。

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} &:= \left(\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\right)^T \\
&= \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}\boldsymbol{e}_2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\boldsymbol{e}_3 \\
&= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \boldsymbol{e_1} \\ a_2 & b_2 & \boldsymbol{e_2} \\ a_3 & b_3 & \boldsymbol{e_3} \end{vmatrix} \quad \text{(これはやや形式的)}.
\end{aligned}
$$

ただし

$$
\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.
$$

　第 i 成分には a_i, b_i が現れないこと、添字が $1\to2\to3\to1\to\cdots$ と循環することを覚えておくとチェックするのに便利である。

　なお、行列を転置しても行列式の値は変わらないので、

$$
\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}
$$

としてもよい。

ベクトル積の計算

$\boldsymbol{a} = (1,2,3)^T$, $\boldsymbol{b} = (3,2,1)^T$ とするとき、$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ を計算してみよう。どちらか自分にとって分かりやすい方を覚えるとよい。

(1) (「形式的公式」の利用 — 行列式の展開に慣れている場合お勧め)

$$
\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}\boldsymbol{e}_2 + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}\boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}.
$$

(2) 右の表から

$$
\begin{array}{ccccccc}
1 & & 2 & & 3 & & 1 \\
 & ③ & & ① & & ② & \\
3 & & 2 & & 1 & & 3
\end{array}
$$

$$
\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \left(\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}\right)^T = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}.
$$

[3] しばしば外積とも呼ばれる。

命題 1.2.1 (ベクトル積の性質) 以下 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ は $\mathbf{R}^3$ の要素、$\lambda \in \mathbf{R}$ とする。

(1) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a})$. 特に $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = \mathbf{0}$.

(2) $(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2) \times \boldsymbol{b} = (\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{a}_2 \times \boldsymbol{b})$, $(\lambda \boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = \lambda(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$.

(3) 任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^3$ に対して、

$$\det(\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}).$$

(4) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が 1 次独立 $\iff \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \neq \mathbf{0}$. (ここに誤植があった！)

(5) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ で出来る平行四辺形 $\{t\boldsymbol{a} + s\boldsymbol{b}; t \in [0,1], s \in [0,1]\}$ の面積を S とするとき、

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \perp \boldsymbol{a}, \quad (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \perp \boldsymbol{b}, \quad \det(\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \geq 0, \quad \|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\| = S.$$

証明 (1), (2) は定義式と行列式の性質から明らかである。(3) は $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ とすれば、

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}) = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} x_1 - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} x_2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} x_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & x_1 \\ a_2 & b_2 & x_2 \\ a_3 & b_3 & x_3 \end{vmatrix} = \det(\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{x}).$$

($\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ の形式的定義の $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ のところにそれぞれ x_1, x_2, x_3 を代入すると $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{x}$ の内積になる。)
(4) については、(3) を用いて

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} \text{ と } \boldsymbol{b} \text{ が 1 次独立} \quad &\Leftrightarrow \quad \exists \boldsymbol{x} \quad \text{s.t.} \quad \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \text{ が 1 次独立} \\ &\Leftrightarrow \quad \exists \boldsymbol{x} \quad \text{s.t.} \quad \det(\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{x}) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \exists \boldsymbol{x} \quad \text{s.t.} \quad (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \neq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

(5) の最初の三つは (3) を使って、

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) = \det(\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{a}) = 0,$$

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) = \det(\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{b}) = 0,$$

$$\det(\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\|^2 \geq 0.$$

$S = \|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\|$ の証明は、$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ が 1 次従属な場合は、両辺とも 0 であるから明らかである。以下、$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ が 1 次独立な場合を考える。3 つのベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ で作られる 3 次元平行体の体積を V としよう。$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ が他の二つのベクトルに直交しているところから、

$$V = S\|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\|.$$

一方、平行体の体積の一般論から

$$V = \det(\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}).$$

ゆえに

$$S\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\| = \det(\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = \|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\|^2$$

となるので両辺を $\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\|$ (>0) で割ることにより、

$$S = \|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\|.\blacksquare$$

(5) の計算による証明　$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角を θ とすると、$\cos\theta = \dfrac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}{\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|}$ であるから、

$$\begin{aligned}
S &= \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|\sin\theta = \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|\sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{\|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2-(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})^2} \\
&= \sqrt{(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2} \\
&= \sqrt{(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2} \\
&= \|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\|\ .\blacksquare
\end{aligned}$$

問　$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ を満たさない $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ の例をあげよ。

問　次の等式を証明せよ。

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}\quad(\textbf{Jacobi の等式}).$$

注意 1.2.1 (R^n のベクトルの外積) あまり使われないが、$\mathbf{R}^n$ のベクトルのベクトル積を紹介しよう。$\mathbf{R}^n$ の $n-1$ 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{a}_{n-1}$ があったとき

$$\mathbf{R}^n \ni \boldsymbol{x} \longmapsto \det(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_{n-1},\boldsymbol{x}) \in \mathbf{R}$$

は線形形式であるから、

$$\exists\boldsymbol{c}\in\mathbf{R}^n\quad \text{s.t.}\quad \forall\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\quad \det(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_{n-1},\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{c},\boldsymbol{x}).$$

この $\boldsymbol{c}$ を $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{a}_{n-1}$ のベクトル積と呼び、$\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2\times\cdots\times\boldsymbol{a}_{n-1}$ と書く。

n 次元空間では $n-1$ 個のベクトルに対してそのベクトル積が定義される。
2 つのベクトルのベクトル積が定義できるのは 3 次元空間だけ！

もし $\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2\times\cdots\times\boldsymbol{a}_{n-1}$ の成分が知りたい場合は、$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{e}_i$ を代入すれば良い:

$$\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2\times\cdots\times\boldsymbol{a}_{n-1}\ \text{の第}\ i\ \text{成分} = \det(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_{n-1},\boldsymbol{e}_i).$$

(これはもちろん 3 次元の場合の一般化になっている。) ■

例 1.2.1 (空間内の三角形の面積、平面の方程式への応用) 空間の 3 点 $\mathrm{A}(1,2,3)$, $\mathrm{B}(2,1,0)$, $\mathrm{C}(0,2,-1)$ を頂点とする三角形 ABC の面積と、それを含む平面の方程式を求めよ。

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \left(\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 0 & -4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -4 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \right)^T = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

ゆえに (三角形は平行四辺形の半分だから)

$$\triangle\mathrm{ABC} = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right\| = \frac{1}{2}\sqrt{4^2+7^2+(-1)^2} = \frac{\sqrt{86}}{2}.$$

考えている平面は、$\mathrm{A}(1,2,3)$ を通り、$(4,7,-1)^T$ に垂直であるから、それを定義する方程式として

$$4(x-1)+7(y-2)+(-1)(z-3)=0$$

が取れる。整理して $4x+7y-z=15$. ■

例 1.2.2 (力学への応用例「中心力場での運動」) 1 変数ベクトル値関数 $\boldsymbol{f}(t)$, $\boldsymbol{g}(t)$ があるとき、

$$(\boldsymbol{f}(t) \times \boldsymbol{g}(t))' = \boldsymbol{f}'(t) \times \boldsymbol{g}(t) + \boldsymbol{f}(t) \times \boldsymbol{g}'(t)$$

が成り立つ (各自確かめよ)。

質点の質量、時刻 t での位置、働く力をそれぞれ m, $\boldsymbol{r}(t)$, $\boldsymbol{f}$ とするとき、

$$m\boldsymbol{r}''(t) = \boldsymbol{f}$$

が成り立つ (**Newton 力学の第二法則**)。$\boldsymbol{f}$ が

$$\boldsymbol{f} = f(\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}$$

の形をしているとき、$\boldsymbol{f}$ は**中心力場**であるという。このとき、任意の 3 次元ベクトル $\boldsymbol{a}$ に対して $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ であることに注意すると

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{r}(t) \times \boldsymbol{r}'(t)\right) = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{r}'(t) \times \boldsymbol{r}'(t) + \boldsymbol{r}(t) \times \boldsymbol{r}''(t)\right) = \frac{1}{2}\boldsymbol{r}(t) \times \frac{\boldsymbol{f}}{m} = \frac{1}{2}\boldsymbol{r}(t) \times \frac{f}{m}\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{0}$$

が分かるから

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{r}(t) \times \boldsymbol{r}'(t) \equiv \text{定数ベクトル}.$$

この左辺は**面積速度**と呼ばれるものになっているので[4]、

中心力場では面積速度は一定である

ということを示している (万有引力の場合は **Kepler の第二法則**)。■

[4] この定数倍である $\boldsymbol{r}(t) \times (m\boldsymbol{r}'(t))$ を $\boldsymbol{0}$ のまわりの**角運動量**と呼ぶ。ここの議論は角運動量が保存される、ということにもなる。

1.3 ベクトル場の微分演算子

ベクトル場の微分演算子をざっと紹介する。grad, rot, div は、幾何学で (これから) 学ぶ外微分形式の理論では外微分という一つの演算にあざやかにまとめられているが、「物理的な」意味も重要であり、ここで説明する記法も習得すべきである。

grad の意味は既知のはずである (解析概論 I で習った)。div, rot については、後述する積分定理で明らかになる。

1.3.1 ナブラ ∇

$\mathbf{R}^n$ の部分集合 (大抵は開集合) で定義された関数を考えているとき、

$$\nabla := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

という微分演算を表す形式的ベクトルを導入する。∇ は **nabla** (ナブラ) と呼ばれる[5]。なお **Hamilton の微分演算子**と呼ぶこともある。

1.3.2 勾配

$\mathbf{R}^n$ の開集合 Ω で定義された C^1-級の関数 $f\colon \Omega \to \mathbf{R}$ に対して、

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix} f := \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix} : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^n$$

と定義し、∇f を f の**勾配** (こうばい) (**gradient**) と呼ぶ。∇f はしばしば $\operatorname{grad} f$ とも書かれる。

微分法の復習: ∇f の幾何学的意味

$a \in \Omega$ とするとき、$\nabla f(a)$ は f のレベルセット (等高線あるいは等値面)

$$\{x \in \Omega; f(x) = c\}, \quad c := f(a)$$

の上にある点 a における法線ベクトルであり、f の値が最も速く増加する方向を表している。

[5] 何でもヘブライ語 (と言っても筆者自身ピンと来ないが) の竪琴 (Nebel) が語源であるという (藤野 [17])。

1.3.3　発散

$\mathbf{R}^n$ の開集合 Ω 上の C^1-級のベクトル場 $\boldsymbol{f}\colon \Omega \to \mathbf{R}^n$ に対して、

$$\nabla\cdot\boldsymbol{f} := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \colon \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$$

と定義し、$\nabla\cdot\boldsymbol{f}$ を $\boldsymbol{f}$ の**発散** (**divergence**) または**湧き出し**と呼ぶ。$\nabla\cdot\boldsymbol{f}$ はしばしば $\operatorname{div}\boldsymbol{f}$ とも書かれる。

恒等的に $\operatorname{div}\boldsymbol{f} = \mathbf{0}$ を満たすベクトル場を**湧き出しなし**または**管状** (**solenoidal**) という。

$\operatorname{div}\boldsymbol{f}$ の正確な意味は後述の Gauss の発散定理で明らかになる。

例 1.3.1 浅い川の水の流れの速度場を $\boldsymbol{f}$ とするとき、$\boldsymbol{f}$ は 2 次元のベクトル場である。もしも川底に穴が空いていたりして水が染み込んでいったり、逆に川底から水が湧き出して来なければ $\operatorname{div}\boldsymbol{f} = 0$ が成り立つ。水が染み込んで消えるようなところでは $\operatorname{div}\boldsymbol{f} < 0$, 水が湧き出して来るようなところでは $\operatorname{div}\boldsymbol{f} > 0$ が成り立つ。■

1.3.4　回転

ここでは $n = 3$ とする。$\mathbf{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ については、前節で見たようにベクトル積 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ が定義できることに注意する。

$\mathbf{R}^3$ の開集合 Ω 上の C^1-級のベクトル場 $\boldsymbol{f}\colon \Omega \to \mathbf{R}^3$ に対して、

$$\nabla\times\boldsymbol{f} \;:=\; \left(\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ f_2 & f_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_1} \\ f_3 & f_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ f_1 & f_2 \end{vmatrix} \right)^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} \colon \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^3$$

と定義し、$\nabla\times\boldsymbol{f}$ を $\boldsymbol{f}$ の**回転** (**rotation**) と呼ぶ。$\nabla\times\boldsymbol{f}$ はしばしば $\operatorname{rot}\boldsymbol{f}$ あるいは $\operatorname{curl}\boldsymbol{f}$ とも書かれる。ますます形式的になってしまうが、

$$\nabla\times\boldsymbol{f} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix}$$

と書くこともできる。

特に $\boldsymbol{f}$ を速度場と考えるときは $\operatorname{rot}\boldsymbol{f}$ を**渦度** (**vorticity**) と呼び、恒等的に $\operatorname{rot}\boldsymbol{f} = \mathbf{0}$ を満たすベクトル場を**渦無し**または**非回転**という。

問　流体粒子が角速度 Ω の等速円運動 $(r\cos\Omega t, r\sin\Omega t)$ ($r = \sqrt{x^2+y^2}$, t は時刻) をするとき、その速度場 $\boldsymbol{v}$ は定数であるが、その渦度 $\boldsymbol{\omega} := \operatorname{rot}\boldsymbol{v}$ はどうなるか？

$\operatorname{rot}\boldsymbol{f}$ の正確な意味は後述の Stokes の定理で明らかになる。

計算にあたっての注意

$\nabla \boldsymbol{f}$ の第 1 成分は

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ f_2 & f_3 \end{vmatrix} = \frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}$$

であるが、これが分かれば後は $1 \to 2$, $2 \to 3$, $3 \to 1$ と番号を回して

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}$$

が得られる。計算のチェックに利用すると良い。

余談: 2 次元ベクトル場の回転

2 次元ベクトル場 $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2)^T$ について

$$\nabla \times \boldsymbol{f} = \operatorname{rot} \boldsymbol{f} := \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}$$

と定義することもある。これは 3 次元ベクトル場 $\widetilde{\boldsymbol{f}}$ が

$$\widetilde{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{r}) = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2), 0)^T$$

のように本質的に 2 次元である場合に

$$\nabla \times \widetilde{\boldsymbol{f}} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & f_1 & \boldsymbol{e}_1 \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & f_2 & \boldsymbol{e}_2 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{e}_3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & f_1 \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & f_2 \end{pmatrix} \boldsymbol{e}_3 = \left(0, 0, \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right)^T$$

となることから来ているものであろう。

なお、スカラー場 ψ に対して

$$\operatorname{rot} \psi := \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_2}, -\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \right)^T$$

と定めることもある (このとき ψ をベクトル場 $\operatorname{rot} \psi$ の**流れ関数** (**stream function**) であるという)。

結局、3 次元以外で rot が出て来たら、その話をしている人がどういう意味で用いているか、よくよく注意すべきである。

1.3.5 ラプラシアン

$\mathbf{R}^n$ の開集合 Ω 上定義された C^2-級の関数 $f\colon \Omega \to \mathbf{R}$ に対して

$$\triangle f := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

と定義し、$\triangle f$ を f の**ラプラシアン** (**Laplacian**) と呼ぶ。
　$\triangle f \equiv 0$ をみたす f を**調和関数** (harmonic function) とよぶ。
　$\mathbf{R}^n$ の開集合 Ω で定義された C^2-級のベクトル場 $\boldsymbol{f}\colon \Omega \to \mathbf{R}^n$ に対して

$$\triangle \boldsymbol{f} := (\triangle f_1, \cdots, \triangle f_n)^T$$

とおき、$\boldsymbol{f}$ の Laplacian と呼ぶ。

余談 1.3.1 (記号の話) すぐ後で示すように、$\triangle f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \nabla \cdot (\nabla f)$ であるから、$\triangle$ を ∇^2 で表すことがある (特に工学系の本ではそうしてあることが多い)。 ■

1.3.6　微分演算子の公式

　微分演算子を二つ続けると何がおこるか?

命題 1.3.1 (ベクトル場の微分演算子) $\boldsymbol{f}$ は $\mathbf{R}^3$ 上の C^2 級のベクトル場、f は $\mathbf{R}^3$ 上の C^2-級のスカラー場とする。

(1) $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \triangle f$. いいかえると $\nabla \cdot (\nabla f) = \triangle f$.

(2) $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = \mathbf{0}$. いいかえると $\nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0}$.

(3) $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \boldsymbol{f}) = 0$. いいかえると $\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{f}) = 0$.

(4) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \boldsymbol{f}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \boldsymbol{f}) - \triangle \boldsymbol{f}$. いいかえると $\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{f}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{f}) - \triangle \boldsymbol{f}$.

証明　(演習問題とする。必修！) (1), (2), (3) については是非とも自分の手で計算して確かめてみること (定義を覚えるのと、(2), (3) の理由を納得するのが大事である。) ■
　なお (1) は一般の次元で成立する。(4) の応用としては、以下に述べる例 1.3.2 が有名である。

問　上の命題 1.3.1 を証明せよ。

問　任意の C^1-級ベクトル場 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ に対して

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) = (\operatorname{rot} \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) - (\operatorname{rot} \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})$$

が成り立つことを示せ。

1.3.7　例

　数学を深く理解するためには、その良い応用例を学ぶことが非常に役に立つ。その意味で (遠回りのように思えるかも知れないが) 電磁気学や流体力学における例を物理学のテキストで学ぶことを強く奨めたい[6]。
　簡単で典型的な例 (ただし偏微分方程式関係に限られる) をいくつか

[6]立場の違いはあれ、空間概念を突き詰めて考えている点では、現代でも数学と物理学は近い関係を持っているはずである。

「応用解析 II 講義ノート」

`http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/lecture/ouyoukaiseki2/pde2004-long.pdf`

に載せてある。以下いくつか手短に (結果のみ) 紹介する。

例 1.3.2 (Maxwell の方程式 (1873), 電磁波の予言) 真空中では、電場 $\boldsymbol{E}$, 磁場 $\boldsymbol{B}$, 電荷密度 ρ, 電流密度 $\boldsymbol{j}$ は **Maxwell の方程式**

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0},\quad \nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t},\quad \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0,\quad c^2\nabla\times\boldsymbol{B}=\frac{\boldsymbol{j}}{\varepsilon_0}+\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}$$

を満たす[7] (c は光速, ε_0 は真空の誘電率[8]である)。

特に電荷、電流密度が存在しない ($\rho\equiv 0$, $\boldsymbol{j}\equiv\boldsymbol{0}$) とき、

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0,\quad \nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t},\quad \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0,\quad c^2\nabla\times\boldsymbol{B}=\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}$$

であるから、命題 1.3.1 の (4) を使って、

$$\begin{aligned}\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}&=\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\boldsymbol{B})=\nabla\times\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=\nabla\times(-\nabla\times\boldsymbol{E})\\&=\triangle\,\boldsymbol{E}-\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{E})=\triangle\,\boldsymbol{E}-\boldsymbol{0}\\&=\triangle\,\boldsymbol{E},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{B}}{\partial t^2}&=\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}(-\nabla\times\boldsymbol{E})=-\frac{1}{c^2}\nabla\times\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}=-\frac{1}{c^2}\nabla\times\left(c^2\nabla\times\boldsymbol{B}\right)=-\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{B}\\&=\triangle\,\boldsymbol{B}-\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{B})=\triangle\,\boldsymbol{B}-\boldsymbol{0}\\&=\triangle\,\boldsymbol{B}.\end{aligned}$$

すなわち $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ ともに速さ c の**波動方程式**を満たす。Maxwell (1831–1879) はこの事実を知って、真空中を伝播する電磁波の存在を予言した (1864)。それに従い 1887 年、Hertz (Heinrich Rudolph Hertz, 1857–1894) が実験で発生と検知に成功した。その伝播速度が光速度とよく一致することから、光も一種の電磁波と予想された (光の電磁波説)。 ■

例 1.3.3 (Fourier の熱伝導の法則, 熱伝導方程式) 「熱の流れの速度は温度勾配に比例する。」という法則が、Fourier (Jean-Baptiste-Joseph Fourier, 1768–1830, フランス) によって発見された。温度を場所の関数 (スカラー場) u とするとき、熱流の速度は $\nabla u=\operatorname{grad}u$ に比例する、ということである。時間変化を表す方程式 (**熱伝導方程式**) は、熱量の保存則から (残念ながら詳細は省略するが)

$$C\frac{\partial u}{\partial t}=\operatorname{div}(k\operatorname{grad}u)$$

となる (C は熱容量、k は Fourier の法則に現れる比例定数)。特に C や k が定数である場合には、公式 $\operatorname{div}(\operatorname{grad})=\triangle$ より

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\kappa\triangle u,\quad \kappa:=\frac{k}{C}$$

となる (普通数学で熱伝導方程式というときはこちらの方程式を指す)。 ■

[7] Maxwell は文章で表現したという。はじめてこの微分方程式の形に書き下したのは Heaviside である。

[8] ちなみに、MKS 単位系では $\varepsilon_0=\dfrac{10^7}{4\pi c^2}\fallingdotseq 8.854\times10^{-12}\,\mathrm{F/m}$.

この例も以下の二つの例も発散定理の説明の後に置く方が適当かも知れない。

例 1.3.4 (流体の非圧縮性の条件) 非圧縮性流体の速度 (ベクトル) 場を $\boldsymbol{v}$ とするとき、$\nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0$ が成り立つ (流体の質量保存を表す)。 ■

例 1.3.5 (静電場の Gauss の法則) (準備中 — 非常に重要な例なのでぜひ書きたい。とりあえずファインマン他 [15] を参考書としてあげておく。)

第2章　線積分

2.1　曲線の弧長と線要素

前口上

ベクトル場の接線線積分が最重要な目標であるが、一応その前に線要素に関する線積分を説明しておく。時間的余裕がない場合はここを省略しても大きな問題は生じない。

区分的に C^1-級の曲線 $C:\boldsymbol{r}=\varphi(t)$ $(t\in[a,b])$ の長さ (弧長) L は

$$L=\int_a^b\|\varphi'(t)\|\,dt,\quad \|\varphi'(t)\|=\left(\sum_{i=1}^n\varphi_i'(t)^2\right)^{1/2} \tag{2.1}$$

である[1]。

弧長はパラメーターの取り方によらないことが証明できる。

さて、$t=a$ から $t=t$ までの弧長 $s=\sigma(t)$ $(t\in[a,b])$ は

$$s=\sigma(t)=\int_a^t\|\varphi'(r)\|\,dr$$

なので

$$\frac{ds}{dt}=\frac{d\sigma}{dt}=\|\varphi'(t)\|.$$

これから $\sigma(t)$ は、t の連続かつ区分的に C^1-級の関数であることが分かる。

曲線 C は正則、すなわち任意の $t\in[a,b]$ に対して $\varphi'(t)\neq0$ と仮定しよう。すると

$$\frac{d\sigma}{dt}>0\quad(t\in[a,b]).$$

ゆえに逆関数 $t=\tau(s)$ が存在し[2]、それも連続かつ区分的 C^1-級となる。$\psi:=\varphi\circ\tau$, つまり $\psi(s):=\varphi(\tau(s))$ $(s\in[0,L])$ とおいて、$\boldsymbol{r}=\varphi(t)$ の代わりに $\boldsymbol{r}=\psi(s)$ を曲線 C のパラメーター付けとして採用できる。s を**弧長パラメーター**と呼ぶ。

C の像 $\{\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}=\psi(s),\ s\in[0,L]\}$ 上で定義された関数 f の弧長に関する線積分を

$$\int_C f\,ds:=\int_0^L f(\psi(s))\,ds \tag{2.2}$$

[1] もっと一般的に定義することもできる。定義域である区間 $[a,b]$ の任意の分割 $\Delta=\{t_j\}_{j=0}^N$ に対して、$L_\Delta:=\sum_{j=1}^N\|\boldsymbol{\varphi}(t_j)-\boldsymbol{\varphi}(t_{j-1})\|$ とおき、$|\Delta|\to0$ のときに L_Δ の極限値 L が存在するとき、C は**長さを持つ** (rectifiable) 曲線であるといい、L を C の**長さ**という。φ が区分的に C^1-級の場合はこの (2.1) が成立し、この場合で実用上十分一般的と考えられるので、解析概論 II では、とりあえずこの (2.1) を曲線の長さの定義と考えることにする。

[2] σ, τ はそれぞれローマ字の s, t に対応するギリシア文字である。

で定義する。変数変換の公式を用いると

$$\int_C f\,ds = \int_a^b f(\varphi(t))\|\varphi'(t)\|\,dt \tag{2.3}$$

であることがわかる。こちらを定義と考えても良い。

(2.3) の場合、

$$ds := \|\varphi'(t)\|\ dt = \sqrt{\varphi_1'(t)^2 + \cdots + \varphi_n'(t)^2}\,dt$$

と考え、これを曲線 C の**線要素** (線素) とよぶ。線要素を $d\gamma$ と書く流儀もある。

2.2 (接線) 線積分の定義と基本的な性質

伝統的なベクトル解析でもっとも活躍する線積分は、ベクトル場 $\boldsymbol{f}$ の曲線 C 上の**接線線積分** (**接線要素に関する線積分**)

$$\int_C \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r}$$

である。この講義では単に線積分と言ったら、この線積分のことを指す。

これは現代の幾何学においては、1 次 (外) 微分形式

$$\omega = f_1dx_1 + f_2dx_2 + \cdots + f_ndx_n$$

の曲線 C 上での線積分

$$\int_C \omega = \int_C f_1dx_1 + f_2dx_2 + \cdots + f_ndx_n$$

として表現されることが多い。形式的になってしまうが、暗記術としては[3] $d\boldsymbol{r} = (dx_1, \cdots, dx_n)^T$ とみなすのがよい。すると

$$\int_C \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_C \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix} = \int_C f_1dx_1 + \cdots + f_ndx_n$$

となってつじつまがあう (?)。

2.2.1 例

(少々乱暴かもしれないが定義の前に例を紹介する。)

物理からの例 (力の場がする仕事)

(図が必要である。板書はするが...)

[3] d 某 は「某」の微小変位を表す、と考える (古いタイプ？) 人には、これこそが本質かもしれない。

方向と大きさが一定の力 (大きさを f とする) で、その力の方向に物体を距離 r だけ移動させるとき、その力がした仕事 W は

$$W = fr$$

となるのであった。

一定の力 $\boldsymbol{f}$ を作用させて、物体をまっすぐ $\boldsymbol{r}$ だけ移動させたとき、その力のした仕事は

$$W = \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{r}.$$

力の場 $\boldsymbol{f}$ が与えられているとき、曲線 C に沿って物体を動かした場合、その力がした仕事 W は近似的に

$$W \fallingdotseq \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}_j) \cdot \boldsymbol{\Delta r}_j, \quad \boldsymbol{\Delta r}_j := \boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_{j-1}.$$

ただし $\boldsymbol{r}_j$ は、$[a,b]$ の十分細かい分割 $\Delta = \{t_j\}_{j=0}^{N}$ に対して $\boldsymbol{r}_j = \boldsymbol{\varphi}(t_j)$ $(j = 0, 1, \ldots, N)$ で定義される。

そこで

$$W = \int_C \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r} := \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}_i) \cdot \boldsymbol{\Delta r}_i$$

とみなすことができる。曲線 C が区分的に C^1-級である場合には、容易に

$$\int_a^b \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\varphi}(t)) \cdot \boldsymbol{\varphi}'(t)\, dt$$

に等しいことが示せる。■

複素関数論からの例

Ω を複素平面 $\mathbf{C}$ の開集合で、C を Ω 内の長さを持つ曲線とするとき、連続関数 $f\colon \Omega \to \mathbf{C}$ の曲線 C 上の線積分を

$$\int_C f(z)\, dz = \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=1}^{N} f(z_i)(z_i - z_{i-1})$$

(ただし $[a,b]$ の分割 $\Delta = \{t_j\}_{j=1}^{N}$ に対して、$z_j = \varphi(t_j)$ とおいた。)

のように定義するのであった。やや形式的な計算だが、

$$\int_C f(z)\, dz = \int_C (u + iv)(dx + i\, dy) = \int_C u\, dx - v\, dy + i \int_C v\, dx + u\, dy$$

となって、この線積分が、ここで扱っているベクトル場の接線線積分の特別な場合であることがわかる。■

2.2.2　定義

$\mathbf{R}^n$ の開集合 Ω で定義された n 次元ベクトル場 $\boldsymbol{f}\colon \Omega \to \mathbf{R}^n$ が、$\boldsymbol{f} = (f_1, \cdots, f_n)^T$ であり、曲線 C が Ω 内の C^1-級の曲線 $\boldsymbol{r} = \varphi(t) = (\varphi_1(t), \cdots, \varphi_n(t))^T$ $(t \in [a, b])$ であるとき、

$$\int_C \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r} := \int_a^b \boldsymbol{f} \cdot \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\, dt = \int_a^b \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{\varphi}'(t)\, dt = \int_a^b [f_1(\varphi(t))\varphi_1'(t) + \cdots + f_n(\varphi(t))\varphi_n'(t)]\, dt$$

とおき、曲線 C 上のベクトル場 $\boldsymbol{f}$ の **(接線) 線積分**とよぶ。

(2005 年度に配布したプリントでは、上の定義式に誤植があった。)

例 2.2.1 $\boldsymbol{f}(x, y, z) = (y + z, z + x, x + y)^T$ とするとき、次の各曲線 C_j に対して、$\displaystyle\int_{C_j} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r}$ を求めよ。

(1) C_1: $\boldsymbol{r} = (t, t^2, t^3)^T$ $(t \in [0, 1])$

(2) C_2: $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 1, 1)$ を順に結んでできる折線

解　(1) $\boldsymbol{\varphi}(t) = (t, t^2, t^3)$ とおく。$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\varphi}(t)) = (t^2 + t^3, t^3 + t, t + t^2)^T$, $\boldsymbol{\varphi}'(t) = (1, 2t, 3t^2)^T$ であるから、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\varphi}(t)) \cdot \boldsymbol{\varphi}'(t) &= (t^2 + t^3) \cdot 1 + (t^3 + t) \cdot 2t + (t + t^2) \cdot 3t^2 \\ &= t^2 + t^3 + 2t^4 + 2t^2 + 3t^3 + 3t^4 = 3t^2 + 4t^3 + 5t^4. \end{aligned}$$

ゆえに

$$\int_{C_1} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^1 (3t^2 + 4t^3 + 5t^4) dt = 3 \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot \frac{1}{4} + 5 \cdot \frac{1}{5} = 3.$$

(2) $(0, 0, 0)$ から $(1, 0, 0)$ にいたる線分を γ_1, $(1, 0, 0)$ から $(1, 1, 0)$ にいたる線分を γ_2, $(1, 1, 0)$ から $(1, 1, 1)$ にいたる線分を γ_3 とおくと、$C_2 = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ となる。ゆえに

$$\int_{C_2} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{\gamma_1} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r} + \int_{\gamma_2} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r} + \int_{\gamma_3} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r}.$$

γ_1 は $\boldsymbol{\varphi}(t) = (t, 0, 0)^T$ $(t \in [0, 1])$ とパラメーターづけできる。$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\varphi}(t)) = (0, t, t)^T$, $\boldsymbol{\varphi}'(t) = (1, 0, 0)^T$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\varphi}(t)) \cdot \boldsymbol{\varphi}'(t) = 0$ であるから、$\displaystyle\int_{\gamma_1} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r} = 0.$

γ_2 は $\boldsymbol{\varphi}(t) = (1, t, 0)^T$ $(t \in [0, 1])$ とパラメーターづけできる。$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\varphi}(t)) = (t, 1, 1 + t)^T$, $\boldsymbol{\varphi}'(t) = (0, 1, 0)^T$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\varphi}(t)) \cdot \boldsymbol{\varphi}'(t) = 1$ であるから、$\displaystyle\int_{\gamma_2} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r} = 1.$

γ_3 は $\boldsymbol{\varphi}(t) = (1, 1, t)^T$ $(t \in [0, 1])$ とパラメーターづけできる。$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\varphi}(t)) = (1 + t, t + 1, 2)^T$, $\boldsymbol{\varphi}'(t) = (0, 0, 1)^T$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\varphi}(t)) \cdot \boldsymbol{\varphi}'(t) = 2$ であるから、$\displaystyle\int_{\gamma_3} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r} = 2.$

ゆえに $\displaystyle\int_{C_2} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r} = 0 + 1 + 2 = 3.$ ■

注意 2.2.1 (記号の色々な流儀 — 他の本を読むときのために) 外微分形式を用いた表現とは対照的に、ベクトル解析のベクトル場を用いた記法には、数多くの流儀がある[4]。ここでは線積分を表す記号をいくつか紹介する。

$\boldsymbol{dr}$ の代わりに $\boldsymbol{ds}$ あるいは $\boldsymbol{dx}$ を用いて

$$\int_C \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{ds},\quad \int_C \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{dx}$$

と書いたり、単位接ベクトル $\boldsymbol{t}=\dfrac{d\boldsymbol{r}}{ds}$ を導入して線要素 ds に関する線積分

$$\int_C \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{t}\,ds$$

で表したり、内積の記号を変えて

$$\int_C (\boldsymbol{f},\boldsymbol{dr}),\quad \int_C (\boldsymbol{f}|\boldsymbol{dr})$$

のように書いたり、とにかく (あきれるくらい) 色々な記法がある。 ■

注意 2.2.2 (覚えるのは大変？) 線積分が 3 つ出来てきたが、計算法については

$$\begin{aligned}
&\int_C f\ ds=\int_a^b f(\boldsymbol{\varphi}(t))\frac{ds}{dt}\ dt,\quad \frac{ds}{dt}=\|\varphi'(t)\|,\\
&\int_C \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{dr}=\int_a^b \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\varphi}(t))\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\ dt,\quad \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\boldsymbol{\varphi}'(t),\\
&\int_C P\ dx+Q\ dy=\int_a^b\left[P(x(t),y(t))\frac{dx}{dt}+Q(x(t),y(t))\frac{dy}{dt}\right]dt\quad (n=2\text{ の場合})
\end{aligned}$$

であるから、覚えるのに困難はないであろう。1 番目と他の 2 つは別物であるが、2 番目と 3 番目は見掛けが異なるだけで、本質的には同じものである。 ■

2.2.3 線積分の性質

次の命題は本質的に複素関数論の線積分で学んだはずである (証明も同じである)。

[4]筆者自身は、少なくとも線積分に関しては、微分形式を用いた記法の方が混乱がなくて明らかに優れていると思う (趣味の問題かもしれないが)。

命題 2.2.1 (ベクトル場の接線線積分の性質) (乱暴だが仮定は省略する。曲線は区分的に C^1-級, ベクトル場は連続くらい。)

(1) 線積分の値は曲線の (向きを変えない) パラメーターの取り方によらない。

(2) $\displaystyle\int_C (\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g})\cdot d\boldsymbol{r} = \int_C \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r} + \int_C \boldsymbol{g}\cdot d\boldsymbol{r}.$

(3) $\displaystyle\int_C (\lambda\boldsymbol{f})\cdot d\boldsymbol{r} = \lambda\int_C \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r}.$

(4) $\displaystyle\int_{C_1+C_2} \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{C_1} \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r} + \int_{C_2} \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r}.$

(5) $\displaystyle\int_{-C} \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r} = -\int_C \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r}.$

(6) $\displaystyle\left|\int_C \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r}\right| \le \int_C \|\boldsymbol{f}\|\,ds.$

((1) の証明はせめて付録には用意しておこう。)

注意 2.2.3 弧長要素に関する線積分 $\displaystyle\int_C f\,ds$ についても、ほぼ同様のことが成り立つが、(5) だけは

$$\int_{-C} f\,ds = \int_C f\,ds$$

となる。つまり弧長要素に関する線積分は向きによらない。■

2.3 線積分とポテンシャル

高校数学で習った積分 (1 次元の世界 $\mathbf{R}$ での積分) では原始関数が大活躍した。ベクトル場の接線線積分でそれに相当するものはポテンシャル[5]と呼ばれる。ポテンシャルはいつも存在するとは限らないが、存在するときは原始関数と同様のことが成り立つ。

ポテンシャルがいつ存在するか、存在するときはどうやって求められるかが山場である。

2.3.1 ポテンシャルの定義

与えられたベクトル場 $\boldsymbol{f}\colon\Omega\to\mathbf{R}^n$ に対して、

$$\nabla F(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \quad (\boldsymbol{x}\in\Omega)$$

をみたす関数 F を求めるという問題を考える。これが存在するとき、F を $\boldsymbol{f}$ の**ポテンシャル (potential)** と呼ぶ。

[5] これは物理学用語のポテンシャル・エネルギーに由来する。この概念を初めて導入したのは Lagrange (1773) であるが、この言葉を初めて使ったのは Green (1828) であるという。

1 変数実数値関数の世界では、$F' = f$ をみたす F を f の原始関数と呼ぶのであった。

ところで、Ω を $\mathbf{R}^n$ の開集合、$F\colon \Omega \to \mathbf{R}$ を C^1-級の関数とするとき、F の「導関数」は (実数値関数ではなく) F の勾配ベクトル場 $\nabla F\colon \Omega \to \mathbf{R}^n$ である。これは実数値関数ではないので

多変数では、実数値関数の原始関数は考えられない！

ということになる。結局、多変数の場合に 1 変数関数の原始関数に相当するのは、ベクトル場のポテンシャルであることが納得できるであろう。

ポテンシャルとは、多変数版原始関数である。

例 2.3.1 (一様な重力場のポテンシャル)

$$\boldsymbol{f}(x_1, x_2, x_3) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} \quad (g \text{ は定数})$$

とするとき

$$F(x_1, x_2, x_3) := -g x_3$$

は $\nabla F = \boldsymbol{f}$ を満たす。つまり F は $\boldsymbol{f}$ のポテンシャルである。■

例 2.3.2 (一つの恒星の作る重力場のポテンシャル)

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}) := -\frac{GM}{\|\boldsymbol{r}\|^3}\boldsymbol{r} \quad (M,\ G \text{ は定数}, \boldsymbol{r} \in \mathbf{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\})$$

とするとき

$$F(\boldsymbol{r}) := \frac{GM}{\|\boldsymbol{r}\|}$$

は $\boldsymbol{f}$ のポテンシャルである (これを確かめるのは良い計算練習である)。■

注意 2.3.1 (ポテンシャル — 物理学の用語法) 物理学では、力の場 $\boldsymbol{f}$ に対して

$$-\operatorname{grad} V = \boldsymbol{f}$$

となるような関数 V が存在するとき、$\boldsymbol{f}$ は**保存力**であるといい、V を $\boldsymbol{f}$ の**ポテンシャル・エネルギー**と呼ぶ。これは上で定義したポテンシャルと符号のみ異なっているわけである。上の二つの例は物理学で良く知られた例である。■

注意 2.3.2 (外微分形式の言葉では) 1 次外微分形式 $\omega = f_1 dx_1 + \cdots + f_n dx_n$ に対して、$\omega = dF := \dfrac{\partial F}{\partial x_1}dx_1 + \cdots + \dfrac{\partial F}{\partial x_n}dx_n$ となる関数 F を ω のポテンシャルとよぶ。ポテンシャルの存在する ω を**完全** (**exact**) であるという ■

2.3.2　ポテンシャルと線積分の関係

(1) ポテンシャルはいつも存在するとは限らない (1 次元との大きな相違点)。実際、C^1-級ベクトル場 $\boldsymbol{f} = (f_1, \cdots, f_n)^T$ にポテンシャルが存在するならば

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n)$$

が成り立つ必要がある。特に 3 次元の場合は、この条件は

$$\nabla \times \boldsymbol{f} = \boldsymbol{0} \quad (\mathrm{rot}\, \boldsymbol{f} = \boldsymbol{0})$$

と同値である。

(2) ポテンシャルが存在する場合、線積分はポテンシャルで計算できる。
すなわちベクトル場 $\boldsymbol{f}$ のポテンシャルを F, 曲線 C の始点、終点をそれぞれ $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ とするとき、

$$\int_C \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_C \nabla F \cdot d\boldsymbol{r} = F(\boldsymbol{b}) - F(\boldsymbol{a}).$$

これはもちろん、1 次元の場合の

$$\int_a^b F'(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

に対応している。

(3) ポテンシャルが存在する場合、それは線積分で求められる。すなわち、Ω から定点 $\boldsymbol{a}$ を任意に選び、各 $\boldsymbol{x}$ に対して、$\boldsymbol{a}$ を始点、$\boldsymbol{x}$ を終点とする Ω 内の区分的 C^1-級曲線 $C_{\boldsymbol{x}}$ を取って、

$$F(\boldsymbol{x}) := \int_{C_{\boldsymbol{x}}} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r}$$

とおくと、F は $\boldsymbol{f}$ のポテンシャルになる ($\nabla F = \boldsymbol{f}$ が成り立つ)。これは 1 次元の場合の

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)\, dt = f(x)$$

に相当している。

例 2.3.3 (ポテンシャルを持たないベクトル場) ベクトル場

$$\boldsymbol{f}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

はポテンシャルを持たない。実際、もしもポテンシャル F が存在したとすると定義から

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = f_1(x_1, x_2) = -x_2, \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} = f_2(x_1, x_2) = x_1$$

となるが、これから

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1} = -1, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} = 1$$

で、

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1} \neq \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2}$$

となり矛盾する。■

(1) の証明

$\boldsymbol{f}$ のポテンシャル F が存在したとする。$\boldsymbol{f}$ が C^1-級であるから、F は C^2-級である。

$$f_k = \frac{\partial F}{\partial x_k} \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

であるから、偏微分の順序交換をして

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial F}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n).\blacksquare$$

(2) の証明

曲線 C のパラメーターづけを $\boldsymbol{r} = \varphi(t)$ $(t \in [\alpha, \beta])$ とすると、

$$\begin{aligned}\int_C \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r} &= \int_\alpha^\beta \sum_{i=1}^n f_i(\varphi(t))\varphi_i'(t)\,dt = \int_\alpha^\beta \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i}(\varphi(t))\varphi_i'(t)\,dt \\ &= \int_\alpha^\beta \frac{d}{dt}F(\varphi(t))\,dt = [F(\varphi(t))]_{t=\alpha}^{t=\beta} = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) \\ &= F(\boldsymbol{b}) - F(\boldsymbol{a}).\blacksquare\end{aligned}$$

(3) の証明は、ポテンシャルの存在条件を詳しく扱う次項にまわそう。

2.3.3 ポテンシャルの存在条件

次の非常に印象的な定理からはじめる。

定理 2.3.1 $\mathbf{R}^n$ の領域 (連結開集合) Ω と Ω 上の連続なベクトル場 $\boldsymbol{f}\colon \Omega \to \mathbf{R}^n$ に対して、$\boldsymbol{f}$ のポテンシャルが存在するためには、Ω 内の任意の区分的 C^1-級閉曲線 C に対して、

$$\int_C \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r} = 0$$

が成り立つことが必要十分である。

証明 (必要性) $\boldsymbol{f}$ のポテンシャル F が存在すると仮定する。閉曲線 C のパラメーター付けを $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\varphi}(t)$ $(t \in [\alpha, \beta])$ とするとき、$\boldsymbol{\varphi}(\alpha) = \boldsymbol{\varphi}(\beta)$ に注意すると、

$$\int_C \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r} = F(\boldsymbol{\varphi}(\beta)) - F(\boldsymbol{\varphi}(\alpha)) = 0.$$

(十分性) Ω 内の任意の区分的 C^1-級閉曲線 C に対して $\displaystyle\int_C \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r} = 0$ が成り立つと仮定する。Ω 内の任意の点 $\boldsymbol{a}$ を取って固定し、Ω 内の各点 $\boldsymbol{x}$ に対して、$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{x}$ をそれぞれ始点、終点とする、Ω 内の区分的に C^1-級の曲線 $C_{\boldsymbol{x}}$ を取り[6]、

$$F(\boldsymbol{x}) := \int_{C_{\boldsymbol{x}}} \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r}$$

[6] 命題 B.3.1 を見よ。

とおく。仮定から $F(\boldsymbol{x})$ は $C_{\boldsymbol{x}}$ の取り方によらずに定まる (いわゆる well-defined)。任意の $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ に対して、$\dfrac{\partial F}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}) = f_i(\boldsymbol{x})$ となることを示す[7]。曲線 γ_h を $\boldsymbol{\varphi}(t) := \boldsymbol{x} + th\boldsymbol{e_i}$ $(0 \le t \le 1)$ で定めると、これは $\boldsymbol{x}$ を始点、$\boldsymbol{x} + h\boldsymbol{e}_i$ を終点とする線分である。$C_{\boldsymbol{x}+h\boldsymbol{e}_i}$ として、$C_{\boldsymbol{x}} + \gamma_h$ が取れる。$\boldsymbol{\varphi}'(t) = h\boldsymbol{e}_i$, $\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{e}_i = f_i$ であるから、

$$
\begin{aligned}
F(\boldsymbol{x} + h\boldsymbol{e}_i) - F(\boldsymbol{x}) &= \int_{C_{\boldsymbol{x}+\gamma_h}} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r} - \int_{C_{\boldsymbol{x}}} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{\gamma_h} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r} \\
&= \int_0^1 \boldsymbol{f}(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_i + th, x_{i+1}, \cdots, x_n) \cdot h\boldsymbol{e}_i \, dt \\
&= h \int_0^1 f_i(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_i + th, x_{i+1}, \cdots, x_n) \, dt
\end{aligned}
$$

であるから、

$$
\begin{aligned}
\frac{F(\boldsymbol{x} + h\boldsymbol{e}_i) - F(\boldsymbol{x})}{h} &= \int_0^1 f_i(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_i + th, x_{i+1}, \cdots, x_n) \, dt \\
&\to \int_0^1 f_i(\boldsymbol{x}) \, dt = f_i(\boldsymbol{x}) \quad (h \to 0).
\end{aligned}
$$

これは $\dfrac{\partial F}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}) = f_i(\boldsymbol{x})$ を示している。ゆえに $\nabla F = \boldsymbol{f}$ で、F は $\boldsymbol{f}$ のポテンシャルである。■

この定理は示唆に富み、面白いが、与えられたベクトル場 $\boldsymbol{f}$ がポテンシャルを持つことを示すには使いづらい[8]。

前節で $\mathbf{R}^n$ の領域におけるベクトル場 $\boldsymbol{f}$ がポテンシャルを持つには

$$
\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n)
$$

が必要であることを示したが、実は定義域の領域に「穴」がなければこれは十分条件である。実際、次の定理が成り立つ。

定理 2.3.2 (単連結領域では渦無しベクトル場はポテンシャルを持つ) Ω が $\mathbf{R}^n$ の単連結領域、$\boldsymbol{f}\colon \Omega \to \mathbf{R}^n$ が C^1-級のベクトル場で、

$$
\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n) \tag{2.4}
$$

をみたすとき、$\boldsymbol{f}$ のポテンシャルが存在する。特に $\mathbf{R}^3$ の単連結領域における C^1-級のベクトル場 $\boldsymbol{f}$ が $\operatorname{rot} \boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}$ を満たすとき、$\boldsymbol{f}$ のポテンシャルが存在する。

この定理の証明は付録で与えることにするが、一つの証明のあらすじを与えておく。

[7] 授業などでは $n = 2$ の場合に、積分路を図示して、$\partial F / \partial x = f_1$ を示すとよい。このノートにも図を入れること。

[8] ポテンシャルが存在しないことを示すには、$\displaystyle\int_C \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r} \ne 0$ をみたす閉曲線 C を一つでも見つければよいので、まあまあ実際的である。

証明のあらすじ　Ω 全体で $\partial f_i/\partial x_j = \partial f_j/\partial x_i$ が成り立つと仮定すると、任意の曲線 C を連続的に変形させたとき、$\boldsymbol{f}$ の C にそっての線積分の値は変らないことが示せる。単連結性の仮定から、任意の閉曲線は定数曲線 (像が 1 点) に連続的に変形できるので、閉曲線上の線積分の値は 0 である。ゆえに $\boldsymbol{f}$ のポテンシャルが存在する。 ■

順序が逆になったが、単連結性の定義は次のようなものである。

定義 2.3.1 (単連結) Ω を $\mathbf{R}^n$ の領域 (連結開集合) とする。Ω が**単連結** (**simply connected**) であるとは、Ω 内の任意の閉曲線が定数閉曲線に Ω 内で連続可変であることを言う。

(本当は「連続可変」の定義を述べていないので、このままでは定義とは言いかねる。詳しくは付録を見よ。)

例 2.3.4 (単連結な領域、単連結でない領域) 単連結な領域の例として、全空間 $\mathbf{R}^n$, 開球 $B(a;R)$, 凸領域、星型領域、3 次元空間での 1 点の補集合 $\mathbf{R}^3 \setminus \{a\}$, 平面から半直線を除いた領域例えば $\mathbf{R}^2 \setminus \{(x,0); x \le 0\}$ などがある。

単連結でない領域の例としては、2 次元空間での 1 点の補集合 $\mathbf{R}^2 \setminus \{a\}$, $\mathbf{R}^3 \setminus \ell$ (ℓ は両方向に無限にのびた直線) などがある。 ■

余談 2.3.1 (Poincaré の定理とどっちが強い) (幾何学で外微分形式を学んだ人に) 定理の条件 (2.4) は、1 次微分形式

$$\omega := f_1\,dx_1 + \cdots + f_n\,dx_n$$

が閉形式であることを意味しているので、定理は「単連結領域では、任意の 1 次閉微分形式は完全である」と書き換えられる。Poincaré の定理「星型領域では、任意の次数の閉微分形式は完全である」は有名であるが[9]、星型ならば単連結であり逆は真でないから、ベクトル場のポテンシャルの存在については (1 次微分形式については) 上の定理の方が (仮定が弱いだけ) 強いわけである[10]。 ■

例 2.3.5 (ポテンシャルの計算) $\mathbf{R}^3$ 上のベクトル場 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}) = (y+z, z+x, x+y)^T$ はポテンシャルを持つことを示し、実際にポテンシャルを求めよ。

ベクトル場 $\boldsymbol{f}$ の定義域 $\mathbf{R}^3$ は単連結領域で、

$$\begin{aligned}
\nabla \times \boldsymbol{f} &= \det \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right)^T \\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial y}(x+y) - \dfrac{\partial}{\partial z}(z+x) \\ \dfrac{\partial}{\partial z}(y+z) - \dfrac{\partial}{\partial x}(x+y) \\ \dfrac{\partial}{\partial x}(z+x) - \dfrac{\partial}{\partial y}(y+z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1 \\ 1-1 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

[9] Jules Henri Poincaré (1854–1912, フランスの Nancy に生まれ、Paris にて没する) は 19 世紀から 20 世紀にかけて活躍した (D.Hilbert と双璧をなす) 大数学者である。

[10] ときどき定理 2.3.2 に言及せず、Poincaré の定理しか書いていない数学書がある。筆者は学生時代、この余談に書いたことを悟るまで、ずいぶんと落ち着かない気分にさせられた覚えがある。

が成り立つので、$\boldsymbol{f}$ はポテンシャルを持つ。原点から $\boldsymbol{x} = (x, y, z)^T$ に向かう線分 $C_{\boldsymbol{x}}$ は

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = (tx, ty, tz)^T \quad (t \in [0, 1])$$

とパラメーターづけができる。ポテンシャルとして

$$\begin{aligned} F(\boldsymbol{x}) &:= \int_{C_{\boldsymbol{x}}} \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{dr} = \int_0^1 \boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}(t)) \cdot \boldsymbol{\varphi}'(t)\, dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} ty + tz \\ tz + tx \\ tx + ty \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^1 t\,[x(y+z) + y(z+x) + z(x+y)]\, dt \\ &= xy + yz + zx \end{aligned}$$

が得られる。$\nabla F = \boldsymbol{f}$ を満たすことを確かめるのは易しい (でもサボらずにやること)。 ■

例 2.3.6 (単連結でない領域では、ポテンシャルを持たない渦無しベクトル場がある) $\Omega = \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ で定義されたベクトル場

$$\boldsymbol{f}(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)^T$$

は $\nabla \times \boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}$ を満たすが、ポテンシャルを持たない。実際、単位円周上を正の向き (進行方向の左手に円の内部を見る向き) に一周する閉曲線を C とするとき、

$$\int_C \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{dr} = 2\pi \neq 0$$

であることが示せるから (練習だと思ってぜひとも確認すること)、もしポテンシャルが存在するならば、定理 2.3.1 に矛盾する。

この例は多くのテキストで紹介されているものだが、実は複素関数論で有名な等式

$$\int_C \frac{dz}{z} = 2\pi i \quad (i \text{ は虚数単位})$$

の両辺の虚部を取ったものに他ならない。こちらの言葉でいうと、関数 $z \mapsto 1/z$ の原始関数が存在しないということになる。なお、よく知られているように例えば $\mathbf{C} \setminus \{x; x \leq 0\}$ という単連結領域では原始関数が存在する ($\log z$ の任意の分枝が原始関数になる)。それに対応して、$\mathbf{R}^2 \setminus \{(x, 0); x \leq 0\}$ では $\boldsymbol{f}$ もポテンシャルを持つ。 ■

問　$\mathbf{R}^2 \setminus \{(x, 0); x \leq 0\}$ における $\boldsymbol{f}$ のポテンシャルを求めよ。

2.4　Green の定理

— 閉曲線上の線積分は重積分に変換できる —

微積分の基本定理の一つの拡張であるといえる、Green の定理を紹介する。色々な表現ができるが、(2.6) の形で覚えておくのがよいであろう[11]。

Green の定理については次のように述べられていることが多い。

定理 2.4.1 (Green の定理あるいは Cauchy-Green の定理) $\mathbf{R}^2$ 内の区分的 C^1-級 Jordan 閉曲線 C の囲む領域を D とする。C の向きは、C 上の各点で進行方向の左手に D を見るようになっているとする。このとき D の閉包を含む開集合 Ω 上で定義された C^1-級のベクトル場 $\boldsymbol{f}=(P,Q)^T$ に対して次式がなりたつ。

$$\int_C \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r}=\iint_D \operatorname{rot}\boldsymbol{f}\,dx\,dy,\quad \operatorname{rot}\boldsymbol{f}:=\det(\nabla\ \boldsymbol{f})=\det\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & P\\ \frac{\partial}{\partial y} & Q\end{pmatrix}=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}. \tag{2.5}$$

同じことを微分形式で表現すると次のようになる。

$$\int_C P\,dx+Q\,dy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy. \tag{2.6}$$

余談 2.4.1 (定理の名称) Green の定理は **Gauss-Green の定理**と呼ばれたり、**Green-Stokes の定理**と呼ばれたりする。その辺の事情を説明しよう。

(後で紹介する) Gauss の発散定理の 2 次元版

$$\int_C \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}\,ds=\iint_D \operatorname{div}\boldsymbol{f}\,dx\,dy$$

で $\boldsymbol{f}=(Q,-P)^T$ とおいて、$\boldsymbol{n}\,ds=(dy,-dx)^T$ に注意すると、(2.6) が得られる。

一方、(2.5) は後で紹介する Stokes の定理の 2 次元版と考えることもできる。

つまり 2 次元空間では、Gauss の定理も Stokes の定理も、Green の定理という一つの公式につぶれてしまう、ということである。あるいは Green の定理という、比較的証明の簡単な基本的定理が、高次元空間では別の形の拡張 (Gauss の定理, Stokes の定理) を許す、という見方もできる。 ■

ところがこの命題は、筆者にとっては以下の点から少々「気持が悪い」。

1. 「囲む」の意味が曖昧である。Jordan の曲線定理を仮定すればよいが、そのような (授業では到底証明が不可能な) 大定理を持ち出すのは心苦しい。

2. 「左」というのも誤解[12]を生じかねない表現である (おそらく授業で上の定理だけ見せた場合、まず 99% の学生は誤解するのではないだろうか)。

ここでは次の形の定理を証明することで満足 (我慢？) することにする。

[11]ベクトル場の接線線積分でなく、1 次微分形式の線積分の形で述べてあり、最初の方針から逸脱しているが、それで減点をしてもこれが良いと信じる。

[12]右と左の数学的な定義を読んだり聞いたりしたことがあるだろうか。物理法則は左右非対称なので (ヤンとリーの発見した「パリティ対称性の破れ」)、物理学としては右と左は定義可能であるようだが、数学では「普通の」意味と一致するように右と左を定義することはできない。数学書に「右」と「左」が出て来ることはあるが、本当は x 軸と y 軸の「位置関係」と「同じ」というだけのことであろう。

定理 2.4.2 (x 軸 y 軸両方向に縦線集合である領域での Green の定理) $\mathbf{R}^2$ の領域 D が

$$D = \{(x,y); x \in (a,b),\ \varphi_1(x) < y < \varphi_2(x)\} = \{(x,y); y \in (c,d),\ \psi_1(y) < x < \psi_2(y)\}$$

と表されるとする。ここで φ_j は $[a,b]$ 上定義された区分的に C^1-級の関数、ψ_j は $[c,d]$ 上定義された区分的に C^1-級の関数で、

$$\forall x \in (a,b) \quad \varphi_1(x) < \varphi_2(x), \quad \forall y \in (c,d) \quad \psi_1(y) < \psi_2(y)$$

を満たすとする。このとき、D の閉包で定義された C^1-級の実数値関数 P, Q に対して

$$\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy$$

が成り立つ。ただし C は次で定義される C_1, C_2, C_3, C_4 を結んで出来る閉曲線とする。

$$\begin{aligned} C_1 &: \boldsymbol{r} = (t, \varphi_1(t))^T \quad (t \in [a,b]), & C_2 &: \boldsymbol{r} = (b,t)^T \quad (t \in [\varphi_1(b), \varphi_2(b)]),\\ -C_3 &: \boldsymbol{r} = (t, \varphi_2(t))^T \quad (t \in [a,b]), & -C_4 &: \boldsymbol{r} = (a,t)^T \quad (t \in [\varphi_1(a), \varphi_2(a)]). \end{aligned}$$

証明 D が y 軸の方向に縦線集合であることから、

$$\begin{aligned} \iint_D \left(-\frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy &= \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} -\frac{\partial P}{\partial y} dy\right) dx \\ &= \int_a^b P(x, \varphi_1(x))dx - \int_a^b P(x, \varphi_2(x))dx \\ &= \int_{C_1} P(x,y)\, dx - \int_{-C_3} P(x,y)\, dx \\ &= \int_{C_1+C_2+C_3+C_4} P(x,y)\, dx = \int_C P(x,y)\, dx. \end{aligned}$$

ただし C_2, C_4 では $dx/dt = 0$ であることから、$\displaystyle\int_{C_2} P\ dx = \int_{C_4} P\ dx = 0$ となることを用いた。

同様にして D が x 軸の方向に縦線集合であることから、

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx\, dy = \int_C Q(x,y)\, dy$$

が得られる。以上得られた二つの等式を加えればよい。■

一工夫すると、一方向だけに縦線集合であるような領域に対しても成り立つことが示せる (付録の定理 A.1.1)。

いずれにせよ、この定理は仮定が強すぎるので「一般性が低い」と言われても仕方がないが、以下に解説する積分範囲の分割のテクニック (多分複素関数論でおなじみ) を併用すれば、実際に (具体的に) 与えられた領域での積分に適用するのに「かなり使える」。

例 2.4.1 (積分範囲を分割して定理が使える場合に帰着する例) D を円環領域 $\{(x,y); 1<x^2+y^2<2\}$ とすると、どちらの定理の仮定も満たさないが、

$$D_1 := \{(x,y)\in D; x>0,\ y>0\},\quad D_2 := \{(x,y)\in D; x<0,\ y>0\},$$
$$D_3 := \{(x,y)\in D; x<0,\ y<0\},\quad D_4 := \{(x,y)\in D; x>0,\ y>0\}$$

とおくと、D_j $(j=1,2,3,4)$ は定理 2.4.2 の仮定を満たす[13]。

$$D = D_1\cup D_2\cup D_3\cup D_4\cup \text{零集合}.$$

また逆向きの曲線の対を (線積分に影響なしとして) 除くことにすれば

$$C = \partial D_1 + \partial D_2 + \partial D_3 + \partial D_4,$$

∂D_j は D_j の周を進行方向の左手に D_j の内部を見る向きに一周する閉曲線

であるから、

$$\begin{aligned}\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy &= \sum_{j=1}^{4}\iint_{D_j}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy = \sum_{j=1}^{4}\int_{\partial D_j} Pdx+Qdy\\ &= \int_{C_1+C_2+C_3+C_4} Pdx+Qdy = \int_C Pdx+Qdy.\blacksquare\end{aligned}$$

自分で好きなように選んだ区分的 C^1 級 Jordan 閉曲線で囲まれた領域 D の図をながめて、それが縦線集合であるような領域に分解できるか、しばらく紙とペンを持って試してみることを奨める。多分「実用上十分」という感触が持てると思う。

問 ある本で、ほぼ定理 2.4.2 に相当する命題 (両方向に縦線集合であるような領域について…) だけを証明して、後は領域を分解することでいつもうまく行く、と説明していたが、そこまで言ってしまうと嘘になる。反例を示せ。

余談 2.4.2 …しかし数学者の普通の感覚からすると、縦線集合である領域の有限和に分解できるような領域というのは、いくら使えるものではあっても「美しくない」ので、例えば例 2.4.1 にも直接適用できるような定理を述べようと努力してしまうようである (ある種の職業病かもしれない)。…しかし筆者が読んだテキストで、定理を厳密に述べて証明することに成功しているものは少ないようである。結構「ずる」をしている本が多い (そうするくらいならば、変に一般化しなければよいと思うのだが…)。誠実に立ち向かっていると感じられた本として、杉浦 [9] をあげておく (「また杉浦先生の本か」という感じがするが)。この本では Green の定理を 3 バージョン提示している。最初の二つがこの文書の定理 2.4.2, A.1.1 である。興味が出て来た人は最後の一つを読んでみるとよい。 ■

例 2.4.2 (線積分で領域の面積を計算する) 区分的 C^1-級の閉曲線 C で囲まれる有界領域を D とすると、

$$\int_C x\,dy = -\int_C y\,dx = \frac{1}{2}\int_C x\,dy - y\,dx = \mu(D)$$

である ($\mu(D)$ は D の面積を表す記号であった) 。実際に

[13] 本当は二つに分解するだけで定理 A.1.1 が適用できる。

$$P(x,y)=0,\ Q(x,y)=x \text{ に対して } \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=1,$$

$$P(x,y)=-y,\ Q(x,y)=0 \text{ に対して } \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=1,$$

$$P(x,y)=-\frac{1}{2}y,\ Q(x,y)=\frac{1}{2}x \text{ に対して } \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=1$$

であるから、Green の定理によれば $\displaystyle\int_C x\,dy,\ -\int_C y\,dx,\ \frac{1}{2}\int_C x\,dy-y\,dx$ のいずれも

$$\iint_D 1\,dxdy=\mu(D)$$

に等しい。■

例 2.4.3 (Cauchy の積分定理) 複素平面上の区分的 C^1-級の Jordan 閉曲線 C の囲む領域を D とし、$\overline{D}$ の開近傍で定義された C^1-級の複素数値関数 f があるとき、$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, $z=x+iy$ ($x,y\in\mathbf{R}$, $u(x,y)\in\mathbf{R}$, $v(x,y)\in\mathbf{R}$) とすると、

$$\begin{aligned}\int_C f(z)\,dz &= \int_C (u(x,y)+iv(x,y))(dx+i\,dy)\\ &= \int_C u(x,y)dx-v(x,y)dy+i\int_C v(x,y)dx+u(x,y)dy\\ &= \iint_D\left(-\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)dx\,dy+i\iint_D\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)dx\,dy.\end{aligned}$$

もしも f が正則関数であれば、Cauchy-Riemann の方程式

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial u}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

が成り立つので、

$$\int_C f(z)\,dz=\iint_D 0\,dx\,dy+i\iint_D 0\,dx\,dy=0.■$$

例 2.4.4 (2 次元単連結領域で渦無しベクトル場はポテンシャルを持つ) 2 次元領域 Ω におけるベクトル場 $\boldsymbol{f}$ が

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{f}=\frac{\partial f_2}{\partial x}-\frac{\partial f_1}{\partial y}=0$$

を満たす場合、領域 Ω に穴がないので、Ω 内の任意の閉曲線 C の囲む領域 D について $\overline{D}\subset\Omega$ となるため、Green の定理が使えて

$$\int_C \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r}=\iint_D\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}-\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)dx\,dy=\iint_D 0\,dx\,dy=0$$

が成り立つ。定理 2.3.1 より、$\boldsymbol{f}$ はポテンシャルを持つ。すなわち、定理 2.3.2 の 2 次元版が成り立つことが分かる (厳密な証明とはいいづらい — なぜだか分かりますか？[14])。■

[14] C は Jordan 曲線とは限らないので、C が囲む領域というものがはっきりしない。

第3章　曲面と面積分

曲面上の積分である面積分がこの章のテーマである。簡単のために 3 次元空間内の曲面に話を限定する。

特に以下の三点が重要である。

1. 面積要素と曲面積の定義
2. ベクトル場の法線面積分の定義
3. 微積分の基本定理の高次元化に相当する、Gauss の定理 (ベクトル場の法線面積分と体積積分の関係) と Stokes の定理 (ベクトル場の法線面積分と線積分の関係)

3.1　曲面の定義

まずは曲面の定義から見直そう。

3.1.1　3 つの素朴な方法

曲面を定義するための方法として、以下の三つが基本的である。曲面としては原点中心半径 R (>0) の球面 (の一部) を例として取り上げる。

(a) グラフとしての曲面

$$z=f(x,y) \quad \text{または} \quad x=g(y,z) \quad \text{または} \quad y=h(z,x).$$

例えば

$$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2} \quad ((x,y)\in\Omega:=\{(x,y);x^2+y^2<R^2\})$$

で、原点中心半径 R の球面の「上半分」を表す。

(b) 関数のレベル・セット (等値面) としての曲面

$$F(x,y,z)=c.$$

ここで c は定数である。

例えば

$$x^2+y^2+z^2=R^2$$

で原点中心半径 R の球面 (全体) を表す。

(c) パラメーター曲面 $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)^T \colon D \to \mathbf{R}^3$ とするとき、

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\varphi}(u,v) \quad \text{i.e.} \quad \begin{cases} x = \varphi_1(u,v), \\ y = \varphi_2(u,v), \\ z = \varphi_3(u,v) \end{cases}$$

で一つの曲面が定義できる。
例えば

$$\begin{cases} x = R\sin\theta\cos\phi \\ y = R\sin\theta\sin\phi \\ z = R\cos\theta \end{cases} \qquad ((\theta,\phi) \in (0,\pi)\times(0,2\pi)) \tag{3.1}$$

で原点中心半径 R の球面 (から $\phi = 0$ に対応する経線 (北極と南極を含む) を除いたもの) を表せるのであった。

以上の 3 つの定義法は、以下に見るように、**ローカルにはほとんど同等**である。

3 つの定義法相互の関係

- (a) は (b) の一種である。実際 $z = f(x,y)$ であるとき、

$$F(x,y,z) := f(x,y) - z, \quad c := 0$$

とおくと、$F(x,y,z) = c$ と同値になる。

- (a) は (c) の一種である。実際 $z = f(x,y)$ であるとき、

$$\varphi_1(u,v) := u, \quad \varphi_2(u,v) := v, \quad \varphi_3(u,v) := f(u,v)$$

とおくと

$$\begin{cases} x = \varphi_1(u,v), \\ y = \varphi_2(u,v), \\ z = \varphi_3(u,v) \end{cases}$$

と同値になる。

- (b) は $F(\boldsymbol{a}) = c$, $\nabla F(\boldsymbol{a}) \neq \mathbf{0}$ となる $\boldsymbol{a}$ の十分近くで (a) である。実際

$$F_x(\boldsymbol{a}) \neq 0 \quad \text{または} \quad F_y(\boldsymbol{a}) \neq 0 \quad \text{または} \quad F_z(\boldsymbol{a}) \neq 0$$

となっているので、例えば最初の場合は陰関数定理[1]を用いて

$$x = \varphi(y,z)$$

と x について解くことができる。

- (c) は
$$\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial v}(u_0, v_0) \neq \mathbf{0}$$
を満たす点 (u_0, v_0) の十分近くで (a) である。実際
$$\begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{または} \quad \begin{vmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{または} \quad \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \neq 0$$
であるから、それぞれの場合に (陰関数定理を用いて)
$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \xi(y, z), \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \eta(z, x), \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \zeta(x, y)$$
と u, v について解ける。例えば $(u, v)^T = \xi(y, z)$ とすると
$$x = \varphi_1(u, v) = \varphi_1(\xi(y, z))$$
となる。

上の説明の途中であげた条件

- 方法 (b) 関数 F のレベル・セットの場合には $\nabla F \neq 0$
- 方法 (c) パラメーター曲面 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\varphi}(u, v)$ 場合には $\dfrac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial v} \neq \mathbf{0}$

は重要なので、以下では常に仮定することになると思っておいて欲しい。実はいずれも曲面の接平面の $\mathbf{0}$ でない法線ベクトルの存在を保証する条件であると考えられる。

例 3.1.1 (勾配 ∇F は等値面 $F = c$ の法線ベクトルを与える) 微分積分学 I で、$F(x, y, z) = c$ で与えられる曲面上の点 (x_0, y_0, z_0) に対して、$\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ はその点における接平面の法線ベクトルを与えることを学んだはずである。例えば空間内の平面
$$F(x, y, z) := ax + by + cz = d \quad (a,\ b,\ c,\ d \text{ は } (a, b, c) \neq (0, 0, 0) \text{ をみたす実定数})$$
においては、どの点においても $\nabla F = (a, b, c)^T$ が法線ベクトルを与える。また、空間内の $(a, b, c)^T$ を中心とする半径 R の球面
$$F(x, y, z) := (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$$
上にある点 $(x_0, y_0, z_0)^T$ における接平面の法線ベクトルとして $\nabla F(x_0, y_0, z_0) = 2(x_0 - a, y_0 - b, z_0 - c)^T$ が取れる[2]。■

[2] これが法線ベクトルを与えることは初等幾何学的に考えても明らかである。

3.1.2　正則パラメーター曲面

定義 3.1.1 (正則パラメーター曲面) D は $\mathbf{R}^2$ の有界 Jordan 可測な開集合、U は $\overline{D}\subset U$ を満たす $\mathbf{R}^2$ の開集合で、$\boldsymbol{\varphi}\colon U\to\mathbf{R}^3$ は C^r-級の写像とするとき (ただし $1\le r\le\infty$)、

$$S:=\boldsymbol{\varphi}(D)=\{\boldsymbol{\varphi}(u,v);\ (u,v)\in D\}$$

を **2 次元 C^r-級パラメーター曲面**という。また、このとき

$$\partial S:=\boldsymbol{\varphi}(\partial D)=\{\boldsymbol{\varphi}(u,v);\ (u,v)\in\partial D\}\quad(\text{ただし } \partial D:=\overline{D}\setminus D)$$

を S の**境界**という。S が**正則**であるとは、次の (i), (ii) を満たすことを言う。

(i) $\boldsymbol{\varphi}|_D$ が単射である。すなわち

$$p,q\in D,\quad p\ne q\quad\Longrightarrow\quad\boldsymbol{\varphi}(p)\ne\boldsymbol{\varphi}(q).$$

(ii) 任意の $\boldsymbol{p}\in D$ で

$$\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial u}(\boldsymbol{p})\times\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial v}(\boldsymbol{p})\ne\mathbf{0}. \tag{3.2}$$

注意 3.1.1 (なぜ D だけでなく U が必要？) 上の定義で $\mathbf{R}^2$ の二つの部分集合 D,U が出て来るが、これを「ごちゃごちゃしている」と感じる人も多いであろう。こうしなければいけない理由は、積分そのものはできればコンパクト集合 (有界閉集合) 上の積分で済せたい (広義積分をさけたい) ということと、多変数関数では、開集合以外の集合を定義域とする関数の微分可能性の定義がむつかしいことによる。解析概論 I では、ほとんどの定理で関数の定義域は開集合であったことを思い出そう。 ■

u 曲線、 v 曲線、法線ベクトル　$(u_0,v_0)\in D$ とするとき、

$$\{\boldsymbol{\varphi}(u,v_0);(u,v_0)\in D\}$$

を $\boldsymbol{\varphi}(u_0,v_0)$ を通る u **曲線**、

$$\{\boldsymbol{\varphi}(u_0,v);(u_0,v)\in D\}$$

を $\boldsymbol{\varphi}(u_0,v_0)$ を通る v **曲線**と呼ぶ。$\boldsymbol{\varphi}(u_0,v_0)$ において、u 曲線の接ベクトル、v 曲線の接ベクトルはそれぞれ

$$\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial u}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\boldsymbol{\varphi}_1}{\partial u}\\[2mm]\dfrac{\partial\boldsymbol{\varphi}_2}{\partial u}\\[2mm]\dfrac{\partial\varphi_3}{\partial u}\end{pmatrix},\quad\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial v}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial v}\\[2mm]\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial v}\\[2mm]\dfrac{\partial\varphi_3}{\partial v}\end{pmatrix}$$

である。u 曲線の接ベクトルと、v 曲線の接ベクトルの双方に垂直なベクトルとして

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial u}\times\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial v}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial u}\\ \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial u}\\ \dfrac{\partial\varphi_3}{\partial u}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial v}\\ \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial v}\\ \dfrac{\partial\varphi_3}{\partial v}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial u}\dfrac{\partial\varphi_3}{\partial v}-\dfrac{\partial\varphi_3}{\partial u}\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial v}\\ \dfrac{\partial\varphi_3}{\partial u}\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial v}-\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial u}\dfrac{\partial\varphi_3}{\partial v}\\ \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial u}\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial v}-\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial u}\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial v}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial(x_2,x_3)}{\partial(u,v)}\\ \dfrac{\partial(x_3,x_1)}{\partial(u,v)}\\ \dfrac{\partial(x_1,x_2)}{\partial(u,v)}\end{pmatrix}$$

が得られる (ただし $\boldsymbol{\varphi}(u,v)=(x_1,x_2,x_3)^T$ と書いた)。S が正則と仮定したので、このベクトルは $\mathbf{0}$ にならない。

　これは曲面 S の点 $\boldsymbol{\varphi}(u_0,v_0)$ における接平面の**法線ベクトル**とよぶにふさわしいベクトルである。

　こうして次のことが分かった。

正則パラメーター曲面においては、各点で 0 でない法線ベクトルが定まる

なお、

$$\left\|\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial u}\times\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial v}\right\|^2=\sum_{1\le i<j\le 3}\left(\frac{\partial(x_i,x_j)}{\partial(u,v)}\right)^2 \tag{3.3}$$

に注意しておこう。■

注意 3.1.2 (他の本を読むときのために — 条件 (3.2) の言い換え) 条件 (3.2) を次の形で書いてある本も多い。

$$\operatorname{rank}\boldsymbol{\varphi}'(p)=2. \tag{3.4}$$

ここで $\boldsymbol{\varphi}'(p)$ は $\boldsymbol{\varphi}$ のヤコビ行列である。それを成分で書くと

$$\boldsymbol{\varphi}'=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial u}&\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial v}\\ \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial u}&\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial v}\\ \dfrac{\partial\varphi_3}{\partial u}&\dfrac{\partial\varphi_3}{\partial v}\end{pmatrix}$$

となるが、この行列のランクが 2 であるとは、2 つの列ベクトルが 1 次独立であること、言い換えると、2 次小行列式の中に少なくとも一つ 0 でないものがあることと同値である。それは

$$\sum_{1\le i<j\le 3}\left(\frac{\partial(x_i,x_j)}{\partial(u,v)}\right)^2>0 \tag{3.5}$$

と書くこともできる (この式で定義してある本も多い)。(3.3) によれば、この条件が (3.2) と同値であることは明らかであろう。こうして、三条件 (3.2), (3.4), (3.5) は互いに同値であることが分かる。■

例 3.1.2 (2 変数関数のグラフは正則パラメーター曲面である) D は有界 Jordan 可測開集合、U は $\overline{D} \subset U$ を満たす $\mathbf{R}^2$ の開集合で、$f\colon U \to \mathbf{R}$ を C^r-級の関数とする ($1 \le r \le \infty$)。このとき、$f|_D$ のグラフ

$$\operatorname{grad} f|_D = \{(x, y, f(x, y)); (x, y) \in D\}$$

は C^r-級の正則パラメーター曲面である。実際、$\boldsymbol{\varphi}(x, y) \overset{\text{def.}}{=} \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x, y) \end{pmatrix}$ とおくと、これは明らかに単射で[3]、

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y \end{pmatrix}$$

であるから、

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial x} \times \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_x \\ -f_y \\ 1 \end{pmatrix} \ne \mathbf{0}$$

が成り立つ。ゆえに $\operatorname{graph} f|_D$ は正則パラメーター曲面である。■

例 3.1.3 (球面のパラメーターづけ) 半径 R (> 0) の球面 $S := \{(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$ から、一つの「経線」

$$M := \{(x, y, z) \in S; x \ge 0,\ y = 0\}$$

を除いた $S \setminus M$ は正則パラメーター曲面である。

実際、$U = \mathbf{R}^2$, $D = (0, \pi) \times (0, 2\pi)$, $\boldsymbol{\varphi}\colon U \ni (\theta, \phi) \longmapsto \begin{pmatrix} R\sin\theta\cos\phi \\ R\sin\theta\sin\phi \\ R\cos\theta \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$ とすると、$S \setminus M = \boldsymbol{\varphi}(D)$ は C^∞-級正則パラメーター曲面の条件を満たすことを確かめよう。まず $\boldsymbol{\varphi}$ が C^∞-級であることは明らかで、$\boldsymbol{\varphi}|_D$ が 1 対 1 (単射) であることも簡単に確かめられる。

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} R\cos\theta\cos\phi \\ R\cos\theta\sin\phi \\ -R\sin\theta \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \phi} = \begin{pmatrix} -R\sin\theta\sin\phi \\ R\sin\theta\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

であるから

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \phi} = R^2 \begin{pmatrix} \sin^2\theta\cos\phi \\ \sin^2\theta\sin\phi \\ \sin\theta\cos\theta \end{pmatrix} = R^2 \sin\theta \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix}. \tag{3.6}$$

ゆえに $0 < \theta < \pi$ に注意して

$$\left\| \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \phi} \right\| = R^2 \sin\theta > 0.$$

以上から $S \setminus M$ は C^∞-級正則曲面の条件をみたす。

[3] $(x_1, y_1) \ne (x_2, y_2)$ ならば、$(x_1, y_1, f(x_1, y_1)) \ne (x_2, y_2, f(x_2, y_2))$.

(以下細かい話…興味のない人は無視して構わない) ところが、球面全体である S 自身は正則パラメーター曲面の条件を満たさない。このことの証明はしないが、上の $\boldsymbol{\varphi}$ を $\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}$ に延長して像が S を含むようにすると、$\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}$ が正則パラメーター曲面の条件を満たさなくなることを見てみよう。北極、南極を $\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}$ の像に含めるためには $\theta = 0, \pi$ が D に含まれる必要があるが、もしも $\theta = 0, \pi$ を D に含めてしまうと、θ をそのいずれかとして、ϕ によらず $\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}(\theta, \phi) = (0, 0, \pm R)^T$ になるので、$\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}$ は単射ではなくなる。さらに $\left\| \dfrac{\partial \widetilde{\boldsymbol{\varphi}}}{\partial \theta} \times \dfrac{\partial \widetilde{\boldsymbol{\varphi}}}{\partial \phi} \right\| = R^2 \sin\theta$ であり、これは $\theta = 0, \pi$ のとき $\mathbf{0}$ に等しくなってしまう。■

注意 3.1.3 ((3.6) が自然であること) 上で (3.6) を導いた計算はぜひともマスターして欲しいものだが、一方で重要な結果なので覚えていても欲しい。一見複雑なようだが、

$$\boldsymbol{n} := \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

とおくと、実は

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{\varphi}(\theta, \phi)}{\|\boldsymbol{\varphi}(\theta, \phi)\|} = \frac{\boldsymbol{\varphi}(\theta, \phi)}{R}$$

であり、$\boldsymbol{n}$ は球面上の点 $\boldsymbol{\varphi}(\theta, \psi)$ における外向き単位法線ベクトルであることと、$R^2 \sin\theta$ がいわゆる極座標変換のヤコビアンであることに気が付けば、

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \phi} = (\text{極座標変換のヤコビアン}) \cdot (\text{外向き単位法線ベクトル})$$

という形で覚えることができる。法線ベクトルであることは一般的に成り立つのであるから、「長さが極座標変換のヤコビアンに等しく、向きが外向き」としてもよい。■

3.1.3 一般の正則曲面の定義

(ここに書いてあることは初めて学ぶときは省略してかまわない。)

上の最後の例で示唆したように前項で定義した曲面だけでは不十分である。一口に言うと、

一つの関数で「曲面」全体を表現するのに不自由なことがある

上の例にあげた球面 $S = \{(x, y, z)^T; x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$ について詳しく見てみよう。まず、明らかに球面全体を一つの関数のグラフとして表すことはできない。また、極座標を用いたパラメーター表現 (3.1) にも問題がある。それは $(\theta, \phi) \mapsto (x, y, z)^T$ が 1 対 1 の写像ではないことである ($\theta = 0$ のとき、ϕ が何であっても $(x, y, z)^T = (0, 0, R)^T$)。

上の (a), (b), (c) の「同等性」を示した議論で、「ローカルには」という断り書きが曲者なのである。

そこで現代の数学ではどうやってこれらの問題を解決しているかというと、

上の素朴な方法で定義された小さな曲面を <u>はりあわせた</u> ものを曲面として定義する

正則な曲面

> $\mathbf{R}^3$ の部分集合 S が C^k-級の**正則な曲面**であるとは、任意の $\boldsymbol{x} \in S$ に対して、$\mathbf{R}^3$ の開集合 U で、次の 2 条件を満たすものが存在することをいう。
>
> (i) $\boldsymbol{x} \in U$
>
> (ii) $U \cap S$ は C^k-級の正則パラメーター曲面である

幾何学で学ぶ**多様体** (**manifold**) の言葉を用いると、S は $\mathbf{R}^3$ の 2 次元 C^k-級正則部分多様体である、ということになる。

例えば球面 $S = \{(x,y,z)^T; x^2+y^2+z^2 = R^2\}$ について、$z > 0$ の範囲なら $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ で、$z < 0$ の範囲なら $z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ で、$x > 0$ の範囲なら $x = \sqrt{R^2 - y^2 - z^2}$ で、$x < 0$ の範囲なら $x = -\sqrt{R^2 - y^2 - z^2}$ で、$y > 0$ の範囲なら $y = \sqrt{R^2 - z^2 - x^2}$ で、$y < 0$ の範囲なら $y = -\sqrt{R^2 - z^2 - x^2}$ で、それぞれ関数のグラフとして表現できる (ゆえに正則なパラメーター曲面である)。ゆえに球面 S は C^∞-級の正則な曲面である。

以上で $\mathbf{R}^3$ の曲面の定義は一応できたわけであるが、曲面上で (以下に述べる) ベクトル場の法線面積分を定義するためには「**向きのついた**曲面」を定義し、その上で面積分を定義するという手順が必要になる。それは決して難しいものではないが、少々準備が必要になるので、この解析概論 II の講義では残念ながら省略する。

この講義では、曲面上での積分を主たる問題とするので、「小さい」集合を無視したり[4]、比較的素朴に曲面を切り貼りすることで「正しい」値を計算で求めることが可能である。我々は正則パラメーター曲面上で面積分を定義することで満足することにしよう。

3.2 正則パラメーター曲面の曲面積と面積要素に関する面積分

$S = \boldsymbol{\varphi}(D)$ を $\mathbf{R}^3$ 内の正則 2 次元 C^r-級パラメーター曲面であるとする。$\boldsymbol{\varphi}$ の微分可能性より

$$\boldsymbol{\varphi}(u+t, v+s) = \boldsymbol{\varphi}(u,v) + t\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial u} + s\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial v} + O(t^2+s^2) \quad ((t,s) \to (0,0))$$

であるから、D 内の長方形 (縦 Δt, 横 Δs)

$$A = \{(u+t, v+s); (t,s) \in [0,\Delta t] \times [0, \Delta s]\}$$

が十分小さいとき、その像

$$\boldsymbol{\varphi}(A) = \{\boldsymbol{\varphi}(u+t, v+s); (t,s) \in [0,\Delta t] \times [0, \Delta s]\}$$

は平行四辺形

$$\left\{x = \boldsymbol{\varphi}(u,v) + t\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial u} + s\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial v}; (t,s) \in [0,\Delta t] \times [0, \Delta s]\right\}$$

[4]例えば球面から一本の子午線を抜いた球面は、一対一という性質を保って極座標を用いたパラメーター表現ができる

で良く近似される。この平行四辺形の面積は

$$\left\|\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial u}\times\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial v}\right\|\Delta t\Delta s$$

であるから、直観的には

$$\boldsymbol{\varphi}(A)\text{ の面積}\fallingdotseq\left\|\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial u}\times\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial v}\right\|\Delta t\Delta s.$$

そこで正則パラメータ曲面上の面積分、曲面積を次のように定義する。

定義 3.2.1 (正則パラメーター曲面上の面素に関する面積分, 曲面積) U, D, $\boldsymbol{\varphi}$, S を上の通りとする。C^r-級正則パラメーター曲面 S 上定義された有界連続関数 $f\colon S\to\mathbf{R}$ の S 上の**面積分**を

$$\int_S f\,dS := \iint_D f(\boldsymbol{\varphi}(u,v))\left\|\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial u}\times\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial v}\right\|\,du\,dv$$

で定義する。また S の**曲面積** $\mu_c(S)$ を

$$\mu_c(S) := \int_S 1\,dS = \iint_D\left\|\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial u}\times\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial v}\right\|dudv$$

で定義する (標準的な記号ではない)。また

$$dS := \left\|\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial u}\times\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial v}\right\|dudv$$

とおき、これを**面積要素**と呼ぶ。

注意 3.2.1 (面積要素の表し方の流儀) dS のかわりに $d\Gamma$ や $d\sigma$ などの記号を使うこともある。面積要素を使う場合は、どの記号を使うか、一言断っておくのがエチケットであろう。 ■

注意 3.2.2 (曲面が平らなときは、曲面積は普通の面積に一致する) $\boldsymbol{\varphi}$ の像が xy 平面に含まれているとき、曲面積は 2 次元 Jordan 測度 (面積) に等しい。

証明 仮定より $\varphi_3=0$, すなわち $\boldsymbol{\varphi}=(\varphi_1,\varphi_2,0)^T$ となっているので、

$$\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial u}\times\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial v}=\begin{pmatrix}0\\0\\\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial u}\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial v}-\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial v}\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial u}\end{pmatrix}$$

となる。ゆえに $\mathbf{R}^3$ 内の曲面として S の曲面積は

$$\mu_c(S)=\iint_D\left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial u}\frac{\partial\varphi_2}{\partial v}-\frac{\partial\varphi_1}{\partial v}\frac{\partial\varphi_2}{\partial u}\right|dudv.$$

一方、$\mathbf{R}^2$ 内の図形としての S の面積 $\mu(S)$ は、$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\Phi(u,v)\overset{\text{def.}}{=}\begin{pmatrix}\varphi_1(u,v)\\\varphi_2(u,v)\end{pmatrix}$ という変数変換によって、

$$\mu(S)=\iint_S dx\,dy=\iint_D|\det\Phi'(u,v)|du\,dv=\iint_D\left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial u}\frac{\partial\varphi_2}{\partial v}-\frac{\partial\varphi_1}{\partial v}\frac{\partial\varphi_2}{\partial u}\right|du\,dv.$$

ゆえに、両者は一致することが分かる。■

例 3.2.1 (球面の曲面積) 既に述べたように、球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ は厳密には正則パラメーター曲面ではないが、細かいことには目をつむって機械的に曲面積を計算して見よう。前小節の例 3.1.3 の計算から

$$dS = R^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi$$

であることが分かるから、

$$\mu_c(S) = \iint_{\theta\in[0,\pi],\phi\in[0,2\pi]} R^2\sin\theta\, d\theta\, d\phi = R^2\int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = 4\pi R^2. \blacksquare$$

例 3.2.2 (2 変数関数のグラフの曲面積) すでに見たように $\mathbf{R}^2$ の開集合上定義された C^1-級の関数 $f\colon U\to\mathbf{R}$ に対して、

$$\boldsymbol{\varphi}(x,y) := \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{pmatrix}$$

とおくと、

$$\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial x}\times\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial y} = \begin{pmatrix} -f_x \\ -f_y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

これから $\overline{D}\subset U$ なる開集合 D に対して、$\operatorname{graph} f|_D$ は正則パラメーター曲面であることが分かり、その曲面積が以下のように計算できる。

$$dS = \left\|\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial x}\times\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial y}\right\| dx\,dy = \sqrt{1+(f_x)^2+(f_y)^2}\,dx\,dy$$

であるから

$$\mu_c(\operatorname{graph} f|_D) = \iint_D \sqrt{1+(f_x)^2+(f_y)^2}\,dx\,dy. \blacksquare$$

例 3.2.3 (回転面の曲面積) xy 平面における C^1 級の関数 $f\colon[a,b]\to\mathbf{R}$ のグラフを x 軸の回りに回転して出来る曲面 S について考えよう。ただし、$f(x)>0$ $(x\in[a,b])$ を仮定する。

$$\boldsymbol{\varphi}\colon [a,b]\times\mathbf{R}\ni\begin{pmatrix} x \\ \theta\end{pmatrix}\longmapsto\begin{pmatrix} x \\ f(x)\cos\theta \\ f(x)\sin\theta\end{pmatrix}\in\mathbf{R}^3,$$

$$D := (a,b)\times(0,2\pi)$$

で定義される $S=\boldsymbol{\varphi}(D)$ について、

$$\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(x)\cos\theta \\ f'(x)\sin\theta\end{pmatrix},\quad \frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial\theta} = \begin{pmatrix} 0 \\ -f(x)\sin\theta \\ f(x)\cos\theta\end{pmatrix},\quad \frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial x}\times\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial\theta} = \begin{pmatrix} f(x)f'(x) \\ -f(x)\cos\theta \\ f(x)\sin\theta\end{pmatrix}$$

であるから

$$\left\|\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial x}\times\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial\theta}\right\| = |f(x)|\sqrt{1+f'(x)^2} > 0.$$

ゆえに S は正則パラメーター曲面で、

$$\mu_c(S) = \iint_{x\in[a,b],\theta\in[0,2\pi]} |f(x)|\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx\,d\theta = 2\pi\int_a^b |f(x)|\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx.\blacksquare$$

(作業予定: 具体例を「概説」から持ってこよう。)

問　正則パラメーター曲面 $S=\varphi(D)$ において

$$E := \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}, \frac{\partial\varphi}{\partial u}\right), \quad F := \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}, \frac{\partial\varphi}{\partial v}\right), \quad G := \left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}, \frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)$$

とおくと

$$\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial u}\times\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right\| = \sqrt{EG-F^2}$$

が成り立つことを示せ。 ■

3.3　ベクトル場の法線面積分

前節で述べたことから、正則パラメーター曲面 $\varphi\colon U\to\mathbf{R}^3$ の単位法線ベクトルは

$$\boldsymbol{n} = \frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\times\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}}{\left\|\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\times\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}\right\|}$$

で得られる。これから

$$\boldsymbol{n}\,dS = \frac{\partial\varphi}{\partial u}\times\frac{\partial\varphi}{\partial v}\,du\,dv$$

となるが、これを $\boldsymbol{dS}$ と書くことがある。

$$\boldsymbol{dS} := \boldsymbol{n}\,dS = \frac{\partial\varphi}{\partial u}\times\frac{\partial\varphi}{\partial v}\,dudv. \tag{3.7}$$

そして、S の開近傍において定義された連続なベクトル場 $\boldsymbol{f}$ に対して、$\boldsymbol{f}$ の S 上の**法線面積分**を

$$\int_S \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{dS} = \int_S \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}\,dS := \iint_D \boldsymbol{f}(\varphi(u,v))\cdot\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\times\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)dudv \quad (\cdot \text{ は内積を表わす})$$

で定める。

注意 3.3.1 (法線面積分の物理的な解釈) $\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}$ は $\boldsymbol{f}$ の法線方向の成分である[5]。$\boldsymbol{f}$ が流速を表している場合、$\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$ は、面積が dS である微小部分を単位時間によぎって流れる流体の体

[5] $\boldsymbol{n}$ は単位ベクトルであることに注意する。単位ベクトル $\boldsymbol{e}$ とベクトル $\boldsymbol{a}$ の内積 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}$ は、$\boldsymbol{a}$ の $\boldsymbol{e}$ への射影 (成分) を表している。例えば、 $\mathbf{R}^3$ で $\boldsymbol{i}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{j}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{k}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ とすると、$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{a}$ の第 1 成分, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{a}$ の第 2 成分, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{a}$ の第 3 成分 となる。

積 (流量)、したがって $\int_S \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$ は S 全体を単位時間に通過する体積である ($\boldsymbol{n}$ 方向を正として出入りの差し引きを求めている) [6]。法線面積分は、S が閉曲面である場合が特に重要である。物理的には、S が囲む領域から、ものがどれだけ出入りするかを意味することになる。これについては、次節の Gauss の発散定理が成り立つ。 ■

注意 3.3.2 (法線面積分の成分による表現) $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, f_3)^T$ と書くと、

$$\int_S \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{S} = \iint_D \left(f_1(\boldsymbol{\varphi}(u,v))\frac{\partial(x_2,x_3)}{\partial(u,v)} + f_2(\boldsymbol{\varphi}(u,v))\frac{\partial(x_3,x_1)}{\partial(u,v)} + f_3(\boldsymbol{\varphi}(u,v))\frac{\partial(x_1,x_2)}{\partial(u,v)} \right) dudv.$$

これは微分形式の記法 (この講義では扱わない) を用いると次のように書ける。

$$\iint_D f_1\, dx_2\wedge dx_3 + f_2\, dx_3\wedge dx_1 + f_3\, dx_1\wedge dx_2. ■$$

注意 3.3.3 (計算するときに便利な形式的公式)

$$\boldsymbol{n}\,dS = d\boldsymbol{S} = \frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial u}\times\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial v}\,du\,dv = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial(x_2,x_3)}{\partial(u,v)} \\ \dfrac{\partial(x_3,x_1)}{\partial(u,v)} \\ \dfrac{\partial(x_1,x_2)}{\partial(u,v)} \end{pmatrix} du\,dv = \begin{pmatrix} dx_2\wedge dx_3 \\ dx_3\wedge dx_1 \\ dx_1\wedge dx_2 \end{pmatrix}. ■$$

(一番右の式は 2 次の微分形式と呼ばれるものを用いて表現してあり、この講義では定義していないもので「形式的」である。) ■

例 3.3.1 (球面 S 上の面積分) S を球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ として、次の各ベクトル場 $\boldsymbol{f}$ の、法線成分の S 上の面積分を求めよ。

(1) $\boldsymbol{f}(x,y,z) := (\alpha,\beta,\gamma)^T$ (定数ベクトル場).

(2) $\boldsymbol{f}(x,y,z) := (y,z,x)^T$.

(3) $\boldsymbol{f}(x,y,z) := \dfrac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}(x,y,z)^T$.

解答　まず、球面 S を普通の極座標によってパラメーターづけしたときの面積要素は

$$dS = R^2\sin\theta\; d\theta\, d\phi. \tag{3.8}$$

であったが (注意 3.1.3)、それを導出したところで、

$$\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial\theta}\times\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial\phi} = R^2\sin\theta\begin{pmatrix}\sin\theta\cos\phi\\ \sin\theta\sin\phi\\ \cos\theta\end{pmatrix}$$

[6] ここの説明は、藤田宏、今野礼二「基礎解析 II」、岩波講座 応用数学、から引用した。

という計算をしてあった。これから

$$
\text{(3.9)} \qquad \boldsymbol{dS} = \boldsymbol{n}\,dS = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \phi}\,d\theta\,d\phi = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix} R^2 \sin\theta\;d\theta\,d\phi
$$

という $\boldsymbol{dS} = \boldsymbol{n}dS$ を表す公式が得られる。

この結果は、S 上の点 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)^T$ における外向き単位法線ベクトルを

$$
\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{r}}{\|\boldsymbol{r}\|} = \frac{1}{R}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix}
$$

のように求めても得られる (向きのチェックは必要であるが$\cdots$)。

(1) $\boldsymbol{f} \equiv \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ (定数ベクトル場) であれば、

$$
\int_S \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = \iint_{\substack{\theta\in[0,\pi]\\ \phi\in[0,2\pi]}} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix} R^2\sin\theta\;d\theta d\phi = \cdots = 0.
$$

$\left(\int_0^{2\pi}\cos\phi\;d\phi = \int_0^{2\pi}\sin\phi\;d\phi = \int_0^{\pi}\cos\theta\sin\theta\;d\theta = 0\right.$ などを使った。)

(2) $\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix}$ であれば、

$$
\begin{aligned}
\int_S \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}\,dS &= \iint_{\substack{\theta\in[0,\pi]\\ \phi\in[0,2\pi]}} \begin{pmatrix} R\sin\theta\sin\phi \\ R\cos\theta \\ R\sin\theta\cos\phi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix} R^2\sin\theta\;d\theta d\phi \\
&= \iint_{\substack{\theta\in[0,\pi]\\ \phi\in[0,2\pi]}} R^3(\sin^2\theta\cos\phi\sin\phi + \cos\theta\sin\theta\sin\phi + \cos\theta\sin\theta\cos\phi)\sin\theta\;d\theta d\phi \\
&= \cdots = 0.
\end{aligned}
$$

(3) $\boldsymbol{f} = \dfrac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ のとき、S 上 $\boldsymbol{f} = \dfrac{1}{R^2}\boldsymbol{n}$ であるから、

$$
\int_S \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = \frac{1}{R^2}\int_S dS = 4\pi.
$$

これらの計算を自分でやってみると、面積分の計算はたとえ結果が簡単であっても、途中の計算は結構面倒であると感じる人もいるだろうが、実はこれらの問題は、次節で紹介する Gauss の発散定理を用いると簡単に計算できる。Gauss の発散定理の威力を示すためのサクラの問題？いや、領域を囲むような「閉曲面」上の面積分がとりわけ重要で、その場合は Gauss の定理が登場するのは極めて自然ということであり、それほどズルいことをしているわけではない。 ■

3.4 Gauss の発散定理

応用上非常に重要な「閉曲面[7]」上の面積分は「三重積分に変換できる」。すなわち、次の定理が成り立つ (Green の定理と比べてみよ)。

定理 3.4.1 (Gauss の発散定理) Ω を $\mathbf{R}^3$ の有界領域、 $S = \partial\Omega$ は有限個の C^1-級正則曲面からなるとするとき、$\overline{\Omega}$ の近傍で定義された C^1- 級のベクトル場 $\boldsymbol{f}$ に対して

$$\iiint_\Omega \operatorname{div} \boldsymbol{f}\, dx_1\, dx_2\, dx_3 = \int_S \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{dS}.$$

左辺は Ω 内にある湧き出しの総量、右辺は S を通って流れ出す流体の流量 (flux) とみなせる。

余談 3.4.1 この定理は、普通 C.F.Gauss[8] (1839) の名前を冠されることが多いが、G.Green[9] (1828), M.V.Ostrogradskii[10] (1831) も発見 (かつ発表) していたということである。■

注意 3.4.1 (微積分の基本定理の一般化であること) 3 次元の場合の定理を書いたが、何次元でも成立する。1 次元の場合は、$\boldsymbol{f} = F$, $\Omega = (a, b)$ として、

$$\int_\Omega \operatorname{div} \boldsymbol{f}\, dx = \int_a^b F'(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

となるが、右辺が 1 次元の場合の $\displaystyle\int_S \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{n}\, dS$ に相当する。$\partial\Omega = \{a, b\}$ であり、

$$\boldsymbol{n} = \begin{cases} 1 & (x = b) \\ -1 & (x = a) \end{cases}$$

となることを注意しよう。このことから分かるように、Gauss の発散定理は、微分積分学の基本定理の一般化である。 ■

注意 3.4.2 (Gauss の発散定理の別の表現) 上の定理のように「ベクトル場の発散の積分」に関する定理として書いてある本が多いが、

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\, dx = \int_S u n_i\, dS \quad (1 \le i \le 3)$$

の形の公式で書く流儀もある (n_i は $\boldsymbol{n}$ の第 i 成分である)。見掛けは異なるが[11]数学的には同等であることを各自確かめること。 ■

[7] 閉曲線を知っている人には説明抜きで「閉曲面」と言っても分かってもらえるかもしれない。しかし閉曲面の定義は難しいので、ここではこの問題には触れないことにする。それにしても、結構多くの本で用語の定義をさぼって定理の中で使っているのはひどいと思いませんか？

[8] Johann Carl Friedrich Gauss (1777–1855). 定規とコンパスによる正 17 角形の作図、代数学の基本定理、最小自乗法を駆使した小惑星セレスの軌道決定、正規分布の発見、非ユークリッド幾何学の発見、微分幾何学の創始 (リーマン幾何学のさきがけ) のような誰でも分かりそうな業績以外にも膨大な発見をした数学史上の巨人。「距離の 2 乗に反比例して作用する引力と圧力に関する一般的定理」という 1839 年の論文で発散定理を使ったとされるが、もっと早く 1813 年の論文にさかのぼれるという人もいる。

[9] George Green (1793–1841, 英国の Sneinton に生まれ、Sneinton にて没する).

[10] Mikhail Vasilevich Ostrogradski (1801–1862, Ukraine の Poltava に生まれ、Poltava にて没する).

[11] この違いを強調する人もいるが、ようするに同じである。

例 3.4.1 (例 3.3.1 の見直し) 例 3.3.1 (1), (2) の計算は、$\Omega = B(0;R)$ に対して Gauss の定理を適用し簡単になる。

(1) $\boldsymbol{f}$ が定数ベクトル場であれば、明らかに $\operatorname{div}\boldsymbol{f} = 0$. ゆえに

$$\int_S \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = \iiint_\Omega \operatorname{div}\boldsymbol{f}\,dx\,dy\,dz = 0.$$

(2) $\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix}$ であれば、暗算で $\operatorname{div}\boldsymbol{f} = 0$. ゆえに

$$\int_S \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = \iiint_\Omega \operatorname{div}\boldsymbol{f}\,dx\,dy\,dz = 0.$$

(3) $\boldsymbol{f} = \dfrac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ のとき、$\operatorname{div}\boldsymbol{f} = 0$ となるが、$\boldsymbol{f}$ は原点で定義されていないので、S が囲む領域 (すなわち球の内部) では Gauss の定理は成り立たない。その代わりに原点を包み込む任意の閉曲面 S' に対して

$$\int_{S'} \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$$

が同じ値 (既に計算した結果から 4π) を持つという不思議な結果が得られる。■

例 3.4.2 (静電場の Gauss の法則の微分形と積分形の同値性) 静電場 $\boldsymbol{E}$ に関する Gauss の法則には、二通りの表し方がある。

微分形 $\boldsymbol{E}$ は次の微分方程式を満たす。ここで ρ は電荷密度である。

$$\operatorname{div}\boldsymbol{E} = \rho/\varepsilon_0.$$

積分形 任意の閉曲面 S に関し、S を貫く電気力線の本数は Q/ε_0 である。ここで Q は S の内部にある総電荷量である。

Gauss の法則[12]の微分形と積分形は同値な法則である。例えば、微分形から積分形を導くには、電気力線は接ベクトルが $\boldsymbol{E}$ と同じ方向で密度 (単位面積当りの本数) が $\|\boldsymbol{E}\|$ と比例していることから、dS を貫く本数は $\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}$ で、Gauss の発散定理を利用して、

$$S \text{ を貫く電気力線の本数} = \int_S \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{dS} = \iiint_\Omega \operatorname{div}\boldsymbol{E}\,dx\,dy\,dz = \iiint_\Omega \frac{\rho}{\varepsilon_0}\,dx\,dy\,dz = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

とすればよい。■

[12]同じ人の名前がついているため、混同しかねないので、並べて区別を強調しておくと、Gauss の発散定理というのはベクトル場の法線面積分に関する数学の定理、Gauss の法則というのは静電場に関する電磁気学の法則である。

例 3.4.3 (アルキメデスの浮力の原理) 重力場の下で水中にある物体 Ω は水圧を受ける。$\boldsymbol{x} \in S = \partial\Omega$ における微小面積 dS の受ける力は

$$-p(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{n}\,dS.$$

ここで $p(\boldsymbol{x})$ は水圧であるが、一様な重力場の場合は

$$p(\boldsymbol{x}) = -\rho g x_3 + C$$

となる。ただし、ρ は水の密度、g は重力加速度、C は積分定数である。

Ω の全表面 S にかかる水圧による力の総和

$$\boldsymbol{P} := \int_S -p\,\boldsymbol{n}\,dS$$

がいわゆる**浮力**となる。実はすぐ後で示すように

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho\mu(\Omega)g \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

となる。つまり、方向は鉛直上向きで、大きさは物体が押しのける水の重さ[13]である (**アルキメデスの浮力の原理**)。

(3.10) の証明 $\boldsymbol{P} =: (P_1, P_2, P_3)^T$ とおく。

$$P_j = -\int_S p\,n_j\,dS \quad (j = 1, 2, 3)$$

であるが、以下 P_3 を計算する。$\boldsymbol{f} := (0, 0, p)^T$ とおくと

$$\begin{aligned} P_3 &= -\int_S \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = -\iiint_\Omega \operatorname{div}\boldsymbol{f}\,dx\,dy\,dz = \iiint_\Omega \rho g\,dx\,dy\,dz = \rho g \iiint_\Omega dx\,dy\,dz \\ &= \rho g \mu(\Omega). \end{aligned}$$

同様にして $P_1 = P_2 = 0$ となることが分かる。

もちろん紀元前の人であるアルキメデスが上のような議論をしたはずがない[14]。物体のしめる領域を、物体のかわりに水で満たしてみればつりあうのは物理的に「明らか」であるから、「浮力 $=$ Ω をみたす水にかかる圧力」である。 ■

3.5 Stokes の定理

(この項目は書きかけですが参考のため。)

[13] 体積 $\mu(\Omega)$ に水の密度 ρ をかけたものが押しのける水の質量で、それに重力加速度 g をかけて重さ (重力) になる。

[14] とはいえ、アルキメデスは面積、体積を計算する達人であって、放物線が囲む図形の面積や、球の体積、表面積を厳密に求めたことは名高い。

定理 3.5.1 (Stokes の定理, 回転量定理)

$$\int_S \operatorname{rot} \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{dS} = \int_{\partial S} \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{dr}.$$

余談 3.5.1 George Gabiriel Stokes (1819–1903, アイルランドの Skreen に生まれ、英国の Cambdridge にて没する) 宛への William Thomson (1824–1907, Lord Kelvin, アイルランドの Belfast に生まれ、スコットランドの Netherhall にて没する) の手紙 (1850 年 7 月 2 日) の追伸に現れる。公表されたのは Stokes が実施した数学コンクールの中で出題されたのが初めてであるとか (スピヴァック [10] に書いてある)。

なお、外微分形式を用いると、Green の定理、Gauss の定理、Stokes の定理のいずれも

$$\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega$$

という単一の公式で表現される。この定理のことも Stokes の定理とよばれる。 ■

証明 $\mathbf{R}^2$ 内の区分的に C^1-級の曲線 γ: $(u,v)^T = \boldsymbol{\psi}(t)$ $(t \in I = [a,b])$ と、γ の像 $\boldsymbol{\psi}(I)$ を含む $\mathbf{R}^2$ の開集合 U で定義された C^1-級の写像 $\boldsymbol{\varphi}$: $U \to \mathbf{R}^3$ があるとする。このとき $\boldsymbol{\varphi}\circ\boldsymbol{\psi}$: $I \to \mathbf{R}^3$ は $\mathbf{R}^3$ 内の区分的に C^1-級の曲線となる。それを Γ で表すことにする。

$\boldsymbol{\varphi}$ の像を含む開集合 V 上のベクトル場 $\boldsymbol{f}$: $U \to \mathbf{R}^3$ に対して、$\displaystyle\int_\Gamma \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{dr}$ を考えよう。定義によって、

$$\int_\Gamma \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{dr} = \int_a^b \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\psi}(t))) \cdot (\boldsymbol{\varphi}'(\boldsymbol{\psi}(t))\boldsymbol{\psi}'(t))\, dt$$

であるが、一般に $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^2$, $A \in \mathbf{R}^{2\times 3}$, $\boldsymbol{u} \in \mathbf{R}^3$ に対して、$\boldsymbol{x} \cdot (A\boldsymbol{u}) = (A\boldsymbol{u})^T\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{u}^T A^T)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u}^T\left(A^T\boldsymbol{x}\right) = (A^T\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{u}$ が成り立つから、

$$\int_\Gamma \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{dr} = \int_a^b \left[\boldsymbol{\varphi}'(\boldsymbol{\psi}(t))^T \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\psi}(t)))\right] \cdot \boldsymbol{\psi}'(t) dt. \tag{3.11}$$

$\boldsymbol{\varphi}^{-1}(V)$ 上のベクトル場 $\widetilde{\boldsymbol{f}}$ を

$$\widetilde{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{u}) := \boldsymbol{\varphi}'(\boldsymbol{u})^T \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{u})) \quad (\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{\varphi}^{-1}(V))$$

により定義できる。これを $\boldsymbol{\varphi}$ による $\boldsymbol{f}$ の引き戻しとよぶことがある。

この $\widetilde{\boldsymbol{f}}$ を用いると (3.11) は次のように書き直せる。

$$\int_\Gamma \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{dr} = \int_\gamma \widetilde{\boldsymbol{f}} \cdot \boldsymbol{dr}.$$

さらに (すぐ後で確かめるように)

$$\operatorname{rot} \widetilde{\boldsymbol{f}} = (\operatorname{rot} \boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{\varphi}) \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial v}\right) \tag{3.12}$$

が成り立つ。ゆえに

$$\begin{aligned}\int_S \operatorname{rot} \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}\,dS &= \iint_D \operatorname{rot}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\varphi}(u,v))\cdot\left(\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial u}\times\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial v}\right)du\,dv = \iint_D \operatorname{rot}\widetilde{\boldsymbol{f}}(u,v)\,du\,dv\\ &= \int_{\partial D}\widetilde{\boldsymbol{f}}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{\partial S}\boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r}.\end{aligned}$$

さて (3.12) の証明であるが、これは単なる計算である[15]。

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\widetilde{\boldsymbol{f}} &= \frac{\partial\widetilde{f}_2}{\partial u}-\frac{\partial\widetilde{f}_1}{\partial v}\\ &= \frac{\partial}{\partial u}\left(\sum_{i=1}^3 f_i(\boldsymbol{\varphi}(u,v))\frac{\partial\varphi_i}{\partial v}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(\sum_{i=1}^3 f_i(\boldsymbol{\varphi}(u,v))\frac{\partial\varphi_i}{\partial u}\right)\\ &= \sum_{i=1}^3 f_i(\boldsymbol{\varphi}(u,v))\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial u\partial v}+\sum_{i,j}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\frac{\partial\varphi_j}{\partial u}\frac{\partial\varphi_i}{\partial v}-\sum_{i=1}^3 f_i(\boldsymbol{\varphi}(u,v))\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial v\partial u}-\sum_{i,j}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\frac{\partial\varphi_j}{\partial v}\frac{\partial\varphi_i}{\partial u}\\ &= \sum_{i\neq j}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{\varphi}(u,v))\left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial u}\frac{\partial\varphi_i}{\partial v}-\frac{\partial\varphi_j}{\partial v}\frac{\partial\varphi_i}{\partial u}\right)\\ &= \sum_{(i,j)=(1,2),(2,3),(3,1)}\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\boldsymbol{\varphi}(u,v))-\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{\varphi}(u,v))\right)\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial u}\frac{\partial\varphi_j}{\partial v}-\frac{\partial\varphi_j}{\partial u}\frac{\partial\varphi_i}{\partial v}\right)\\ &= (\operatorname{rot}\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{\varphi})\cdot\left(\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial u}\times\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial v}\right).\blacksquare\end{aligned}$$

例 3.5.1 (Faraday の電磁誘導の法則の微分形と積分形の同値性) (工事中) Maxwell の方程式の一つである

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$$

は Faraday の電磁誘導の法則の微分形ともよばれる。これに対して

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int_S \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = \int_{\partial S}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r}$$

を積分形とよぶ。Stokes の定理を用いると両者の同値性が導ける。■

例 3.5.2 (準備中 — 流体の例を持ち出して、なるべくイメージ豊かに回転の直観的意味を説明したい。)

[15]もう少し見通しが良くならないか⋯

付 録A　本文で略した事実の証明

A.1 一方向について縦線集合である領域における Green の定理

定理 A.1.1 (y **軸方向に縦線集合である領域での Green の定理)** $\mathbf{R}^2$ の領域 D が

$$D = \{(x,y); x \in (a,b),\ \varphi_1(x) < y < \varphi_2(x)\}$$

と表されるとする。ここで φ_j は $[a,b]$ 上定義された区分的に C^1-級の関数で、

$$\forall x \in (a,b) \quad \varphi_1(x) < \varphi_2(x)$$

を満たすとする。このとき、D の閉包で定義された C^1-級の実数値関数 P, Q に対して

$$\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

が成り立つ。ただし C は次で定義される C_1, C_2, C_3, C_4 を結んで出来る閉曲線とする。

$$C_1 : \boldsymbol{r} = (t, \varphi_1(t))^T \quad (t \in [a,b]), \qquad C_2 : \boldsymbol{r} = (b,t)^T \quad (t \in [\varphi_1(b), \varphi_2(b)]),$$
$$-C_3 : \boldsymbol{r} = (t, \varphi_2(t))^T \quad (t \in [a,b]), \qquad -C_4 : \boldsymbol{r} = (a,t)^T \quad (t \in [\varphi_1(a), \varphi_2(a)]).$$

証明　以下の内容は杉浦 [9] による。まず定理 2.4.2 の証明と同様にして、

$$\iint_D \left(-\frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_C P(x,y)\,dx$$

が得られる。

今

$$F(x,u,v) := \int_u^v Q(x,y)\,dy$$

とおくと、

$$F_x(x,u,v) = \int_u^v \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\,dy, \quad F_u(x,u,v) = -Q(x,u), \quad F_v(x,u,v) = Q(x,v)$$

が成り立つので、

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} Q(x,y)\,dy\right) \\
&\quad = \frac{d}{dx}\left(F(x,\varphi_1(x),\varphi_2(x))\right) \\
&\quad = F_x(x,\varphi_1(x),\varphi_2(x)) + F_u(x,\varphi_1(x),\varphi_2(x))\varphi_1'(x) + F_v(x,\varphi_1(x),\varphi_2(x))\varphi_2'(x) \\
&\quad = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\,dy - Q(x,\varphi_1(x))\varphi_1'(x) + Q(x,\varphi_2(x))\varphi_2'(x).
\end{aligned}
$$

移項して、x について $[a,b]$ で積分すると、

$$
\begin{aligned}
&\int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\,dy\right) dx \\
&\quad = \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} Q(x,y)\,dy\right]_{x=a}^{x=b} + \int_a^b Q(x,\varphi_1(x))\varphi_1'(x)\,dx - \int_a^b Q(x,\varphi_2(x))\varphi_2'(x)\,dx \\
&\quad = \int_{\varphi_1(b)}^{\varphi_2(b)} Q(b,y)\,dy - \int_{\varphi_1(a)}^{\varphi_2(a)} Q(a,y)\,dy + \int_a^b Q(x,\varphi_1(x))\varphi_1'(x)\,dx \\
&\quad - \int_a^b Q(x,\varphi_2(x))\varphi_2'(x)\,dx.
\end{aligned}
$$

この右辺が

$$
\int_{C_2} Q(x,y)\,dy + \int_{C_4} Q(x,y)\,dy + \int_{C_1} Q(x,y)\,dy + \int_{C_3} Q(x,y)\,dy = \int_C Q(x,y)\,dy
$$

に等しいことを示せば証明は完了する。

曲線 C_2 は $\boldsymbol{r} = (b,t)^T$, $t \in [\varphi_1(b),\varphi_2(b)]$ と表せるので、$dx/dt = 0$, $dy/dt = 1$ で、

$$
\int_{C_2} Q(x,y)\,dy = \int_{\varphi_1(b)}^{\varphi_2(b)} Q(b,t)\cdot 1\,dt = \int_{\varphi_1(b)}^{\varphi_2(b)} Q(b,y)\,dy.
$$

同様にして

$$
\int_{C_4} Q(x,y)\,dy = -\int_{\varphi_1(a)}^{\varphi_2(a)} Q(a,y)\,dy.
$$

一方、曲線 C_1 は $\boldsymbol{r} = (t,\varphi_1(t))^T$, $t \in [a,b]$ と表せるので、$dx/dt = 1$, $dy/dt = \varphi'(t)$ で、

$$
\int_{C_1} Q(x,y)\,dy = \int_a^b Q(t,\varphi_1(t))\cdot\varphi_1'(t)\,dt = \int_a^b Q(x,\varphi_1(x))\varphi_1'(x)\,dx.
$$

同様にして

$$
\int_{C_2} Q(x,y)\,dy = -\int_a^b Q(x,\varphi_2(x))\varphi_2'(x)\,dx
$$

が得られる。以上の 4 つの式を辺々加えれば求める等式を得る。 ■

余談 A.1.1 (Green の定理の仮定を緩める) 上では P, $Q \in C^1$ としたが、Q_x, P_y が存在して $Q_x - P_y$ が連続とするだけでよい (**Goursat-Bochner の定理**)。これは一松先生の本には大抵書いてある。 ■

A.2　縦線集合である領域における Gauss の定理

一般性の高い (条件が緩い) Gauss の定理は、証明はもちろん定理を述べること自体がこの講義のレベルでは無理である。参考書としては、やはり杉浦 [9] をあげておく。

ここでは簡単のため、Green の定理でやったように、三方向 (x, y, z 軸方向) に縦線集合であるような滑らかな領域に限って Gauss の定理を述べて証明することにする。

補題 A.2.1 D は $\mathbf{R}^2$ 内の有界領域で、その境界は区分的 C^1-級 Jordan 閉曲線 C であるとする。ただし C の向きは、C 上の各点において進行方向の左側に D を見るようになっているとする。φ_1, φ_2 は $\overline{D}$ を含む開集合で定義された C^1-級の関数で、$\varphi_1 < \varphi_2$ (on D) をみたすものとして、

$$\Omega := \{(x,y,z); (x,y) \in D,\ \varphi_1(x,y) < z < \varphi_2(x,y)\}$$

とおく。このとき $\overline{\Omega}$ を含む開集合で定義された C^1-級の任意の関数 f に対して、$\boldsymbol{f} := (0,0,f)^T$ とおくと、

$$\text{(A.1)} \qquad \iiint_\Omega \frac{\partial f}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \int_S \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}\,dS \quad \left(= \int_S f\,dx\wedge dy\right).$$

ただし $\displaystyle\int_S \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$ は、以下に定義する 3 つの曲面 S_T, S_B, S_S 上の面積分の和とする。

(i) S_T は $\boldsymbol{\varphi}(u,v) := (u,v,\varphi_2(u,v))^T$ $((u,v)\in D)$ で定義されるパラメーター曲面とする。

(ii) S_B は、その裏返し $-S_B$ を $\boldsymbol{\varphi}(u,v) := (u,v,\varphi_1(u,v))^T$ $((u,v)\in D)$ で定義する。

(iii) S_S は、C を $\boldsymbol{r} = (\xi(t),\eta(t))^T$ $(t\in[a,b])$ とするとき、$\boldsymbol{\varphi}(t,s) := (\xi(t),\eta(t),s)$ $((t,s)\in \{(t,s); t\in[a,b],\ \varphi_1(\xi(t),\eta(t)) \le s \le \varphi_2(\xi(t),\eta(t))\})$ で定義されるパラメーター曲面とする。

証明　D は縦線集合であるから、

$$\begin{aligned}\iiint_\Omega \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\,dx\,dy\,dz &= \iint_D \left(\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\,dz\right)dx\,dy \\ &= \iint_D f(x,y,\varphi_2(x,y))\,dx\,dy - \iint_D f(x,y,\varphi_1(x,y))\,dx\,dy.\end{aligned}$$

S_T では

$$\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial u}\times\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial v} = \left(-\frac{\partial\varphi_2}{\partial u}, -\frac{\partial\varphi_2}{\partial v}, 1\right)^T$$

であるから、$\boldsymbol{f}\cdot\left(\dfrac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial u}\times\dfrac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial v}\right) = f(u,v,\varphi_2(u,v))$. ゆえに

$$\int_{S_T} \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = \iint_D f(u,v,\varphi_2(u,v))\,du\,dv.$$

同様に $-S_B$ では、$\boldsymbol{f}\cdot\left(\dfrac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial u}\times\dfrac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial v}\right)=f(u,v,\varphi_1(u,v))$ であるから、

$$\int_{-S_B}\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}\,dS=\iint_D f(u,v,\varphi_1(u,v))\,du\,dv.$$

S_S では

$$\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial t}\times\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial s}=\begin{pmatrix}\xi'(t)\\ \eta'(t)\\ 0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\eta'(t)\\ -\xi'(t)\\ 0\end{pmatrix}$$

であるから、$\boldsymbol{f}\cdot\left(\dfrac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial t}\times\dfrac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial s}\right)=0$. ゆえに

$$\int_{S_S}\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}\,dS=0.$$

以上より

$$\begin{aligned}\iiint_\Omega\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\,dx\,dy\,dz &= \iint_D f(u,v,\varphi_2(u,v))\,du\,dv-\iint_D f(u,v,\varphi_1(u,v))\,du\,dv+0\\ &= \int_{S_T}\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}\,dS-\int_{-S_B}\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}\,dS+\int_{S_S}\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}\,dS\\ &= \int_{S_T}\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}\,dS+\int_{S_B}\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}\,dS+\int_{S_S}\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}\,dS.\blacksquare\end{aligned}$$

この補題の条件をみたす Ω を「z 方向に縦線集合である滑らかな領域」と呼ぶことにする。同様にして x 方向, y 方向に縦線集合である滑らかな領域が定義できる。x 方向、y 方向、z 方向のいずれにも縦線集合である滑らかな領域 Ω に対しては

$$\iiint_\Omega\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial h}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz=\int_S f\ dy\wedge dz+g\ dz\wedge dx+h\ dx\wedge dy.$$

$\boldsymbol{f}:=(f,g,h)^T$ とおくと、

$$\iiint_\Omega \operatorname{div}\boldsymbol{f}\ dx\,dy\,dz=\int_S\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$$

が得られる。

余談 A.2.1 …証明を読み切るのが大変であることには我慢するにしても、十分な一般性がある定理を厳密かつ明瞭に証明している本は非常に少ない、というのが筆者の率直な感想である。コンパクトに書いてあるものは、大抵 (筆者の経験上はすべて) の場合に筆者には埋められない穴が見つかる。かの Bourbaki が有名な数学原論を書き始めた動機だとされている「“Stokes の定理” の満足行く証明を書く」ことは今もって教科書執筆者達の大きな課題であると思う。

筆者が信じている数学書の法則「証明と証明の所在のどちらも書いていない定理は間違っている」を適用すると、Gauss の定理の記述そのものが不完全な本が多いということになる。ずいぶん悲観的なことを書くようで気が引けるので、まったく根拠のないことを言っているわ

けではないことを分かってもらうために[1]、手近な例を一つ引こう。例えば上にあげた補題の元ネタでは φ_1, φ_2 は連続としか書いていなかった。それでは面積分の定義すらできないのでは？…$\boldsymbol{f} \cdot \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial v} \right)$ の計算結果 $f(u, v, \varphi_j(u, v))$ そのものに φ_j の導関数は現れないから、φ_j の微分可能性は不要のように見えるかも知れないが…変でしょう？ ■

[1]間違いをあげて本を非難することが目的ではないので、どの本であるかは書かない。

参考書案内

2 年生ともなれば、一冊の本を独力で読むことにチャレンジしてはどうだろうか。初めてベクトル解析を読む人の独習書としては、小林 [4] を奨めたい。ただし計算問題の解き方が載っているわけではない。

筆者自身はベクトル解析を電磁気の講義で学んだ。その際に参考書に指定されて以来お世話になっているファインマン他 [15] は非常に良い本であると思う。数学書ではないが数学科の学生にもお勧め。もちろん古典的なベクトル解析の流儀で書かれている。

志賀 [7] は幾何学者が書いただけあって、外微分形式の微積分としてのベクトル解析を解説した本になっている。共変テンソル場としての外微分形式のていねいな説明は出色である。ベクトル解析の計算をばりばりこなせるようになるぞ、という目的で読む本ではないが、お奨めできる (ただし、どちらかというと、少し地力のついた 3 年生以上向けかもしれない)。

小松 [6] は珍しく解析学者の書いたベクトル解析の本である。歴史や、色々な分野への応用について言及され、また気になる人はとても気になるような事項の説明が満載であり、面白くためになる。ベクトル解析について展望を得たい、という人は必読と言ってよい。

岩堀 [1] は、今となっては記号が古かったり ($dx \wedge dy$ でなく $[dx, dy]$ と書くとか…これは Cartan の流儀らしいが) するが、変に抽象が過ぎるところがなく、良い本である。力学への応用に相当なページを割いてあるのが今となっては一つの特徴となっているかもしれない。参考になる。

関連図書

[1] 岩掘 長慶, ベクトル解析 — 力学の理解のために —, 裳華房 (1960).

[2] 太田 浩一, マクスウェルの渦 アインシュタインの時計, 現代物理学の源流, 東京大学出版会 (2005)。

[3] 岡本 久, 知られざるグリーン, 数学セミナー, 2003 年 7 月号, 45–49.

[4] 小林 昭七, 続　微分積分読本 — 多変数 — 第 2 版, 裳華房 (2002),

[5] 小林 亮(りょう)・高橋 大輔, ベクトル解析入門, 東京大学出版会 (2003).

[6] 小松 彦三郎, ベクトル解析と多様体 I, II, 岩波講座 応用数学, 岩波書店 (1994, 1995).

[7] 志賀 浩二, ベクトル解析 30 講, 朝倉書店 (1990).

[8] 杉浦 光夫, 解析入門 I, 東京大学出版会 (1980).

[9] 杉浦 光夫, 解析入門 II, 東京大学出版会 (1985).

[10] マイケル・スピヴァック, 多変数解析学, 東京図書 (1972).

[11] 中尾 愼宏(みつひろ), 微分積分学, 近代科学社 (1987).

[12] 一松 信, 解析学序説, 裳華房 ().

[13] 一松(ひとつまつ) 信(しん), 微分積分学入門第一〜四課, 近代科学社 (1989, 1990, 1990, 1991).
2 次元ベクトル解析は第三課、3 次元ベクトル解析は第四課で扱われている。

[14] 一松 信, ベクトル解析入門, 森北出版株式会社 (1997).

[15] ファインマン, レイトン, サンズ著, 宮島 龍興 訳, ファインマン物理学 III 電磁気学, 岩波書店 (1986).

[16] 深谷 賢治, 電磁場とベクトル解析, 岩波書店 (2004).

[17] 藤野清次, ヘブライ語の Nebel (竪琴) を語源に持つナブラ ∇ について, 情報処理学会 研究報告「人文科学とコンピュータ」, No.057 (2002).

[18] 溝畑 茂, 数学解析 (上, 下), 朝倉書店 (1976).

[19] 森田 茂之, 微分形式の幾何学, 岩波書店 (2005).

[20] Oliver Heaviside, Electromagnetic Theory, Vol.I, The Electrician, London, 1893.

[21] J.W.Gibbs and E.B.Wilson, Vector Analysis, Yale Univ.Press (1901).

[22] G.Green, An essay on the application of mathematical analysis to the theories of electricity and magnetism, 1828. — ノティンガムのブロムリーハウス図書館で私費出版された。W.Thomson によって 1840 年にクレレ・ジャーナルに再版される。

[23] J.C.Maxwell, A Treatise on Electricity and Magnetism, Clarendon Press (1873).

[24] Georges de Rham, Variétés Defférentiables, Hermann, Paris (1955, 1960).
G. ド・ラーム著, 高橋恒郎訳, 微分多様体: 微分形式・カレント・調和形式, 東京図書 (1974).

付 録B　細かな補足

B.1　区分的に C^k-級

「区分的に C^k-級」という言葉は良く出て来るが、正確な説明をさぼられることも多い。この解析概論 II では「$\boldsymbol{\varphi}\colon [a,b] \to \mathbf{R}^n$ が区分的 C^k-級の曲線」という形で登場する。この場合、「曲線」という言葉の中に「連続」という条件が含まれているので、

$$\exists \ell \in \mathbf{N}, \exists \{t_j\}_{j=0}^{\ell} \quad \text{s.t.} \quad \forall j \in \{1,2,\dots,\ell\} \quad \boldsymbol{\varphi}|_{[t_{j-1},t_j]} \in C^k([t_{j-1},t_j])$$

と簡潔に説明できる。

ここでは念のため、連続とは限らない場合にも通用する定義を書いておく。

定義 B.1.1 k は 0 以上の整数または ∞ を表すとする。$I=[a,b]$, $\boldsymbol{\varphi}\colon I \to \mathbf{R}^n$ とするとき、φ が I で**区分的に C^k-級**であるとは、

$$\exists \ell \in \mathbf{N}, \exists \{t_j\}_{j=1}^{\ell} \quad \text{s.t.} \quad \begin{cases} a = t_0 < t_1 < \cdots < t_\ell = b \\ \boldsymbol{\varphi}|_{[t_{j-1},t_j]} \text{ は } C^k \text{ 級} \\ i=0,1,\dots,k \text{ について } \displaystyle\lim_{t\to t_{j-1}+0} \boldsymbol{\varphi}^{(i)}(t) \text{ と } \lim_{t\to t_{j-1}+0} \boldsymbol{\varphi}^{(i)}(t) \text{ が存在} \end{cases}$$

あるいは $j=1,2,\dots,\ell$ を $\boldsymbol{\varphi}_j$ を

$$\boldsymbol{\varphi}_j(t) := \begin{cases} \boldsymbol{\varphi}(t) & (t \in (t_{j-1},t_j)) \\ \boldsymbol{\varphi}(t_{j-1}+0) & (t = t_{j-1}) \\ \boldsymbol{\varphi}(t_j-0) & (t = t_{j-1}) \end{cases}$$

で定めるとき $\boldsymbol{\varphi}_j \in C^k([t_{j-1},t_j])$ と言っても同じことである。

注意 B.1.1

- 上の定義の中の φ が I で連続であるときは、$\varphi_j := \boldsymbol{\varphi}|_{[t_{j-1},t_j]}$ となる。
- 一般に $\boldsymbol{\varphi}(a+0)$, $\boldsymbol{\varphi}(b-0)$ はそれぞれ $\displaystyle\lim_{x\to a+0}\boldsymbol{\varphi}(x)$, $\displaystyle\lim_{x\to b-0}\boldsymbol{\varphi}(x)$) を表す記号である。
- 区間の端点で微分可能というときは片側微分係数を考えている。例えば $\boldsymbol{\varphi}\colon [a,b] \to \mathbf{R}^n$ に対して $\boldsymbol{\varphi}'(a)$, $\boldsymbol{\varphi}'(b)$ は

$$\boldsymbol{\varphi}'(a) = \lim_{h\to+0} \frac{\boldsymbol{\varphi}(a+h)-\boldsymbol{\varphi}(a)}{h}, \quad \boldsymbol{\varphi}'(b) = \lim_{h\to-0} \frac{\boldsymbol{\varphi}(b+h)-\boldsymbol{\varphi}(b)}{h}$$

  で定義される。高階の微分についても同様である

- 上の定義中の言い換えは次の補題により正当化される。

補題 B.1.1 $\boldsymbol{\varphi}\colon [a,b] \to \mathbf{R}^n$ が $c \in [a,b]$ を除いて微分可能で、

$$\lim_{t\to c} \boldsymbol{\varphi}'(t) = A$$

が存在するならば、$\boldsymbol{\varphi}$ は c でも微分可能で

$$\boldsymbol{\varphi}'(c) = A.$$

証明 $n=1$ としてよい。平均値の定理より、$c+h \in [a,b]$ となるような任意の $h \neq 0$ に対して、c と $c+h$ の間にある ξ_h が存在して、

$$\frac{\boldsymbol{\varphi}(c+h) - \boldsymbol{\varphi}(c)}{h} = \boldsymbol{\varphi}'(\xi_h).$$

$h \to 0$ とするとき、$\xi_h \to c$ であるから、補題の仮定より右辺は A に収束する。ゆえに $\boldsymbol{\varphi}$ は c で微分可能で

$$\boldsymbol{\varphi}'(c) = A. \blacksquare$$

系 B.1.1 $\boldsymbol{\varphi}\colon [a,b] \to \mathbf{R}^n$ が $[a,b]$ で $k-1$ 回微分可能で、$c \in [a,b]$ を除いて k 回微分可能かつ

$$\lim_{t\to c} \boldsymbol{\varphi}^{(k)}(t) = A$$

が存在するならば、$\boldsymbol{\varphi}^{(k-1)}$ は c でも微分可能で

$$\boldsymbol{\varphi}^{(k)}(c) = A.$$

B.2 曲線のいろは

$\mathbf{R}$ の有界閉区間 $I = [a,b]$ から $\mathbf{R}^n$ への連続写像 $\boldsymbol{\varphi}\colon I \to \mathbf{R}^n$ のことを $\mathbf{R}^n$ 内の (連続) **曲線**という。曲線のことをしばしば C や γ などの文字 1 つで表すことが多い。以下しばらく曲線 $\boldsymbol{\varphi}\colon [a,b] \to \mathbf{R}^n$ を C と表す。

これを「曲線 C: $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\varphi}(t)$ $(t \in [a,b])$」のように書くことも多い。

$\boldsymbol{\varphi}$ が C^k-級の写像であるとき、C は C^k-級の曲線であるという $(0 \le k \le \infty)$。

ここでいう「曲線」は図形 ($\mathbf{R}^n$ の部分集合) でなく、写像であることに注意する。$\mathbf{R}^n$ 内の部分集合 $\boldsymbol{\varphi}(I) = \{\boldsymbol{\varphi}(t); t \in I\}$ を曲線 C の**像**という。

$\boldsymbol{\varphi}(a)$ を曲線 C の**始点**、$\boldsymbol{\varphi}(b)$ を曲線 C の**終点**、両方合わせて曲線 C の**端点**という。

曲線 C の始点と終点が一致する ($\boldsymbol{\varphi}(a) = \boldsymbol{\varphi}(b)$) とき、$C$ は**閉曲線** (**closed curve**) であるという。

$[-b,-a] \ni t \longmapsto \boldsymbol{\varphi}(-t)$ も $\mathbf{R}^n$ 内の曲線であるが、これを C を**逆向きにした曲線**とよび、$-C$ で表す。

曲線 C_1: $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\varphi_1}(t)$ $(t \in [a_1,b_1])$ の終点と曲線 C_2: $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\varphi_2}(t)$ $(t \in [a_2,b_2])$ の始点が一致す

るとき、

$$\boldsymbol{\varphi}(t) := \begin{cases} \boldsymbol{\varphi}_1(t) & (t \in [a_1, b_1]) \\ \boldsymbol{\varphi}_2(a_2 + (t - b_1)) & (t \in [b_1, b_1 + b_2 - a_2]) \end{cases}$$

で $\mathbf{R}^n$ 内の曲線が得られる。これを C_1 に C_2 を**つないだ曲線**とよび、$C_1 + C_2$ で表す。

連続写像 $\boldsymbol{\varphi}\colon [a, b] \to \mathbf{R}^n$ が**区分的に C^1-級**であるとは、

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = b$$

を満たす $\{t_j\}_{j=0}^N$ で、$\boldsymbol{\varphi}$ の各小区間 $[t_{j-1}, t_j]$ への制限 $\boldsymbol{\varphi}_j := \boldsymbol{\varphi}|_{[t_{j-1}, t_j]}$ が C^1-級、すなわち $\forall t \in [t_{j-1}, t_j]$ に対して $\boldsymbol{\varphi}_j'(t)$ が存在し[1]、$[t_{j-1}, t_j] \ni t \mapsto \boldsymbol{\varphi}_j'(t)$ が連続であることをいう。

曲線 $C : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{\varphi}(t)$ $(t \in [a, b])$ が区分的に C^1-級であるとは、写像 $\boldsymbol{\varphi}\colon [a, b] \to \mathbf{R}^n$ が連続かつ区分的に C^1-級であることを意味する (曲線の定義の中に $\boldsymbol{\varphi}$ の連続性が含まれていることに注意せよ)。

I のすべての分割を $\mathcal{D}(I)$ と書くことにする。

$$L(C) := \sup_{\Delta = \{t_j\}_{j=0}^{\ell} \in \mathcal{D}(I)} \sum_{j=1}^{\ell} \|\boldsymbol{\varphi}(t_j) - \boldsymbol{\varphi}(t_{j-1})\|$$

が有限のとき、C が**長さを持つ** (rectifiable) といい、$L(C)$ を C の**長さ**という。

B.3 連結性

連結性についてはあちこちで学んでいるであろう。「常識」をいくつか並べておく。

- 位相空間 X が連結であるとは、X の開集合の組 U_1, U_2 で $X = U_1 \cup U_2$ かつ $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ を満たすものは $U_1 = X, U_2 = \emptyset$ か、$U_1 = \emptyset, U_2 = X$ のいずれかに限られることをいう。
- 位相空間 X が弧連結であるとは、X 内の任意の二点が X 内の連続曲線で結べる ($\forall x, y \in X$, $\exists \varphi\colon [0, 1] \to X$ s.t. φ は連続かつ $\varphi(0) = x$, $\varphi(1) = y$) ことをいう。
- $\mathbf{R}$ の部分集合 I が連結であるための必要十分条件は I が区間であることである。
- 連結な位相空間の連続写像による像は連結である。弧連結な位相空間の連続写像による像は弧連結である。
- 弧連結な空間は連結である。
- 連結かつ局所弧連結な空間は弧連結である。特に $\mathbf{R}^n$ の連結な開集合は弧連結である。

さて、この解析概論 II では次の命題を用いている。

命題 B.3.1 $\mathbf{R}^n$ の連結な開集合の任意の二点は <u>区分的に C^1 級の</u> 曲線で結べる。

[1] もちろん、$\boldsymbol{\varphi}_j'(t_{j-1})$ は左側微分係数、$\boldsymbol{\varphi}_j'(t_j)$ は右側微分係数を表す。

これは上に掲げた「常識」の中に入っていないが (位相空間論の本にも書かれていないことが多い)、「連結かつ局所弧連結ならば弧連結」という定理の証明を眺めれば簡単に解決する。ここではその $\mathbf{R}^n$ の開集合バージョンを述べよう。

命題 B.3.2 Ω を $\mathbf{R}^n$ の連結な開集合とするとき、Ω 内の任意の 2 点 a, b は Ω 内の曲線で結ぶことができる。

証明

$$\Omega_0 := \{x \in \Omega; a \text{ と } x \text{ は } \Omega \text{ 内の曲線で結べる}\},$$

$$\Omega_1 := \{x \in \Omega; a \text{ と } x \text{ は } \Omega \text{ 内の曲線で結べない}\}$$

とおくと、明らかに

$$\Omega_0 \cup \Omega_1 = \Omega, \quad \Omega_0 \cap \Omega_1 = \emptyset, \quad a \in \Omega_0.$$

実は Ω_0 は開集合である。実際、任意の $x \in \Omega_0$ に対して、$x \in \Omega$ かつ Ω は開集合であるから、

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \text{s.t.} \quad B(x; \varepsilon) \subset \Omega.$$

$B(x;\varepsilon)$ 内の任意の点 y は x と結べるので、a とも結ぶことができる (a と x を結ぶ曲線に x と y を結ぶ曲線をつなげばよい)。ゆえに $y \in \Omega_0$. すなわち $B(x;\varepsilon) \subset \Omega_0$ であるから、Ω_0 は開集合である。

同様にして Ω_1 が開集合である。実際、任意の $x \in \Omega_1$ に対して、$x \in \Omega$ かつ Ω は開集合であるから、

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \text{s.t.} \quad B(x; \varepsilon) \subset \Omega.$$

$B(x;\varepsilon)$ 内の任意の点 y は x と結べるので、a とは結ぶことができない (もし y と a が結べれば、その曲線を y と x を結ぶ曲線につないで a と x を結べることになり矛盾する)。ゆえに $y \in \Omega_1$. すなわち $B(x;\varepsilon) \subset \Omega_1$ であるから、Ω_1 は開集合である。

Ω が連結であるから、$\Omega_0 = \Omega$ かつ $\Omega_1 = \emptyset$. ゆえに a は Ω 内の任意の点と結ぶことができる。■

この証明で「Ω 内の曲線」というところを、「Ω 内の C^1-級の曲線」、「Ω 内の区分的に C^1-級の曲線」、「Ω 内の正則な C^1-級の曲線」、「Ω 内の座標軸に平行な線分からなる折線」などで置き換えても証明はまったくそのまま通用する (開球 $B(x;\varepsilon)$ 内の任意の点はその中心と良い性質を持った曲線で結べることにもとづいている)。

B.4 単連結性

定義 B.4.1 位相空間 X が**単連結** (**simply connected**) であるとは、任意の連続閉曲線 $\varphi\colon I=[a,b]\to X$ (つまり $\varphi(a)=\varphi(b)$) に対して、次の条件を満たす連続写像 $\Phi\colon I\times[0,1]\to X$ が存在することをいう。

(i) $\Phi(\cdot,0)=\varphi$. すなわち

$$\forall t\in[a,b]\quad \Phi(t,0)=\varphi(t).$$

(ii) $\forall s\in[0,1]$ に対して $\Phi(\cdot,s)$ は閉曲線である。すなわち

$$\forall s\in[0,1]\quad \Phi(a,s)=\Phi(b,s).$$

(iii) $\Phi(\cdot,1)$ は定数写像 (像が 1 点である曲線) である。すなわち

$$\forall t\in[a,b]\quad \Phi(t,1)=\Phi(a,1).$$

注意 B.4.1 この定義で φ の定義域を単位区間 $[0,1]$ に限定しても同じことである。 ■

余談 B.4.1 (いくつかの言い換え)

- 基本群を学んだ人へ: 任意に $a\in\Omega$ を固定したとき、基本群 $\pi_1(\Omega,a)$ が単位元のみからなっていることと、Ω が単連結であることは同値である。
- $\mathbf{R}^2$ の領域 Ω については、Ω が単連結であることと、$\mathbf{R}^2\setminus\Omega$ が compact な連結成分 (直感的には「穴」) を持たないことは同値である。 ■

$\mathbf{R}^2$ の領域 (連結開集合) の単連結性については、多くの複素関数論の教科書に述べられている。

B.5 Jordan の曲線定理

初等的な数学において、**Jordan の曲線定理** (Jordan curve theorem) の占める位置はどうもしっくり来ないと感じている。「常識である」という空気もある一方で、講義で証明されることが実質的になく、岩波数学辞典に書かれている形の定理 (後述) の証明を探すのも結構面倒である。一方で「要らない」という人もいる (複素関数論で有名なアールフォースの教科書の中でそう断言されている)。

Jordan の曲線定理 (岩波数学辞典からの引用)

平面 $\mathbf{R}^2$ 内の任意の Jordan 閉曲線 C は、$\mathbf{R}^2$ を内と外の二つの領域に分ける。詳しく言えば、$\mathbf{R}^2\setminus C$ はちょうど二つの領域 Ω_1, Ω_2 の直和:

$$\mathbf{R}^2\setminus C=\Omega_1\cup\Omega_2,\quad \Omega_1\cap\Omega_2=\emptyset$$

となり、C は Ω_1, Ω_2 の共通の境界、Ω_i の一方は有界、他方は非有界、となる。なおこのとき p を C の任意の一点とすれば、p を端点とする Jordan 曲線で、p 以外の部分は Ω_i に含まれるものが存在する $(i=1,2)$。

比較的入手が容易な本で、証明まで述べられている希少な本として

一樂 重雄、「位相幾何学」、朝倉書店 (1993)

を推薦しておく。■

(工事計画: 岩波数学辞典 p.534 から正確に引用すること)

上の定理で有界な方の領域を Jordan 閉曲線 C で囲まれる領域とよぶ。

領域 Ω が **Jordan 領域**であるとは、Jordan 閉曲線 C が存在して、Ω が C で囲まれる領域となることをいう。

Jordan 領域は単連結領域であるが逆は真でない (有名な反例がある)。

Jordan 領域でない単連結領域について、領域内部の点とは結べないような境界上の点が存在することがある (これも有名な反例がある)。

Jordan 領域は面積確定であるとは限らない。

Riemann の写像定理により、Jordan 領域は円盤領域と同相である。また Carathéodory の定理により、Jordan 領域の閉包は閉円盤と同相である。

Jordan の曲線定理の高次元版の紹介も。

付 録C　単連結領域におけるポテンシャルの存在

ベクトル場 $\boldsymbol{f}$ がポテンシャルを持つための必要条件

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}=\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\quad \text{in } \Omega \quad (i,j=1,2,\dots,n) \tag{C.1}$$

が単連結領域では十分条件になることの正しい証明を与える。

ここの議論は小松 [6] の第 2 章 5 節を参考にした。なお、杉浦 [9] には少し違った証明が載っている (折れ線上の線積分を持ち出す)。もっとも C.1 で証明する「球におけるポテンシャルの存在」がキーとなるのは同じで、本質的には同じ証明と言えるのかも知れない。暇があったら、その証明も収録しようと考えている。

C.1　ステップ 1: 球におけるポテンシャルの存在

まず球領域では (C.1) がポテンシャル存在のための十分条件であることを示す。

二通りの証明を与える。

C.1.1　証明 1: 区間の「辺」からなる折線に沿う線積分と積分定理を利用

球の中心と $\boldsymbol{x}$ を結ぶ曲線 $C_{\boldsymbol{x}}$ に対して

$$F(\boldsymbol{x}):=\int_{C_{\boldsymbol{x}}}\boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r}$$

とおく。ただし $C_{\boldsymbol{x}}$ を $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{x}$ を頂点とする $\mathbf{R}^n$ の閉区間 ($\displaystyle\prod_{j=1}^{n}[a_j,b_j]$ の形の集合) の「辺」を結んでできる折線に限定する。そう限定しても折線の取り方は複数あるが、その選び方によらずに線積分の値が定まることが、積分定理 (2 次元の場合は区間における Green の定理) から容易に証明できる[1]。

$\operatorname{grad} F=\boldsymbol{f}$ の証明は、本文中の定理 2.3.1 の証明と同様である。

ゆえに球においては、(C.1) はポテンシャルが存在するための十分条件である。

(上の証明のあらすじは小松 [6] に載っていたもので、そこでは 2 次元限定の話だったので、積分路としても選択肢が二つしかなく、積分定理とは言っても長方形上の Green の定理では

[1]積分定理を持ち出すのは大げさのようだが、何と言っても区間バージョンなので Fubini の定理によって自明に近い。

ぼ自明であるので、簡単明瞭であるが、多次元になると少し面倒に感じられる。そこで別証明を以下に示す。ぎょうぎょうしい計算だが、多次元になってもすっきりしている点は気持ちがよいと思う。)

C.1.2 証明 2: 球の中心と結んだ線分に沿う線積分を利用

やはり

$$F(\boldsymbol{x}) := \int_{C_{\boldsymbol{x}}} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r}$$

とおくが、$C_{\boldsymbol{x}}$ としては、

$$\boldsymbol{\varphi}(t) := \boldsymbol{a} + t(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) \quad (t \in [0,1])$$

を用いる。すると

$$F(\boldsymbol{x}) = \int_0^1 \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a} + t(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})\, dt = \sum_{j=1}^N (x_j - a_j) \int_0^1 f_j(\boldsymbol{a} + t(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}))dt.$$

積分記号下の微分と条件 (C.1) を用いると

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x_k}(\boldsymbol{x}) &= \sum_{j=1}^N \delta_{jk} \int_0^1 f_j(\boldsymbol{a} + t(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}))dy + \sum_{j=1}^N (x_j - a_j) \int_0^1 \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(\boldsymbol{a} + t(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})) \cdot t\, dt \\
&= \int_0^1 f_k(\boldsymbol{a} + t(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}))dt + \sum_{j=1}^N (x_j - a_j) \int_0^1 \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(\boldsymbol{a} + t(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})) \cdot t\, dt.
\end{aligned}$$

この右辺第 2 項を合成関数の微分法と部分積分で変形すると

$$\begin{aligned}
\text{右辺第 2 項} &= \int_0^1 \frac{d}{dt}\left(f_k(\boldsymbol{a} + t(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}))\right) \cdot t\, dt \\
&= \left[f_k(\boldsymbol{a} + t(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})) \cdot t\right]_0^1 - \int_0^1 f_k(\boldsymbol{a} + t(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}))dt \\
&= f_k(\boldsymbol{x}) - \int_0^1 f_k(\boldsymbol{a} + t(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}))dt.
\end{aligned}$$

ゆえに

$$\frac{\partial F}{\partial x_k}(\boldsymbol{x}) = f_k(\boldsymbol{x}).\blacksquare$$

C.2 ステップ 2: 連続曲線に沿う線積分の導入

次のステップ 3 で、区分的 C^1-級とは限らない、ただの連続曲線に対して線積分を定義する必要が生じる。これについて準備しておこう。

$\mathbf{R}^n$ の開集合 Ω 上の条件 (C.1) を満たすベクトル場 $\boldsymbol{f}$ と、Ω 内の曲線 C: $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\varphi}(t)$ $(t \in I = [a,b])$ に対して、線積分 $\mathcal{L}(\boldsymbol{f}; C)$ を定義するのが目標である。ただし C が区分的に C^1-級の場合には、既に定義してあるものと一致する、すなわち

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{f}; C) = \int_C \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r}$$

が成り立つようにする。既に定義してあった線積分の性質の多くは保存される[2]。

Ω 内の曲線 C: $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{\varphi}(t)$ $(t\in I=[a,b])$ について、次の条件を考える。

$E(C)$

曲線 C が $E(C)$ を満たすとは、C の像 $\boldsymbol{\varphi}(I)$ を含む連結な開集合 U と、U で定義された C^1-級の関数 F で $\operatorname{grad} F=\boldsymbol{f}$ in U を満たすものが存在することをいう。

C が条件 $E(C)$ を満たすとき、$\boldsymbol{f}$ の C に沿った接線線積分を

(C.2)
$$\mathcal{L}(\boldsymbol{f};C):=F(\boldsymbol{\varphi}(b))-F(\boldsymbol{\varphi}(a))$$

で定める。この式の右辺が (U,F) の取り方によらずに定まることは以下のようにしてわかる。$(\widetilde{U},\widetilde{F})$ も同じ条件を満たす、すなわち $\widetilde{U}$ は $\varphi(I)$ を含む連結な開集合で、$\operatorname{grad}\widetilde{F}=\boldsymbol{f}$ in $\widetilde{U}$ が成り立つとする。このとき $U\cap\widetilde{U}$ で

$$\operatorname{grad}(F-\widetilde{F})=\operatorname{grad}F-\operatorname{grad}\widetilde{F}=\boldsymbol{f}-\boldsymbol{f}=0.$$

ゆえに $F-\widetilde{F}$ は $U\cap\widetilde{U}$ で定数となる。従って、

$$F(\boldsymbol{\varphi}(b))-F(\boldsymbol{\varphi}(a))=\widetilde{F}(\boldsymbol{\varphi}(b))-\widetilde{F}(\boldsymbol{\varphi}(a))$$

が成り立ち、(C.2) の右辺は (U,F) の選び方によらずに確定する。

C が条件 $E(C)$ を満たし、かつ区分的に C^1-級であるとき既に定義した接線線積分も考えられるが、両者は一致することが分かる。

次に C が条件 $E(C)$ を満たさない場合を考えよう。このとき次が成り立つ。

主張

C を $C=C_1+C_2+\cdots+C_N$ と分解して、各 C_j $(j=1,2,\ldots,N)$ が条件 $E(C_j)$ を満たすようにできる。

証明　曲線 C の像 $\boldsymbol{\varphi}(I)$ (これはコンパクト) と、Ω の補集合 $\mathbf{R}^n\setminus\Omega$ (これは閉集合) との距離を d とすると、$d>0$ である (共通部分のないコンパクト集合と閉集合の距離は真に正)。$\boldsymbol{\varphi}$ はコンパクト集合 I 上で連続だから一様連続である。それゆえ

$$\exists\delta>0\quad\text{s.t.}\quad(\forall t,t'\in I:|t-t'|\le\delta)\quad\|\boldsymbol{\varphi}(t)-\boldsymbol{\varphi}(t')\|<d.$$

I の分割 $\Delta=\{t_j\}_{j=0}^N$ を $|\Delta|<\delta$ を満たすようにとる。C_j を $\boldsymbol{\varphi}|_{[t_{j-1},t_j]}$ とし t,e $V_j:=B(\boldsymbol{\varphi}(t_{j-1});d)$ とおくと、$\boldsymbol{\varphi}([t_{j-1},t_j])\subset V_j\subset\Omega$ であるから、C_j の像は V_j に含まれ、V_j は連結な開集合、そしてステップ 1 で述べたことから、V_j で $\boldsymbol{f}$ のポテンシャル F_j が存在する。もちろん $C=\displaystyle\sum_{j=1}^N C_j$ である。(主張の証明終り)

C_j は $E(C_j)$ を満たすので、(C.2) によって線積分を定義する:

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{f};C_j)=F_j\left(\boldsymbol{\varphi}(t_j)\right)-F_j\left(\boldsymbol{\varphi}(t_{j-1})\right)\quad(j=1,2,\ldots,N).$$

[2]あぶなさそうに見える $\left|\displaystyle\int_C\boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r}\right|\le\int_C\|\boldsymbol{f}\|\,ds$ も、C が長さを持たない場合に右辺 $=\infty$ と解釈すれば大丈夫？

後は $C = C_1 + C_2 + \cdots + C_N$ であるから

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{f}; C) := \sum_{j=1}^{N} \mathcal{L}(\boldsymbol{f}; C_j) = \sum_{j=1}^{N} \left(F_j\left(\boldsymbol{\varphi}(t_j)\right) - F_j\left(\boldsymbol{\varphi}(t_{j-1})\right)\right) \tag{C.3}$$

と定義する (こうすれば曲線が区分的 C^1-級曲線であった場合に矛盾しない)。

この定義が意味を持つことを示すには、区間 I の分割の仕方によらずに (C.3) の右辺の値が定まることを確かめる必要がある。Δ_1, Δ_2 をともに $|\Delta_1| < \delta$, $|\Delta_2| < \delta$ を満たす分割とする。このとき $\widetilde{\Delta}$ を Δ_1, Δ_2 の共通の細分とするとき、Δ_i についての和が $\widetilde{\Delta}$ についての和に等しいことを示せば良いが、それは $\widetilde{\Delta}$ の各小区間の開近傍における局所的なポテンシャルとして、Δ_i の小区間の像の開近傍における局所的なポテンシャルが使えることに注意すればよい。

C.3 ステップ 3: 単連結領域におけるポテンシャルの存在

単連結領域 Ω におけるベクトル場 $\boldsymbol{f}$ が (C.1) を満たすと仮定する。Ω 内の任意の区分的に C^1-級の閉曲線 C に対して

$$\int_C \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r} = 0$$

が成り立つことを示せばよい。これが成り立たないと仮定しよう。曲線 C の定義域は $[0,1]$ としてよい。単連結性の仮定から次の条件 (i)–(iv) を満たす連続写像 $\Phi\colon [0,1] \times [0,1] \to \Omega$ が存在する。

(i) $\Phi(\cdot, 0) = \varphi$. すなわち

$$\forall t \in [0,1] \quad \Phi(t,0) = \varphi(t).$$

(ii) $\forall s \in [0,1]$ に対して $\Phi(\cdot, s)$ は閉曲線である。すなわち

$$\forall s \in [0,1] \quad \Phi(0,s) = \Phi(1,s).$$

(iii) $\Phi(\cdot, 1)$ は定数写像 (像が 1 点である曲線) である。すなわち

$$\forall t \in [0,1] \quad \Phi(t,1) = \Phi(a,1).$$

このとき曲線 $\widetilde{C}$ を

$$\boldsymbol{\psi}(r) := \begin{cases} \Phi(r,0) & (r \in [0,1]) \\ \Phi(1,r-1) & (r \in [1,2]) \\ \Phi(3-r,1) & (r \in [2,3]) \\ \Phi(0,4-r) & (r \in [3,4]) \end{cases}$$

で定めると、$\widetilde{C} = C + \gamma + 0 + (-\gamma)$ となる。ここで γ は

$$\boldsymbol{r} = \Phi(1,t) \quad (t \in [0,1])$$

で定まる曲線である。ゆえに

$$\begin{aligned}
\int_{\widetilde{C}} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r} &= \mathcal{L}(\boldsymbol{f}, C) = \mathcal{L}(\boldsymbol{f}, \widetilde{C}) + \mathcal{L}(\boldsymbol{f}, \gamma) + \mathcal{L}(\boldsymbol{f}, \Gamma) + \mathcal{L}(\boldsymbol{f}, -\gamma) \\
&= \mathcal{L}(\boldsymbol{f}, C) + \mathcal{L}(\boldsymbol{f}, \gamma) + 0 - \mathcal{L}(\boldsymbol{f}, \gamma) \\
&= \mathcal{L}(\boldsymbol{f}, C) = \int_C \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r} \neq 0.
\end{aligned}$$

Cauchy の積分定理の Goursat による証明 (高木貞治『解析概論』などを見よ) と同様にして、ts 平面で 2 次元の区間縮小法を行なうと、正方形 $[0,1] \times [0,1]$ 内の減少する正方形列 $\{S_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ で、

$$\exists \boldsymbol{a} \in [0,1] \times [0,1] \quad \text{s.t.} \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n = \{\boldsymbol{a}\},$$

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad \mathcal{L}(\boldsymbol{f}, C_n) \neq 0 \quad (C_n \text{ は } \Phi(\partial S_n) \text{ を正の向きに一周する曲線})$$

をみたすものが得られる。$\boldsymbol{a}$ を中心とする十分小さな半径の球を取ると、それは Ω に含まれる。十分大きな n を取ると $\Phi(S_n)$ はその球に含まれる。すると、その球におけるポテンシャル F を用いて

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{f}, C_n) = F(C_n \text{ の終点}) - F(C_n \text{ の始点}) = 0.$$

これは矛盾なので $\displaystyle\int_C \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r} = 0$ でなければならない。■

付 録D　細かいトピックス

以下、初めてベクトル解析を学ぶときは (理論の理解のために) 目を通す必要のない、しかしそれが必要な TPO においては非常に重要になる話をいくつかあげておく。

D.1　Green の公式

応用上頻出する重要な公式群であるが、解析概論 II の講義では省略する (必要になったときに学ぶという姿勢で十分である)。

定理 D.1.1 (Green の積分公式)

$$\iiint_\Omega (f \triangle g + \nabla f \cdot \nabla g)\,dx\,dy\,dz = \int_{\partial\Omega} f \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{n}}\,dS.$$

$$\iiint_\Omega (f \triangle g - g \triangle)\,dx\,dy\,dz = \int_{\partial\Omega} \left(f \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{n}} - g \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}} \right) dS.$$

$$\iiint_\Omega (f \triangle f + \|\nabla f\|^2)\,dx\,dy\,dz = \int_{\partial\Omega} f \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}\,dS$$

$$\iiint_\Omega \triangle f\;dx\,dy\,dz = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}\,dS.$$

普通は Gauss の発散定理を用いて導出する (Gauss の定理を認め、$\nabla f \cdot \boldsymbol{n} = \dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}$ に気が付けば簡単である)。念のため証明のありかを一つあげておこう。例えば

「応用解析 II 講義ノート」
`http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/lecture/ouyoukaiseki2/pde2004-long.pdf`

で説明してある。

D.2　Helmholtz の定理

$\mathbf{R}^3$ の任意の領域 Ω と Ω 上の C^∞-級ベクトル場 $\boldsymbol{f}$ に対して、

$$\triangle \boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$$

をみたすベクトル場 $\boldsymbol{u}$ が存在する。