解析概論II

第1部 (多変数関数の積分)

桂田 祐史

2005 年 12 月 6 日

序

この文書は明治大学数学科2年生後期の講義科目「解析概論II」の第1部 (内容としては多変数関数の Riemann 積分を扱う) の講義ノートである。

伝統的な微分積分学であるから、できれば市販の教科書で済ませたかったのであるが、多変数関数の積分は非常に重厚な説明を延々とされるか、(ページ数も少なく) ごくごく簡単に説明されるかのどちらかである場合が多く、残念ながら適当なものが見つけられなかったため[1]、教科書なしで講義を行っている。それを補う目的で講義ノートを公開・配布することにしている。

1変数関数の微積分のイロハと、解析概論I (多変数関数の微分法) の内容をマスターしていれば、他の本を参照しなくても済むようになっている (はずである)。

曲面積や面積分は第2部「ベクトル解析」に分類してある (この文書では取り扱っていない)。

この講義の内容を決める際に参考にした文献については、付録 C にあげてある。

この文書は電子版 (PDF) を

`http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/lecture/kaisekigairon-2/`

で公開してある。有効に利用してもらえれば幸いである。

多変数関数の微分法に関しては、少し古い開講年度の講義ノートになってしまうが

`http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/lecture/kaisekigairon-1/`

においてある文書が参考になるかもしれない。

[1]どうしてこうなっているかについての私の分析は、日本では多変数関数の微積分に割ける時間が短いから、である。欧米のテキストは、非常に厚いがゆったりとした感じで書かれていて、ちょっとうらやましい。なお、副読本に限れば和書でも色々あることをお断りしておく。

記号

複素数全体の集合、実数全体の集合、有理数全体の集合、整数全体の集合、自然数[2]全体の集合をそれぞれ $\mathbf{C}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{N}$ で表す。

以下 $\mathbf{R}^n$ と書いた場合、n は自然数であって、

$$\mathbf{R}^n = n \text{ 個の } \mathbf{R} \text{ の直積} = \{x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T; x_j \in \mathbf{R}\ (j = 1, 2, \ldots, n)\}$$

であるとする。

$x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbf{R}^n$ に対して、x のノルム $\|x\|$ を

$$\|x\| := \left(\sum_{j=1}^n x_j^2\right)^{1/2}$$

で定義する。$a \in \mathbf{R}^n$, $r > 0$ とするとき、a を中心とする半径 r の球 $B(a; r)$ を

$$B(a; r) := \{x \in \mathbf{R}^n; \|x - a\| < r\}$$

で定義する。

A から B の要素を除いた集合 (**差集合**) を $A \setminus B$ と書く:

$$A \setminus B = \{x \in A; x \notin B\}.$$

A の補集合を A^c と書く。例えば $A \subset \mathbf{R}^n$ ならば、

$$A^c = \mathbf{R}^n \setminus A.$$

$\mathbf{R}^n$ の部分集合 Ω の**内部**、**閉包**、**境界**をそれぞれ Ω°, $\overline{\Omega}$, $\partial\Omega$ と書く:

$$\Omega^\circ := \{x \in \mathbf{R}^n; \exists\varepsilon > 0 \quad B(x; \varepsilon) \subset \Omega\},$$

$$\overline{\Omega} := \{x \in \mathbf{R}^n; \forall\varepsilon > 0 \quad B(x; \varepsilon) \cap \Omega \neq \emptyset\},$$

$$\partial\Omega := \{x \in \mathbf{R}^n; \forall\varepsilon > 0 \quad B(x; \varepsilon) \cap \Omega \neq \emptyset \quad \text{かつ} \quad B(x; \varepsilon) \cap \Omega^c \neq \emptyset\}.$$

[2] この講義では、1 以上の整数 1, 2, 3, $\cdots$ のことを自然数と呼ぶ。

目 次

第0章　講義内容イントロダクション

解析概論 II は解析概論 I の続きであり、多変数の微分積分学を学ぶ。より詳しく言うと

1. **多変数関数の積分 (重積分)** $\mathbf{R}^N$ の部分集合 Ω 上定義された関数 f の積分

$$\int_\Omega f(x)\,dx = \iint\cdots\int_\Omega f(x_1, x_2, \cdots, x_N)\,dx_1 dx_2\cdots dx_N$$

   を定義し、その基本的な性質を論ずる。

2. **多変数関数の微積分** 曲線や曲面など「曲がったもの」の上での積分、Gauss-Green-Stokes の定理 (1 変数関数の微分積分学の基本定理、すなわち「微分と積分は互いに逆の演算である」と言う定理の多変数版)。ベクトル解析と外微分法(がいびぶんほう)という二つの流儀がある。

0.1　多変数関数の積分

0.1.1　説明の仕方についての注意

記述をなるべくすっきりさせるために、説明の多くは 1 または 2 変数ですませるが、N 変数 (N は任意の自然数) でも多少面倒になるだけで、本質は全く変らない。

1 変数関数の積分については、1 年生で一通り説明したことになっているが、計算テクニックは別にして、特に理論的な面においてはまだ不十分なので、少し補足する。

0.1.2　3 つの要点

積分の定義は結構込み入っているので、迷子にならないように、イメージを作るのに役立つヒントを 3 つ述べる。

1. 積分は測度である
2. 積分は和に似ている
3. 積分は微分と深い関係にある

ちなみに以下「積分」と言ったら普通は定積分を意味する。

1. 「積分は測度である」 既に知っているように (細かいことを無視して言い切れば)、

1 **変数関数の積分は面積である。**

つまり $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ を $f \geq 0$ なる関数とするとき、

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= f \text{ のグラフと } x \text{ 軸ではさまれる図形の面積} \\ &= \{(x,y); a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\} \text{ の面積.}\end{aligned}$$

同様に

2 変数関数の積分は体積である。

つまり $A \subset \mathbf{R}^2$, $f\colon A \to \mathbf{R}$, $f \geq 0$ とするとき、

$$\begin{aligned}\iint_A f(x,y)\,dx\,dy &= f \text{ のグラフと } xy \text{ 平面上の図形 } A \text{ ではさまれる立体図形の体積} \\ &= \{(x,y,z); (x,y) \in A, 0 \leq z \leq f(x,y)\} \text{ の体積.}\end{aligned}$$

(立体図形の絵が自分で描けるようになっておくこと！)

より一般に

N 変数関数の積分は $(N+1)$ 次元測度 (measure) である。

ここで、測度[1]というのは、長さ、面積、体積を一般化したものである。つまり

$$\begin{aligned}\text{長さ} &= 1 \text{ 次元測度,} \\ \text{面積} &= 2 \text{ 次元測度,} \\ \text{体積} &= 3 \text{ 次元測度}\end{aligned}$$

であって、4 次元以上の空間の部分集合に対しても測度を考える[2]。上の説明では最初に面積、体積が分かっているとして、「積分は面積である」、「積分は体積である」と説明したが、本当は面積や体積も数学的に定義する必要がある。実はこの講義では、最初に積分を定義して、それを用いて $\mathbf{R}^n$ の部分集合の測度 (その特別の場合として面積、体積がある) を定義する。反対に先に (積分を用いずに) 測度を定義して、それから積分を定義することも可能である。

結局は、

積分について考えることは測度について考えることであり、
どちらかを先に定義すれば、他方はもう一方からすぐ定義できる。

2. 「積分は和に似ている」 より正確には

積分は Riemann 和の極限として定義する

[1]測度のことを英語で measure というわけだが、ぜひ一度は英和辞典を引いてみることをお勧めする。
[2]最近では、分数次元も使われるようになった。いわゆる fractal 次元である。

というべきである[3]。このことから、

積分 $\displaystyle\int$ の性質の多くは和 $\sum$ の性質によく似ている。

例えば

1. (線形性)
$$\int_A \lambda f(x) + \mu g(x)\ dx = \lambda \int_A f(x)\ dx + \mu \int_A g(x)\ dx.$$
2. (順序の保存) $f \le g$ on A ならば
$$\int_A f(x)\ dx \le \int_A g(x)\ dx.$$
3. $$\left| \int_A f(x)\ dx \right| \le \int_A |f(x)|\ dx.$$
4. $A = A_1 \cup A_2$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ ならば
$$\int_A f(x)\ dx = \int_{A_1} f(x)\ dx + \int_{A_2} f(x)\ dx.$$

そもそも、積分を表す記号 $\displaystyle\int$ も、数列の和を表すギリシャ文字 Σ も、ともに "sum" の頭文字 'S' に関係する。

ここでは、1 変数関数の積分の定義を見てみよう。例えば $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ なる場合に、f の $[a,b]$ における積分の定義は次のようにする。まず

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_i < x_{i+1} < \cdots < x_n = b$$

となる数列 $\Delta = \{x_i\}_{i=0}^n$ を**区間** $[a,b]$ **の分割**と呼ぶ。区間 $[a,b]$ の分割 $\Delta = \{x_i\}_{i=0}^n$ と条件

$$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i] \quad (i = 1, \cdots, n)$$

を満たす点列 $\xi = \{\xi_i\}_{i=1}^n$ に対して、f の **Riemann 和** $S(\Delta, \xi)$ を

$$S(\Delta, \xi) \overset{\text{def.}}{=} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

で定める。**分割の幅**を 0 に近づけるとき、すなわち

$$|\Delta| \overset{\text{def.}}{\equiv} \max_{i=1,\cdots,n} (x_i - x_{i-1}) \to 0$$

[3] Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866) は 19 世紀の大数学者。様々な業績があるが、積分に初めて明確な定義を与えた[4] (これは彼の業績の中では小粒な方かもしれない)。彼の流儀の積分は Riemann 積分と呼ばれる。Fourier 級数の研究がきっかけだった。

とするとき、$S(\Delta, \xi)$ が極限をもつならば、f は $[a, b]$ で (**Riemann**) **積分可能**であるといい、その極限を f の $[a, b]$ での (**Riemann**) **積分**と呼び

$$\int_{[a,b]} f(x)\, dx \quad \text{または} \quad \int_a^b f(x)\, dx$$

で表す。

参考のため、面積の定義も見てみよう。有界な図形 A に対して、座標軸に平行な格子線による格子を考え、

$$A\text{ の\textbf{内面積}} \stackrel{\text{def.}}{\equiv} \lim_{\text{格子の幅} \to 0} A\text{ の中に含まれる小区間の面積の和}$$

$$A\text{ の\textbf{外面積}} \stackrel{\text{def.}}{\equiv} \lim_{\text{格子の幅} \to 0} A\text{ と交わりを持つ小区間の面積の和}$$

として、

$$A\text{ の内面積} = A\text{ の外面積}$$

となった場合に、「A は**面積を持つ**」あるいは「A は **Jordan 可測集合** (**Jordan measurable set**) である」といい

$$A\text{ の面積} \stackrel{\text{def.}}{\equiv} A\text{ の内面積} \quad (= A\text{ の外面積})$$

と定義する。

なお、積分と和の類似性で理解しやすいものとしては、次の **Fubini の定理**が重要である。

$$\begin{aligned}\int_{[a,b]\times[c,d]} f(x, y)\, dx\, dy &= \int_{[a,b]} \left(\int_{[c,d]} f(x, y)\, dy \right) dx \\ &= \int_{[c,d]} \left(\int_{[a,b]} f(x, y)\, dx \right) dy.\end{aligned}$$

(これは「体積 = 軸に垂直な平面による断面積の積分」と解釈することも出来る。) この定理によれば、多変数関数の積分は、1 変数関数の積分を繰り返して行う (**累次積分**とか**重複積分**と呼ばれる) ことによって計算できることになる。1 変数関数の積分の計算法はもう既に知っている。

3. **「積分は微分と深い関係にある」** 既に

1 変数関数に関しては微分と積分は互いに他と逆の演算である

ことは知っている。具体的には

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)\, dt = f(x)$$

あるいは

$$\int_a^b F'(x)\, dx = [F(x)]_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a).$$

などの定理 (**微分積分学の基本定理**と呼ばれる) が成り立つ。これから

1 **変数関数の定積分は被積分関数の原始関数を見つければ計算できる**

という計算術が導かれるし、非常に重要な応用が豊富にある**部分積分法**

$$\int_a^b f'(x)g(x)\ dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\ dx$$

も、直接の系である (積の微分法の公式 $(fg)' = f'g + fg'$ を積分すれば得られる)。

多変数関数の場合にも、この微分積分学の基本定理に相当するものはあるが、結構深遠な結果であって説明に手間がかかる。これについては重積分について一通り解説し終わってから (つまりは 1, 2 ヶ月後になってから)、じっくりと取り組むことにする。

微分との関係で、もう一つ重要なものに、**変数変換の公式**がある。

(工事中...)

第1章　多変数関数の積分

1.1　R^n の閉方体上の積分

1.1.1　閉方体の分割と上限和・下限和

$\mathbf{R}^n$ の有界閉区間を $\mathbf{R}^n$ の**閉方体**と呼ぶことにする。つまり $\mathbf{R}^n$ の閉方体とは、 $a_1 < b_1$, $a_2 < b_2$, $\cdots$, $a_n < b_n$ なる $2n$ 個の実数 a_i, b_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ を用いて、

$$[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_n, b_n] \overset{\text{def.}}{=} \{x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n; a_i \leq x_i \leq b_i \ (i = 1, 2, \cdots, n)\}$$

と表される $\mathbf{R}^n$ の部分集合である。

例えば $\mathbf{R}^1 = \mathbf{R}$ の閉方体とは、$a < b$ なる 2 つの実数 a, b を用いて

$$[a, b] = \{x \in \mathbf{R}; a \leq x \leq b\},$$

と表される線分のこと、 $\mathbf{R}^2$ の閉方体とは、$a < b$, $c < d$ なる 4 つの実数 a, b, c, d を用いて

$$[a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

と表される長方形のことである。

この節の目標は $\mathbf{R}^n$ の閉方体 A の上で定義された有界な関数 $f \colon A \to \mathbf{R}$ の A における (A 上の) 積分

$$\int_A f(x)\, dx$$

を定義することである。

定義 1.1.1 (1 次元の閉方体の分割) 1 次元閉方体 $A = [a, b]$ に対して、

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_\ell = b$$

を満たす数列 $\{x_j\}_{j=0}^{\ell}$ を A の**小閉方体への分割** と呼ぶ。 A の小閉方体への分割 $\Delta = \{x_j\}_{j=0}^{\ell}$ があるとき、

(i) $A_j \overset{\text{def.}}{=} [x_{j-1}, x_j]$ $(j = 1, 2, \cdots, \ell)$ を分割 Δ の**小閉方体**と呼ぶ。

(ii) $|\Delta| \overset{\text{def.}}{=} \max\limits_{j=1,2,\cdots,\ell} (x_j - x_{j-1})$ を分割 Δ の**幅**と呼ぶ。

(iii) 各 x_j を Δ の**分点**と呼ぶ。

この $\mathbf{R}$ の閉方体の分割を用いて、$n \geq 2$ の場合の $\mathbf{R}^n$ の閉方体の分割が定義される。$n = 2$ の場合で説明する ($n \geq 3$ の場合も同様である)。

定義 1.1.2 (2 次元の閉方体の分割) $A = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ を $\mathbf{R}^2$ の閉方体とする。$\mathbf{R}$ の閉方体 $[a_i, b_i]$ の分割 Δ_i $(i = 1, 2)$ を組にしたもの $\Delta = (\Delta_1, \Delta_2)$ を A の小閉方体への分割と呼ぶ。つまり、

$$a_1 = x_0 < x_1 < \cdots < x_\ell = b_1, \quad a_2 = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = b_2$$

なる点列 $\Delta_1 = \{x_j\}_{j=0,1,\cdots,\ell}$, $\Delta_2 = \{y_k\}_{k=0,1,\cdots,m}$ の組 $\Delta \overset{\text{def.}}{=} (\{x_j\}_{j=0,1,\cdots,\ell}, \{y_k\}_{k=0,1,\cdots,m})$ を A の小閉方体への分割という。このとき

(i) $A_{jk} \overset{\text{def.}}{=} [x_{j-1}, x_j] \times [y_{k-1}, y_k]$ $(j = 1, 2, \cdots, \ell,\ k = 1, 2, \cdots, m)$ を分割 Δ の小閉方体と呼ぶ。

(ii) $|\Delta| \overset{\text{def.}}{=} \max\{|\Delta_1|, |\Delta_2|\}$ を分割 Δ の幅と呼ぶ。

例 1.1.1 $A = [0, 1]$ とする。自然数 ℓ に対して、

$$x_j = \frac{j}{\ell} \quad (j = 0, 1, \cdots, \ell)$$

とおくと、$\Delta \overset{\text{def.}}{=} \{x_j\}_{j=0}^{\ell}$ は $\mathbf{R}$ の小閉方体への分割となる。このとき $|\Delta| = \dfrac{1}{\ell}$. ■

定義 1.1.3 (閉方体の Jordan 測度) $\mathbf{R}^n$ の閉方体

$$A = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$

の n **次元 Jordan 測度**（ジョルダン そくど） (n**-dimensional Jordan measure**) を

$$(b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdots (b_n - a_n)$$

と定め、記号 $\mu(A)$ で表す:

$$\mu(A) \overset{\text{def.}}{=} (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdots (b_n - a_n).$$

1 次元 Jordan 測度は長さ、 2 次元 Jordan 測度は面積 (area)、3 次元 Jordan 測度は体積 (volume) になっていることが分かる。すなわち Jordan 測度というものは長さ、面積、体積の拡張概念である。ここでは閉方体に対してのみ Jordan 測度を定義したが、後でより一般の図形に対して Jordan 測度を定義する。

補題 1.1.1 (ばらして面積を足すと、全体の面積と等しい) A を $\mathbf{R}^n$ の閉方体、Δ を A の小閉方体への分割、$\{A_j\}_{j=1,2,\cdots,\ell}$ を Δ のすべての小閉方体とするとき、

$$\mu(A) = \sum_{j=1}^{\ell} \mu(A_j).$$

証明　明らかであろう。(多次元の場合に実際に証明を書くと結構面倒であるが、本質的なことではないし、事実自体は直感的には明らかだから証明は略する。) ■

定義 1.1.4 (下限和、上限和) A を $\mathbf{R}^n$ の閉方体、$f\colon A \to \mathbf{R}$ を有界関数、Δ を A の分割、$\{A_j\}_{j=1,2,\cdots,\ell}$ を Δ のすべての小閉方体とするとき、f の Δ に関する**下限和** $L(f,A,\Delta)$, f の Δ に関する**上限和** $U(f,A,\Delta)$ を次式で定義する:

$$L(f,A,\Delta) \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{j=1}^{\ell} \inf_{x\in A_j} f(x)\,\mu(A_j), \quad U(f,A,\Delta) \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{j=1}^{\ell} \sup_{x\in A_j} f(x)\,\mu(A_j). \tag{1.1}$$

注意 1.1.1 (記号に関するコメント) $\inf\limits_{x\in S} f(x)$ は $\inf\{f(x); x\in S\}$ とも書ける。inf に馴染みが薄い人は最小値と思って読めばよい。同様に $\sup\limits_{x\in S} f(x) = \sup\{f(x); x\in S\}$ で、こちらは最大値もどきである。 ■

練習問題　$A=[0,1]$, $f(x)=x$, $\Delta=\{j/N\}_{j=0}^{N}$ とするとき、$U(f,A,\Delta)$, $L(f,A,\Delta)$ を求めよ。(**答**: $U(f,A,\Delta)=(N+1)/(2N)$, $L(f,A,\Delta)=(N-1)/(2N)$. $N\to\infty$ とするときの極限がともに 1/2 になることに注目。)

要するに、下限和は下からの近似、上限和は上からの近似である。明らかに

$$L(f,A,\Delta) \le U(f,A,\Delta)$$

が成り立つ。分割を「細かくすると」近似の程度は上がると予想されるが、これについては次項できちんと扱う。

1.1.2　分割の細分

定義 1.1.5 (1 次元の閉方体の分割の細分) A を $\mathbf{R}$ の閉方体、Δ, Δ' を A の小閉方体への分割とする。このとき、

$$\Delta' \text{ が } \Delta \text{ の}\textbf{細分}\text{(さいぶん)} \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \{\Delta'\text{の分点}\} \supset \{\Delta\text{の分点}\}$$

と定義し、このことを

$$\Delta' \succcurlyeq \Delta$$

と表す。

定義 1.1.6 (2 次元の閉方体の分割の細分) A を $\mathbf{R}^2$ の閉方体、$\Delta = (\Delta_1, \Delta_2)$, $\Delta' = (\Delta'_1, \Delta'_2)$ を A の小閉方体への分割とする。このとき、

$$\Delta' \text{ が } \Delta \text{ の細分} \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \Delta'_1 \text{ は } \Delta_1 \text{ の細分かつ } \Delta'_2 \text{ は } \Delta_2 \text{ の細分}$$

と定義し、このことを

$$\Delta' \succcurlyeq \Delta$$

と表す。

例 1.1.2 $A = [0,1], \Delta = \left\{\dfrac{j}{2};\ j = 0,1,2\right\}, \Delta' = \left\{\dfrac{j}{4};\ j = 0,1,\cdots,4\right\}, \Delta'' = \left\{\dfrac{j}{6};\ j = 0,1,\cdots,6\right\}$ とすると、

$$\Delta' \succcurlyeq \Delta, \quad \Delta'' \succcurlyeq \Delta.$$

しかし、

$$\Delta'' \not\succcurlyeq \Delta', \quad \Delta' \not\succcurlyeq \Delta''.$$

つまり Δ', Δ'' はどちらがより細かいとも言えない。 ■

注意 1.1.2 一つの閉方体の分割全体の集合 $\mathcal{D}$ は、関係 $\succcurlyeq$ で半順序集合になる。つまり次の 3 つが成立する。

(i) $\forall \Delta \in \mathcal{D}$ に対して $\Delta \succcurlyeq \Delta$.

(ii) $\forall \Delta \in \mathcal{D}, \forall \Delta' \in \mathcal{D}$ に対して $\Delta \succcurlyeq \Delta'$ かつ $\Delta' \succcurlyeq \Delta \Longrightarrow \Delta = \Delta'$.

(iii) $\forall \Delta \in \mathcal{D}, \forall \Delta' \in \mathcal{D}, \forall \Delta'' \in \mathcal{D}$ に対して $\Delta \succcurlyeq \Delta'$ かつ $\Delta' \succcurlyeq \Delta'' \Longrightarrow \Delta \succcurlyeq \Delta''$. ■

補題 1.1.2 (共通細分の存在) A を $\mathbf{R}$ の閉方体、Δ, Δ' を A の小閉方体への分割とするとき、$\exists \Delta''$: A の分割 s.t. $\Delta'' \succcurlyeq \Delta$ かつ $\Delta'' \succcurlyeq \Delta'$.

証明　分割 Δ'' を

$$\{\Delta'' \text{の分点}\} = \{\Delta \text{の分点}\} \cup \{\Delta' \text{の分点}\}$$

となるように定めればよい (つまり Δ, Δ' の分点を合わせて、並べ変えたものを分点全体とするような分割を Δ'' とする)。■

この補助定理の Δ'' を Δ, Δ' の **共通細分**と呼ぶ。

例 1.1.3 $\Delta = \{j/2\}_{j=0}^2$, $\Delta' = \{j/3\}_{j=0}^3$ の共通細分を上の補助定理の証明のようにして求めると $\Delta'' = \{0, 1/3, 1/2, 2/3, 1\}$. ■

補題 1.1.3 (2 次元の閉方体の分割の共通細分の存在) A を $\mathbf{R}^2$ の閉方体、Δ, Δ' を A の小閉方体への分割とするとき、$\exists \Delta''$: A の分割 s.t. $\Delta'' \succcurlyeq \Delta, \Delta'' \succcurlyeq \Delta'$.

証明は省略する (明らかであろう)。

補題 1.1.4 (分割が細かいほど下限和は大きく、上限和は小さくなる) A を $\mathbf{R}^n$ の閉方体、$f\colon A \to \mathbf{R}$ を有界関数、Δ, Δ' は A の小閉方体への分割で、$\Delta' \succeq \Delta$ が成り立つとする。このとき

$$L(f,A,\Delta) \le L(f,A,\Delta'), \quad U(f,A,\Delta') \le U(f,A,\Delta).$$

証明 (図を描くべし) Δ の各小閉方体 B は何個かの Δ' の小閉方体 B_1, B_2, $\cdots$, B_ℓ に分割される。このとき

$$\mu(B) = \mu(B_1) + \mu(B_2) + \cdots + \mu(B_\ell).$$

一方 $B \supset B_i$ より $\inf\limits_{x\in B} f(x) \le \inf\limits_{x\in B_i} f(x)$ $(i = 1, 2, \cdots, \ell)$ であるから、

$$\begin{aligned}
\inf_{x\in B} f(x)\mu(B) &= \inf_{x\in B} f(x)\cdot(\mu(B_1)+\mu(B_2)+\cdots+\mu(B_\ell)) \\
&= \inf_{x\in B} f(x)\mu(B_1) + \inf_{x\in B} f(x)\mu(B_2) + \cdots + \inf_{x\in B} f(x)\mu(B_\ell) \\
&\le \inf_{x\in B_1} f(x)\mu(B_1) + \inf_{x\in B_2} f(x)\mu(B_2) + \cdots + \inf_{x\in B_\ell} f(x)\mu(B_\ell).
\end{aligned}$$

Δ のすべての小閉方体 B に対して、この両辺の和を取ると

$$L(f,A,\Delta) \le L(f,A,\Delta').$$

上限和についての不等式もまったく同様に証明できる。■

系 1.1.1 (下限和は必ず上限和よりも小さいか等しい) A を $\mathbf{R}^n$ の閉方体、$f\colon A \to \mathbf{R}$ を有界関数、 Δ, Δ' は A の小閉方体への分割とするとき

$$L(f,A,\Delta) \le U(f,A,\Delta').$$

証明 Δ'' を Δ, Δ' 共通の細分とすると、補助定理より

$$L(f,A,\Delta) \le L(f,A,\Delta''), \quad U(f,A,\Delta'') \le U(f,A,\Delta).$$

ところで一つの分割 Δ'' に関する下限和、上限和については大小関係

$$L(f,A,\Delta'') \le U(f,A,\Delta'')$$

は明らかであるから結果が従う。■

この証明を見ると、細分という概念のありがたみが分かってくる。

1.1.3 下積分, 上積分, 積分可能性, 積分の定義

定義 1.1.7 (有界関数の閉方体上の下積分、上積分) A を $\mathbf{R}^n$ の閉方体、$f\colon A \to \mathbf{R}$ を有界関数とするとき、f の A 上の**下積分**(かせきぶん) (不足積分, lower integral) $L(f,A)$, f の A 上の**上積分**(じょうせきぶん) (過剰積分, upper integral) $U(f,A)$ を次式で定める:

$$L(f,A) \overset{\text{def.}}{=} \sup_{\Delta\ \text{は}\ A\ \text{の分割}} L(f,A,\Delta) \qquad (\text{下限和の上限が下積分}),$$

$$U(f,A) \overset{\text{def.}}{=} \inf_{\Delta\ \text{は}\ A\ \text{の分割}} U(f,A,\Delta) \qquad (\text{上限和の下限が上積分}).$$

注意 1.1.3 (1) 上積分を $\overline{\int}_A f(x)\,dx$, 下積分を $\underline{\int}_A f(x)\,dx$ で表すこともある。

(2) 上の系 1.1.1 より明らかに

- 下限和全体の集合 $\{L(f,A,\Delta); \Delta$ は A の分割$\}$ は上に有界な $\mathbf{R}$ の部分集合
- 上限和全体の集合 $\{U(f,A,\Delta); \Delta$ は A の分割$\}$ は下に有界な $\mathbf{R}$ の部分集合

であるから、上積分、下積分は有限の実数として定まることが分かる。また

$$L(f,A) \le U(f,A) \tag{1.2}$$

であることも分かる。■

素朴に考えると、上積分と下積分は常に一致すると思えるかもしれないが、すぐ後の例で見るように、それは誤りである。そこで、上積分と下積分が一致するとき、積分可能であると言うことにする。

定義 1.1.8 (閉方体上の Riemann 積分の定義) A を $\mathbf{R}^n$ の閉方体、$f\colon A \to \mathbf{R}$ を有界関数とするとき、f が A で**積分可能** (あるいは**可積分**(かせきぶん)ともいう) であるとは、

$$L(f,A) = U(f,A)$$

が成り立つこと、すなわち f の A 上の下積分と上積分が一致することをいう。このとき、この共通値 $L(f,A)$ の値のことを f の A 上の**積分**と呼び、

$$\int_A f(x)\,dx, \quad \iint\cdots\int_A f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,dx_1dx_2\cdots dx_n, \quad \int_A f$$

などの記号で表す。

注意 1.1.4 (1) 1 次元の場合、

$$\int_a^b f(x)\,dx \overset{\text{def.}}{=} \begin{cases} \displaystyle\int_{[a,b]} f(x)\,dx & (a<b) \\ 0 & (a=b) \\ \displaystyle -\int_{[b,a]} f(x)\,dx & (a>b) \end{cases}$$

と定義する。これが高等学校以来使ってきた積分の大学数学流の定義である。

(2) $n \geq 2$ のとき、多変数であることを強調する意味で、(n) **重積分**(じゅうせきぶん) (**double integral**) と呼ぶことが多い。

(3) ここで定義した積分は詳しくは **Riemann**[1] **積分**と呼ばれる。**Lebesgue**(ルベーグ)[2] **積分**と呼ばれる、より一般の積分もあり、3 年生で学ぶ。性質の良い関数、積分範囲について二つの積分は一致する。**蛇足:** Lebesgue 積分の方がより性質の悪い関数、積分範囲を扱うことが出来る (例えば、すぐ後で紹介する無理数と有理数で場合分けした関数も、Lebesgue 積分としては積分可能になる)。さらに項別積分などの極限と積分の順序交換が比較的楽にできるという長所を持つ。もともと積分の定義が深く研究されるようになったのは、Fourier 級数などの解析学上の問題がきっかけである。「任意の関数は、積分を用いて定義される Fourier 係数で作られた Fourier 級数で表現できる」という言明を正当化する過程で、関数の定義、積分の定義を突き詰めて考える必要が生じた。なお、Lebesgue 積分について独習したい人には、志賀 [9], 新井 [1]、授業の参考書としては伊藤 [2]、歴史的なところに興味がある人には、もちろんルベーグ [29], それと見過ごされやすそうな[3]吉田 [26] を勧める。

(4) f が A で積分可能であることを、「$\displaystyle\int_A f(x)\,dx$ が存在する」ということもある。

(5) 「f が A で積分可能」は英語では、“f is integrable (summable) on A” であり、これを「f は A で可積分」とか「f は A 上積分可能」、「f は A 上可積分」と訳すことも多い。これらは読む場合には問題ないが、音声の上では「カセキブン」、「ジョウセキブン」という音が「下積分」や「上積分 ($U(f,A)$ の意味の)」と混同しやすいので、この講義 (ノート) では意識的に使わないように心掛けた。 ■

例 1.1.4 (定数値関数は任意の閉方体上で積分可能である) $f\colon A \to \mathbf{R}$ が定数関数 $f(x) \equiv c$ ならば、f は A 上積分可能で、$\displaystyle\int_A f(x)\,dx = c\,\mu(A)$. 実際 A の任意の分割 Δ に対して、Δ の小閉方体全体を $\{A_j\}_{j=1,2,\cdots,\ell}$ とすると、任意の j に対して

$$\sup_{x\in A_j} f(x) = \inf_{x\in A_j} f(x) = c$$

[1]Riemann (1826– 1866) は「関数の三角級数による表現の可能性について」 (1854, Habilitation) で連続とは限らない有界関数の積分の定義を提唱した。

[2]Henri Léon Lebesgue (1875–1941, フランスの Beauvais に生まれ、Paris にて没する)。「積分、長さ、面積」(1902), 「積分と原始関数」 (1904) で Lebesgue 積分を確立した。

[3]書名に「積分」も「測度」も「実解析」もないので。

であるから、

$$L(f,A,\Delta)=U(f,A,\Delta)=\sum_{j=1}^{\ell}c\mu(A_j)=c\sum_{j=1}^{\ell}\mu(A_j)=c\,\mu(A).$$

ゆえに

$$L(f,A)=U(f,A)=c\,\mu(A)$$

である。よって f は A で積分可能で、

$$\int_A f(x)\,dx=c\,\mu(A).\blacksquare$$

例 1.1.5 (積分可能でない関数の例 (Dirichlet の関数)) $A=[0,1]$, $f\colon A\to\mathbf{R}$ を

$$f(x)=\begin{cases}1 & (x\in A\cap\mathbf{Q})\\ 0 & (x\in A\setminus\mathbf{Q})\end{cases}$$

で定めると、A の任意の分割 Δ に対して $L(f,A,\Delta)=0$, $U(f,A,\Delta)=1$ であることが容易に分かるから、 $L(f,A)=0$, $U(f,A)=1$. ゆえに f は A で積分可能ではない。■

1.1.4 積分可能性条件

以下しばらく**どういう場合に積分可能か?**という問題を考える。

定理 1.1.1 (積分可能であるための必要十分条件) A を $\mathbf{R}^n$ の閉方体、$f\colon A\to\mathbf{R}$ を有界関数とするとき、

$$f \text{ が } A \text{ で積分可能} \iff (\forall\varepsilon>0)\ (\exists\Delta\colon A \text{ の分割})\ \text{s.t. } U(f,A,\Delta)-L(f,A,\Delta)\le\varepsilon.$$

証明 A の分割全体を $\mathcal{D}(A)$ と書くことにする。

$$\begin{aligned}U(f,A)-L(f,A) &= \inf_{\Delta\in\mathcal{D}(A)}U(f,A,\Delta)-\sup_{\Delta'\in\mathcal{D}(A)}L(f,A,\Delta')\\ &= \inf_{\Delta,\Delta'\in\mathcal{D}(A)}\left(U(f,A,\Delta)-L(f,A,\Delta')\right)\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}f \text{ が } A \text{ で積分可能} &\iff U(f,A)=L(f,A)\\ &\iff \forall\varepsilon>0\quad \exists\Delta,\Delta'\in\mathcal{D}(A)\quad \text{s.t.}\quad U(f,A,\Delta)-L(f,A,\Delta')<\varepsilon\\ &\iff \forall\varepsilon>0\quad \exists\Delta\in\mathcal{D}(A)\quad \text{s.t.}\quad U(f,A,\Delta)-L(f,A,\Delta)<\varepsilon.\blacksquare\end{aligned}$$

与えられた関数が積分可能であるための、具体的な十分条件としては「関数が連続である」というのがある。これを次に示そう (後で、より一般化したシャープな定理を紹介する)。

定理 1.1.2 (閉方体上の連続関数は積分可能である) A を $\mathbf{R}^n$ の閉方体、$f\colon A\to\mathbf{R}$ を連続関数とするとき、f は A で積分可能である。

証明 A は $\mathbf{R}^n$ の有界閉集合であるから (コンパクト集合であり)、その上で定義された連続関数 f は次の性質を持つ。

1. f は A で最大値と最小値を持つ (特に有界である)。

2. f は A で一様連続である。

特に後者の方から

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \forall x\in A,\ \forall x'\in A\quad |x-x'|\le\delta\Longrightarrow|f(x)-f(x')|\le\varepsilon/\mu(A).$$

そこで Δ を A の分割で $|\Delta|<\delta/\sqrt{n}$ なるものとすると、Δ のすべての小閉方体 A_j $(j=1,2,\cdots,\ell)$ について

$$0\le\sup_{x\in A_j}f(x)-\inf_{x\in A_j}f(x)\le\frac{\varepsilon}{\mu(A)}.$$

各辺に $\mu(A_j)$ をかけて和を取ると、

$$0\le\sum_{j=1}^{\ell}\sup_{x\in A_j}f(x)\mu(A_j)-\sum_{j=1}^{\ell}\inf_{x\in A_j}f(x)\mu(A_j)\le\frac{\varepsilon}{\mu(A)}\sum_{j=1}^{\ell}\mu(A_j).$$

すなわち

$$0\le U(f,A,\Delta)-L(f,A,\Delta)\le\varepsilon.$$

これは f が A で積分可能であることを示している。■

1.1.5 積分の基本的な性質

命題 1.1.1 (積分の基本的な性質) A を $\mathbf{R}^n$ の閉方体、$f\colon A\to\mathbf{R}$, $g\colon A\to\mathbf{R}$ は A で積分可能な有界関数とするとき、次の (1)–(4) が成り立つ。

(1) $\alpha f+\beta g$ も A で積分可能で

$$\int_A(\alpha f(x)+\beta g(x))\,dx=\alpha\int_A f(x)\,dx+\beta\int_A g(x)\,dx$$

(2) A 上で $f\ge g$ が成り立っていれば

$$\int_A f(x)\,dx\ge\int_A g(x)\,dx.$$

(3) $|f|$ も A で積分可能で

$$\left|\int_A f(x)\,dx\right|\le\int_A|f(x)|\,dx.$$

(4) A を 2 個の小閉方体 A_1, A_2 に分割するとき、f は A_1, A_2 のいずれの上でも積分可能であって、

$$\int_A f(x)\,dx=\int_{A_1}f(x)\,dx+\int_{A_2}f(x)\,dx.$$

この命題の証明は省略する。積分を次に説明する Riemann 和を使って特徴づけておけば、ほとんど明らかである (和 $\sum$ の持っている性質であるから)。

Riemann 和

我々は上で、上積分と下積分が一致することを積分可能性の定義としたが、イントロダクションでも書いたように、Riemann 和で定義する流儀もある。

定義 1.1.9 (Riemann 和) A を $\mathbf{R}^n$ の閉方体、 $f\colon A \to \mathbf{R}$ を有界な関数、 Δ を A の小閉方体への分割で、$\{A_j\}_{j=1}^{\ell}$ を Δ のすべての小閉方体とする。$\{\xi_j\}_{j=1}^{\ell}$ を $\xi_j \in A_j$ $(j = 1, 2, \cdots, \ell)$ なる点列とするとき、

$$S(f, A, \Delta, \{\xi_j\}) \overset{\text{def.}}{=} \sum_{j=1}^{\ell} f(\xi_j)\mu(A_j)$$

を f の (Δ, $\{\xi_j\}$ に関する) **Riemann 和**と呼ぶ。

この Riemann 和を用いて、我々が既に定義した積分と同等のものが定義出来る (次の命題の条件 (ii) を見よ)。

命題 1.1.2 A を $\mathbf{R}^n$ の閉方体、 $f\colon A \to \mathbf{R}$ を有界な関数とするとき、次の二条件は互いに同値である。

(i) f は A で積分可能である。

(ii) 分割の幅を 0 に近付けると Riemann 和は一定値に収束する。すなわち $(\exists S \in \mathbf{R})$ $(\forall \varepsilon > 0)$ $(\exists \delta > 0)$ ($\forall \Delta$: A の分割, $|\Delta| < \delta$) ($\forall \{\xi_j\}_{j=1}^{\ell}$: $\xi_j \in A_j$ $(j = 1, 2, \cdots, \ell)$. ここで $\{A_j\}$ は Δ のすべての小閉方体)

$$|S - S(f, A, \Delta, \{\xi_j\})| < \varepsilon.$$

さらに $S = \displaystyle\int_A f(x)\,dx$ が成り立つ。

この命題の証明には、非常に有名な次の命題を使う。

補題 1.1.5 (Darboux (ダルブー)) A を $\mathbf{R}^n$ の閉方体、$f\colon A \to \mathbf{R}$ を有界関数とするとき、$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ s.t. ($\forall \Delta$: A の分割, $|\Delta| \le \delta$)

$$|U(f, A, \Delta) - U(f, A)| \le \varepsilon, \quad |L(f, A, \Delta) - L(f, A)| \le \varepsilon.$$

この事実を

$$\lim_{|\Delta| \to 0} U(f, A, \Delta) = U(f, A), \quad \lim_{|\Delta| \to 0} L(f, A, \Delta) = L(f, A)$$

と書く本もある (厳密に言うと記号の濫用である)。

証明　簡単のため $n = 1$ の場合に証明するが、一般の n に対して証明を書くのも難しくはない (記号が繁雑になりがちで、面倒ではあるが)。また上積分についてのみ証明する (下積分でも同様に証明できる)。

1. $U(f,A)$ の定義から、$\forall\varepsilon>0$ 対して、A の分割 $\Delta_\varepsilon=\{z_0,z_1,\cdots,z_\ell\}$ で

$$U(f,A)\le U(f,A,\Delta_\varepsilon)\le U(f,A)+\frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.3}$$

が成り立つものが存在する。これを一つ固定する。

2. $\eta \overset{\text{def.}}{=} \min\limits_{1\le j\le\ell}(z_j-z_{j-1})$ とおき、$|\Delta|<\eta$ なる A の任意の分割 $\Delta=\{x_0,x_1,\cdots,x_k\}$ を考える。各小閉方体 $[x_{j-1},x_j]$ の中には Δ_ε の分点は高々一つしか入らない。

3. $\tilde\Delta_\varepsilon$ を Δ_ε と Δ の分点を合わせて作った共通の細分とする。まず

$$U(f,A,\tilde\Delta_\varepsilon)\le U(f,A,\Delta_\varepsilon). \tag{1.4}$$

Δ の小区間 $I_j=[x_{j-1},x_j]$ について考える。

   (a) Δ_ε の分点が I_j に入らない、また入っても端点である場合。I_j は分割 Δ_ε の小閉方体でもある。

   (b) Δ_ε の分点 z が I_j の内部に入る場合。I_j は $\tilde\Delta_\varepsilon$ では

$$I_{j,L}=[x_{j-1},z],\quad I_{j,R}=[z,x_j]$$

   と分割される。$U(f,A,\Delta)$ の定義式中の

$$\sup_{x\in I_j}f(x)(x_j-x_{j-1})$$

   は $U(f,A,\Delta_\varepsilon)$ の定義式では

$$\sup_{x\in I_{j,L}}f(x)(z-x_{j-1})+\sup_{x\in I_{j,R}}f(x)(x_j-z)$$

   に置き換えられる。

よって、

$$\begin{aligned}U(f,A,\Delta)-U(f,A,\tilde\Delta_\varepsilon) &= \sum_z\left[(\sup_{I_j}f-\sup_{I_{j,L}}f)(z-x_{j-1})+(\sup_{I_j}f-\sup_{I_{j,R}}f)(x_j-z)\right]\\ &\le \sum_z(M-m)(x_j-x_{j-1})\le\ell(M-m)|\Delta|.\end{aligned}$$

ゆえに

$$0<\delta<\min\left\{\eta,\frac{\varepsilon}{2\ell(M-m)}\right\}$$

なるように Δ を定めると、$|\Delta|<\delta$ ならば

$$U(f,A,\Delta)-U(f,A,\tilde\Delta_\varepsilon)<\varepsilon/2. \tag{1.5}$$

以上をまとめて

$$\begin{aligned}0\le U(f,A,\Delta)-U(f,A) &= \Big(U(f,A,\Delta)-U(f,A,\tilde\Delta_\varepsilon)\Big)+\Big(U(f,A,\tilde\Delta_\varepsilon)-U(f,A,\Delta_\varepsilon)\Big)\\ &\quad+(U(f,A,\Delta_\varepsilon)-U(f,A))\\ &< \frac{\varepsilon}{2}+0+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

これは $\lim_{|\Delta|\to\varepsilon} U(f,A,\Delta) = U(f,A)$ を意味している。■

命題 1.1.2 の証明

(i)⟹(ii) 明らかに

$$L(f,A,\Delta) \le S(f,A,\Delta,\{\xi_j\}) \le U(f,A,\Delta)$$

であるが、ここで $|\Delta|$ を 0 に近付けると、Darboux の定理と仮定から、両端が $\int_A f(x)dx$ に収束する。従って、Riemann 和も $\int_A f(x)\,dx$ に収束する。

(ii)⟹(i) 与えられた $\varepsilon > 0$ に対して、仮定の条件の $\delta > 0$ を取ると、$|\Delta| < \delta$ をみたす任意の分割 Δ に対して、

$$S - \varepsilon \le L(f,A,\Delta) \le U(f,A,\Delta) \le S + \varepsilon$$

が成り立つ。ゆえに $U(f,A,\Delta) - L(f,A,\Delta) \le 2\varepsilon$. 定理 1.1.1 より f は A で積分可能である。■

1.2 Jordan 可測集合上の積分

この節のあらすじ

まず前節で定義した積分を用いて、一般の図形 ($\mathbf{R}^n$ の部分集合) の n 次元 Jordan[a] 測度を定義する:

$$\mu(\Omega) := \int_A \chi_\Omega(x)\,dx \quad (\text{ただし } A \text{ は } \overline{A} \subset \Omega^\circ \text{ となる閉方体、} \chi_\Omega \text{ は } \Omega \text{ の特性関数}).$$

すべての図形が Jordan 測度を持つとは限らない。Jordan 測度を持つ集合のことを Jordan 可測集合と呼ぶ。Jordan 可測集合 Ω 上で定義された有界関数 $f\colon \Omega \to \mathbf{R}$ の積分は次のように定義する (Dirichlet, 1839 年)。

$$\int_\Omega f(x)\,dx := \int_A \widetilde{f}(x)\,dx, \quad \widetilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & (x \in \Omega), \\ 0 & (x \in A \setminus \Omega). \end{cases}$$

[a] Camille Jordan (1838–1922).

図形 Ω の Jordan(ジョルダン) 測度とは、Ω の**特性関数** (**characteristic function**) χ_Ω の積分である。(ある空間の部分集合の特性関数とは、その部分集合上で 1, 補集合上で 0 となる関数のことである。つまり

$$\chi_\Omega(x) \overset{\text{def.}}{=} \begin{cases} 1 & (x \in \Omega) \\ 0 & (x \in \Omega^c) \end{cases}$$

で定義される関数 χ_Ω である。しばしば Ω の**定義関数**とも呼ばれる。)

以下にあげる二つの定義は、直観的にも納得しやすいものなので、必ず理解してもらいたい。注意事項も多いが、最初は飛ばして、大筋をつかんでから、読み直してもらえればよい。

定義 1.2.1 (Jordan 可測集合) Ω を $\mathbf{R}^n$ の有界集合とする。
Ω が n **次元 Jordan 可測** (**n-dimensional Jordan measurable**) とは、積分 $\displaystyle\int_A \chi_\Omega(x)\,dx$ が存在することと定義する。ここで

(1) A は $\overline{\Omega} \subset A^\circ$ となる閉方体[a]。

(2) χ_Ω は Ω の特性関数。すなわち $\chi_\Omega(x) := \begin{cases} 1 & (x \in \Omega) \\ 0 & (x \notin \Omega) \end{cases}$ である。

このとき

$$\mu_n(\Omega) = \mu(\Omega) := \int_A \chi_\Omega(x)\,dx$$

を Ω の n **次元 Jordan 測度** (**n-dimensional Jordan measure**) と呼ぶ。

[a]記号の復習: $\overline{\Omega}$ は Ω の閉包、A° は A の内部を表す。

例 1.2.1 例 1.1.5 の f は $\Omega := [0,1] \cap \mathbf{Q}$ の特性関数である。f は積分可能でないので、Ω は Jordan 可測ではない。■

注意 1.2.1 上の定義は A の取り方によらない (いわゆる well-defined である)。つまり $\overline{\Omega} \subset B^\circ$ なる、もう一つの閉方体 B があったとき、

$$\chi_\Omega \text{ が } A \text{ で積分可能} \iff \chi_\Omega \text{ が } B \text{ で積分可能}$$

であり、これが成り立つとき

$$\int_A \chi_\Omega(x)\,dx = \int_B \chi_\Omega(x)\,dx.$$

問 注意で述べた事実を証明せよ (どちらも $\displaystyle\int_{A\cap B} \chi_\Omega(x)\,dx$ に等しい)。

注意 1.2.2 閉方体については、既にその n 次元 Jordan 測度を定義してある。Ω が閉方体である場合、上の定義 1.2.1 で、二重定義が生じるようだが、これは問題ない。それは Ω が閉方体 $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ であるならば、次の (1), (2) が成り立つからである。

(1) Ω は n 次元 Jordan 可測集合である。

(2) $\displaystyle\int_A \chi_\Omega(x)\,dx = \prod_{j=1}^n (b_j - a_j)$. ■

問 この注意の (1), (2) が成り立つことを示せ。

注意 1.2.3 $\mathbf{R}^n$ の有界な部分集合 Ω に対して、$\overline{\Omega} \subset A^\circ$ となる閉方体を一つ取るとき、

$$\Omega \text{ が Jordan 可測} \Leftrightarrow \chi_\Omega \text{ が } A \text{ で積分可能} \Leftrightarrow U(\chi_\Omega, A) = L(\chi_\Omega, A).$$

また定義より

$$U(\chi_\Omega, A) = \inf_\Delta U(\chi_\Omega, A, \Delta), \quad L(\chi_\Omega, A) = \sup_\Delta L(\chi_\Omega, A)$$

であることと、A の分割 Δ に属する小閉方体全体を A_j $(j = 1, 2, \cdots, \ell)$ とするとき、

$$\begin{aligned} U(\chi_\Omega, A, \Delta) &= \sum_{A_j \cap \Omega \neq \emptyset} \mu(A_j) = \Omega \text{ と共通部分を持つ } A_j \text{ の Jordan 測度の和}, \\ L(\chi_\Omega, A, \Delta) &= \sum_{A_j \subset \Omega} \mu(A_j) = \Omega \text{ に含まれる } A_j \text{ の Jordan 測度の和} \end{aligned}$$

であることに注意すると、Jordan 可測性の意味が明瞭になるであろう (ぜひとも図が欲しい…)。$U(\chi_\Omega, A)$ を Ω の **Jordan 外測度**, $L(\chi_\Omega, A)$ を Ω の **Jordan 内測度**という。 ■

定義 1.2.2 (Jordan 可測集合上の積分の定義) Ω を $\mathbf{R}^n$ の有界で Jordan 可測な部分集合で、$f\colon \Omega \to \mathbf{R}$ は有界関数とする。このとき f が Ω で**積分可能** (または**可積分**) であるとは、$\overline{\Omega} \subset A^\circ$ なる $\mathbf{R}^n$ の閉方体 A を取って

$$\tilde{f}(x) \overset{\text{def.}}{=} \begin{cases} f(x) & (x \in \Omega) \\ 0 & (x \in A \setminus \Omega) \end{cases}$$

で $\tilde{f}$ を定めるとき、$\tilde{f}$ が A で積分可能となることをいう。このとき f の Ω 上の**積分** $\displaystyle\int_\Omega f(x)\,dx$ を

$$\int_\Omega f(x)\,dx \overset{\text{def.}}{=} \int_A \tilde{f}(x)\,dx$$

で定める。

注意 1.2.4 この積分の定義によれば、$\mathbf{R}^n$ の有界 Jordan 可測集合の Jordan 測度 $\mu(\Omega)$ は

$$\int_\Omega 1\,dx \quad \left(\text{同じものを } \int_\Omega dx \text{ とも書く}\right)$$

とも表せることになる。 ■

命題 1.2.1 (積分の基本的な性質) Ω を $\mathbf{R}^n$ の閉方体、 $f\colon \Omega \to \mathbf{R}$, $g\colon \Omega \to \mathbf{R}$ は Ω で積分可能な有界関数とするとき、

(1) $\alpha f + \beta g$ も Ω で積分可能で

$$\int_\Omega (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int_\Omega f(x)\, dx + \beta \int_\Omega g(x)\, dx$$

(2) Ω 上で $f \geq g$ が成り立っていれば

$$\int_\Omega f(x)\, dx \geq \int_\Omega g(x)\, dx.$$

(3) $|f|$ も Ω で積分可能で

$$\left| \int_\Omega f(x)\, dx \right| \leq \int_\Omega |f(x)|\, dx.$$

(4) Ω_1, Ω_2 は Jordan 可測な集合で、

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2, \quad \Omega_1^\circ \cap \Omega_2^\circ = \emptyset$$

が成り立つとすると

$$\int_\Omega f(x)\, dx = \int_{\Omega_1} f(x)\, dx + \int_{\Omega_2} f(x)\, dx.$$

1.3 二つの零集合

1.3.1 はじめに

2005 年度の講義までは、この節は単に「零集合」というタイトルで、Lebesgue 測度論の意味での零集合を取り上げ、可積分条件を論じるだけだった (要するに 1.3.3 のみ)。

ところで (Riemann) 積分について無視できる集合は何かを説明しようとすると、やはり Jordan 測度 0 の集合を取り上げないわけには行かない (当たり前である)。話が長くなってしまうのは残念だが、きちんと説明するには、ここはどうしても省略できないところである。

Lebesgue 測度 0 の集合と Jordan 測度 0 の集合をそれぞれ何と呼ぶのか、ちょっと考えどころである。Jordan 測度の定義はしてあるので、「(有界 Jordan 可測で) Jordan 測度 0 の集合」という表現にはあまり問題がない。一方、「Lebesgue 測度 0 の集合」という表現は、Lebesgue 測度の定義をしているのではないから使うのは不適当であろう。従来の講義で「零集合」という名前を採用したのはそのためである。そこで「零集合」と「Jordan 測度 0 の集合」という表現はどうか、と考えたが、これは対称性がなく、また前者を後者と混同しかねないと判断した。そこで「Jordan 零集合」と「Lebesgue 零集合」という表現を採用することにした。

…余談になるが、あるとき解析概論 II で (Lebesgue) 零集合を取り上げることを某先生から

非難されたことがある。今一つ真意がはっきりしない物言いだったのだが、Lebesgue 測度論 (積分論) の概念を密輸入してペダンティックなことをやっている、という意味であると解釈した。確かに Lebesgue 零集合は Lebesgue が定義したもので、(Riemann) 可積分条件の定理も Lebesgue が得たものであるが、Lebesgue 零集合の定義に Lebesgue 測度は必要ないし、可積分条件の定理も Lebesgue 積分に関する定理ではなく、あくまで Riemann 積分に関する定理である。そして — ここが大事なところだが — この定理は美しい。また一度この定理を得ると大変に見通しがよくなり、その後の議論の歯切れがよくなる。

20 世紀に多くの微積分の教科書が書かれたわけだが、この Lebesgue の定理を紹介していないものが多いのは、もったいないと思う。

1.3.2 Jordan 零集合 — Riemann 積分で無視可能な集合

(この項は当分の間工事中である。)

命題 1.3.1 Ω を $\mathbf{R}^n$ の部分集合とするとき、次の (i), (ii) は互いに同値である。

(i) Ω は有界 Jordan 可測で Jordan 測度は 0 である。

(ii) $(\forall\varepsilon>0)$ $(\exists\{A_j\}_{j=1}^{\ell})$ s.t. 各 A_j は $\mathbf{R}^n$ の閉方体, $\Omega\subset\displaystyle\bigcup_{j=1}^{\ell}A_j$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{\ell}\mu(A_j)\le\varepsilon$.

証明 (準備中 — 簡単なので「各自に任せる」でもよかろう) ■

定義 1.3.1 (Jordan 零集合) $\mathbf{R}^n$ の部分集合 Ω に対して、Ω が **Jordan 零集合**であるとは、上の命題の (i) の条件が成り立つことと定義する。またこのことを単に $\mu(\Omega)=0$ とも書く。

命題 1.3.2 $\mathbf{R}^n$ において次の (1), (2), (3) が成り立つ。

(1) Jordan 零集合の部分集合は Jordan 零集合である。

(2) 二つの Jordan 零集合の合併は Jordan 零集合である。

(3) 有限集合は Jordan 零集合である。

証明 (明らかであろう。) ■

命題 1.3.3 (グラフや曲線はふつう Jordan 零集合)

(1) K を $\mathbf{R}^n$ の有界閉集合、$f\colon K\to\mathbf{R}$ を連続関数とするとき、$\operatorname{graph}f:=\{(x,f(x));x\in K\}$ は $\mathbf{R}^{n+1}$ の Jordan 零集合である。

(2) $n\ge 2$, I を $\mathbf{R}$ の有界閉区間、$\varphi\colon I\to\mathbf{R}^n$ を C^1-級の関数とするとき、$\varphi(I)$ は $\mathbf{R}^n$ の Jordan 零集合である。

証明 (1) (準備中 — 本質的には以下の縦線集合の Jordan 可測性のところで書いてある。)

(2) $I=[a,b]$ とする。$\|\varphi'\|$ は $\mathbf{R}$ の有界閉集合 I 上で連続なので、$M:=\max_{t\in I}\|\varphi'(t)\|$ が存在する。このとき (有限増分の公式あるいは $\varphi(t)-\varphi(s)=\int_s^t\varphi'(r)\,dr$ から容易に)

$$\forall t,s\in[a,b]\quad \|\varphi(t)-\varphi(s)\|\le M\|t-s\|$$

が成り立つ[4]。任意の自然数 N に対して、I を N 等分して出来た小閉区間を $I_1, I_2, \ldots, I_N$ とする[5]。このとき

$$\forall k\in\{1,2,\ldots,N\}\quad \forall t,s\in I_k\quad \|\varphi(t)-\varphi(s)\|\le\frac{M(b-a)}{N}.$$

特に $\varphi(I_k)$ は閉球 $\overline{B\left(\varphi(t_{k-1});r\right)}$, $r:=\dfrac{M(b-a)}{N}$ に含まれる。ゆえに 1 辺が $2r$ の n 次元立方体 A_k で被覆できる。したがって、$\varphi(I)=\varphi\left(\bigcup_{k=1}^N I_k\right)=\bigcup_{k=1}^N\varphi(I_k)$ は $\bigcup_{k=1}^N A_k$ で被覆され、

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^N A_k\right)\le\sum_{k=1}^N\mu(A_k)=N\times(2r)^n=\frac{[2M(b-a)]^n}{N^{n-1}}.$$

$n\ge 2$ と仮定したので、N を大きくすれば、この式の右辺はいくらでも小さくできる。 ■

注意 1.3.1 命題 1.3.3 の (2) について、いくつかコメントしておく。

(a) 実は「長さを持つ曲線は Jordan 零集合」と一般化できる。証明はほぼそのまま通用すると言って良いが、長さを持つ曲線が弧長パラメーターを持つことの証明をここ¡にコンパクトに書く準備が出来ていないので、簡明な C^1-級の場合に限ることにした。

(b) なぜ $n\ge 2$ が必要なのだろう…これくらいはノーヒントで、と言いたいくらいだが、一応説明しておくと、曲線の長さは 0 とは限らないが (0 でない方が普通だ)、曲線の面積は普通 0 で、いわんや体積をや、ということである。

n 未満の次元の図形を、n 次元図形の尺度で測ると 0 になる

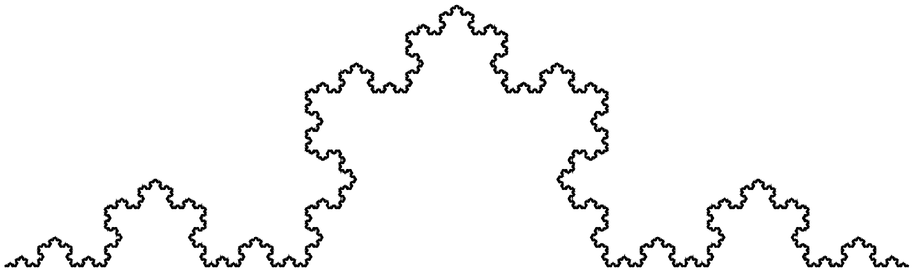
(c) φ が C^1-級という条件は無条件では落とせない。実際、連続写像 $\varphi\colon[0,1]\to\mathbf{R}^2$ で、$\varphi([0,1])=[0,1]\times[0,1]$ となるものが存在する (いわゆる **Peano 曲線** (1890), Hilbert 曲線 (1891))。 ■

---

[4]これが成り立つことを φ はリプシッツ連続であるという。これを導いた後は C^1-級であることは使っていないから、この命題の結論 (と証明) が成り立つためには、実は φ がリプシッツ連続でありさえすればよい。

[5]具体的に書くと $t_k:=a+k(b-a)/N$, $I_k:=[t_{k-1},t_k]$ となる。

問　Koch 曲線は、長さを持たないが Jordan 零集合であることを示せ。(ヒント: 自己相似性に注意せよ。)



以下は、Jordan 零集合が積分に関して「小さい」ことを説明する。

> **命題 1.3.4** Ω を $\mathbf{R}^n$ の Jordan 零集合とするとき、Ω 上の任意の有界関数 $f\colon \Omega \to \mathbf{R}$ は Ω で積分可能で $\displaystyle\int_\Omega f(x)\,dx = 0$ を満たす。少々形式的だが
>
> $$\mu(\Omega) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \int_\Omega f(x)\,dx = 0.$$

証明　(準備中) ■

さて、よく言われる「零集合上での差は積分に影響しない」であるが、どのように命題化するのが良いか、あまり自信がない。以下の二つはとりあえずの提示である。

> **命題 1.3.5 (零集合上の差は積分に影響ない (1))** A は $\mathbf{R}^n$ の有界 Jordan 可測集合、B は $\mathbf{R}^n$ の Jordan 零集合、$f\colon A \cup B \to \mathbf{R}$ を有界関数とするとき、f が A, $A \cup B$, $A \setminus B$ のいずれかで積分可能ならば、他のいずれでも積分可能で
>
> $$\int_A f(x)\,dx = \int_{A\cup B} f(x)\,dx = \int_{A\setminus B} f(x)\,dx.$$

証明　A, B が Jordan 可測であることから、$A \cup B$, $A \setminus B$ も Jordan 可測である。$A \cup B = (A \setminus B) \cup B$, $(A \setminus B) \cap B = \emptyset$ であるから、

$$\int_{A\cup B} f(x)\,dx = \int_{A\setminus B} f(x)\,dx + \int_B f(x)\,dx = \int_{A\setminus B} f(x)\,dx + 0 = \int_{A\setminus B} f(x)\,dx.$$

同様に $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$, $(A \setminus B) \cap (A \cap B) = \emptyset$ であるから、

$$\int_A f(x)\,dx = \int_{A\setminus B} f(x)\,dx + \int_{A\cap B} f(x)\,dx.$$

ところで $A \cap B \subset B$ より $\mu(A \cap B) = 0$ であるから、$A \cap B$ 上の積分は 0 となり、

$$\int_A f(x)\,dx = \int_{A\setminus B} f(x)\,dx + 0 = \int_{A\setminus B} f(x)\,dx. \blacksquare$$

命題 1.3.6 (零集合上の差は積分に影響ない (2)) $A,\ B$ は $\mathbf{R}^n$ の有界 Jordan 可測集合で、差が Jordan 零集合、すなわち $\mu\left((A\setminus B)\cup(B\setminus A)\right)=0$ を満たすならば、$A\cap B$ 上での値が一致する任意の有界関数 $f\colon A\to\mathbf{R},\ f\colon B\to\mathbf{R}$ に対して、次の (1), (2) が成り立つ。

(1) f が A で積分可能 $\iff$ g が B で積分可能.

(2) f が A で積分可能ならば (または「g が B で積分可能ならば」)、$\displaystyle\int_A f(x)\,dx = \int_B g(x)\,dx.$

証明 $\widetilde{A}:=A\cap B,\ B_1:=A\setminus B,\ B_2:=B\setminus A$ とおくとき、$\widetilde{A}$ は有界 Jordan 可測集合であり、B_1 と B_2 は Jordan 零集合、また $A=\widetilde{A}\cup B_1,\ \widetilde{A}\cap B_1=\emptyset,\ B=\widetilde{A}\cup B_2,\ \widetilde{A}\cap B_2=\emptyset$ が成り立つので、

$$\int_A f(x)\,dx=\int_{\widetilde{A}} f(x)\,dx=\int_{\widetilde{A}} g(x)\,dx=\int_B g(x)\,dx.\blacksquare$$

1.3.3 Lebesgue 零集合 — Riemann 積分の可積分条件の記述

(この節の記述は、主にスピヴァック [14] による。)

この節の目的

前節の議論だけでは、可測性、可積分性 (積分可能性) のイメージがつかみずらいだろうから、少し補足する。授業では定理の紹介するが、証明はしない (一応書いておくが)。大意をつかんでもらえれば十分と考えている。「Lebesgue 零集合」という “小さい” 集合を定義しておくと、

$$\Omega \text{ が Jordan 可測} \iff \Omega \text{ の境界が Lebesgue 零集合である}$$

$$\text{有界関数 } f\colon\Omega\to\mathbf{R} \text{ が積分可能である} \iff f \text{ の不連続点全体の集合が Lebesgue 零集合である}$$

のようにきれいに可測性、可積分性が判定できる、というのがミソである。

与えられた集合が Jordan 可測であるかどうか、また与えられた関数が積分可能であるかどうか、どうやって判定すればいいのだろう。この点についてもう少し考えて見よう。

まず積分論において極めつけ重要な概念を導入する。

定義 1.3.2 (Lebesgue 零集合) Ω を $\mathbf{R}^n$ の部分集合とする。

$$\Omega \text{ が } \textbf{Lebesgue 零集合 (null set)} \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall\varepsilon > 0,\ \exists\{A_j\}_{j=1}^{\infty} \text{ s.t.} \begin{cases} A_j \text{ は閉方体または } \emptyset\ (j \in \mathbf{N}). \\ \Omega \subset \displaystyle\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j. \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) \le \varepsilon. \end{cases}$$

要するに、Lebesgue 零集合とは、測度の和が任意に小さい閉方体の可算列で覆えるような集合のことで、直観的に言えば、やせた集合である。自分で使い始めるとすぐに分かることだが、集合が Lebesgue 零集合であることの確認は大抵の場合かなり易しい。

(実は Lebesgue 零集合というのは、Lebesgue 積分論の言葉を使えば、Lebesgue 測度が 0 の集合のことである。Lebesgue 積分論では、Lebesgue 零集合が大活躍するが、Riemann 積分論でも以下に示すようにかなり便利に使える、ということである。)

Lebesgue 零集合の性質をいくつか述べておこう。

命題 1.3.7 (Jordan 零集合と Lebesgue 零集合の関係) (1) $\mathbf{R}^n$ の任意の Jordan 零集合は Lebesgue 零集合である。(2) $\mathbf{R}^n$ の任意のコンパクト Lebesgue 零集合は Jordan 零集合である。

証明 (1) は明らかである。(2) は Jordan 零集合, Lebesgue 零集合の定義の中の「閉方体」を「開区間」でおきかえてもよいことに注意すれば、コンパクトの定義 (任意の開被覆は有限部分被覆を持つ) から明らかである。 ■

後で示すように、$\mathbf{Q}$ は Lebesgue 零集合であるが、Jordan 零集合ではないから、上の命題の (1) の逆は成り立たない。

命題 1.3.8 $\mathbf{R}^n$ において、次の (1)–(3) が成り立つ。

(1) Lebesgue 零集合の部分集合は Lebesgue 零集合である。

(2) 有限集合は Lebesgue 零集合である。

(3) 可算無限集合は Lebesgue 零集合である。特に $\mathbf{Q}$ は $\mathbf{R}$ の Lebesgue 零集合である。

証明 (1), (2) は明らかである (Jordan 零集合でもある)。(3) を $n = 1$ の場合に示そう。Ω を可算無限集合 $\{x_j\}_{j\in\mathbf{N}}$ とするとき、

$$A_j := \left[x_j - \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}, x_j + \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}\right]$$

とおくと、$x_j \in A_j$ であるから $\Omega \subset \displaystyle\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ であり、かつ $\mu(A_j) = \dfrac{\varepsilon}{2^j}$ であるから

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^j} = \varepsilon.$$

n が一般の場合も $x_j \in A_j$ かつ $\mu(A_j) = \varepsilon/2^j$ を満たす閉方体 A_j が取れることは明らかであるから同じことである。 ■

上の命題の (4) を不思議に感じる人がいるだろうが (たとえば、有理数体 $\mathbf{Q}$ が面積の和がいくらでも小さい閉方体の列で覆える！、次の命題はもっと驚くべきものである。

命題 1.3.9 (Lebesgue 零集合は可算無限個足しても Lebesgue 零集合) $\mathbf{R}^n$ において、可算個の Lebesgue 零集合の合併は Lebesgue 零集合である。

証明 $\Omega = \displaystyle\bigcup_{j=1}^{\infty} \Omega_j$ で、任意の $j \in \mathbf{N}$ に対して、Ω_j は Lebesgue 零集合であるとする。任意の $\varepsilon > 0$ に対して、各 $j \in \mathbf{N}$ につき、Ω_j が Lebesgue 零集合であることから

$$\Omega_j \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k^{(j)}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \mu\left(A_k^{(j)}\right) \le \frac{\varepsilon}{2^j}$$

となる閉方体の列 $\{A_k^{(j)}\}_{k=1}^{\infty}$ が取れる。このとき $A_k^{(j)}$ $(j,k = 1,2,\dots)$ は可算個あり (自然数で番号づけできる[6])、

$$\sum_{j,k=1}^{\infty} \mu\left(A_k^{(j)}\right) = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k^{(j)}) \le \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^j} = \varepsilon.$$

そしてもちろん $\Omega \subset \displaystyle\bigcup_{j,k=1}^{\infty} A_k^{(j)}$. ゆえに Ω は Lebesgue 零集合である。 ■

Lebesgue 零集合の概念を使うと、積分可能性の必要十分条件が次のようにスマートに書ける (これは Lebesgue[7] による結果 (1902) で、本節のハイライト)。

定理 1.3.1 (不連続点全体が Lebesgue 零集合 $\Leftrightarrow$ 積分可能) A を $\mathbf{R}^n$ の閉方体、$f\colon A \to \mathbf{R}$ を有界関数、B を f の不連続点全体の集合、すなわち

$$B \overset{\text{def.}}{=} \{x \in A; f \text{ は } x \text{ で不連続}\}$$

とするとき、

$$f \text{ が } A \text{ で積分可能} \iff B \text{ は Lebesgue 零集合}.$$

証明

($\Leftarrow$) $\varepsilon > 0$ とすると、B が Lebesgue 零集合であることから、次の条件を満たす $\mathbf{R}^n$ の開区間の列 $\{U_i\}_{i\in\mathbf{N}}$ が取れる[8]

$$B \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \quad \text{かつ} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \mu(U_i) \le \varepsilon.$$

[6] 有理数体 $\mathbf{Q}$ が可算濃度であることの証明と同様である。

[7] Henri Léon Lebesgue (1875–1941, フランスの Beauvais に生まれ、Paris にて没する).

[8] Lebesgue 零集合の定義から、閉方体の列 $\{A_i\}$ で、$B \subset \displaystyle\bigcup_i A_i$, $\displaystyle\sum_i \mu(A_i) \le \frac{\varepsilon}{2}$ を満たすものが取れる。A_i の各辺を (測度が 2 倍以上にならないように) 少し長くした開区間を U_i とすればよい。

$\forall x \in A \setminus B$ に対して、f の x での連続性から、$\mathbf{R}^n$ の閉方体 V_x で

$$x \in V_x^\circ, \quad \sup_{y \in V_x} f(y) - \inf_{y \in V_x} f(y) < \varepsilon$$

なるものが取れる。このとき

$$\{U_i\}_{i=1}^\infty \cup \{V_x^\circ\}_{x \in A \setminus B}$$

は A の開被覆であるから、そのうちの有限個を選んで A を覆うことが出来る (A は $\mathbf{R}^n$ の有界閉集合であるからコンパクトである[9])。

A の分割 Δ で、その小閉方体がすべて上の有限個の開区間のどれかに含まれるようなものを取る。そうして

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_1 &\stackrel{\text{def.}}{=} \Delta \text{ の小閉方体のうち、いずれかの } U_i \text{ に含まれるもの全体}, \\
\mathcal{A}_2 &\stackrel{\text{def.}}{=} \Delta \text{ の小閉方体のうち、いずれかの } V_x^\circ \text{ に含まれるもの全体}, \\
M &\stackrel{\text{def.}}{=} \sup_{y \in A} |f(y)|
\end{aligned}$$

とおくと、$\mathcal{A}_1 \bigcup \mathcal{A}_2$ に Δ のすべての小閉方体が含まれ、

$$\begin{aligned}
\sum_{S \in \mathcal{A}_1} \left[\sup_{y \in S} f(y) - \inf_{y \in S} f(y)\right] \mu(S) &\leq 2M \sum_{S \in \mathcal{A}_1} \mu(S) \leq 2M\varepsilon, \\
\sum_{S \in \mathcal{A}_2} \left[\sup_{y \in S} f(y) - \inf_{y \in S} f(y)\right] \mu(S) &\leq \varepsilon \sum_{S \in \mathcal{A}_2} \mu(S) \leq \varepsilon\mu(A).
\end{aligned}$$

ゆえに

$$U(f, A, \Delta) - L(f, A, \Delta) = \sum_S \left[\sup_{y \in S} f(y) - \inf_{y \in S} f(y)\right] \mu(S) \leq [2M + \mu(A)]\varepsilon.$$

これは f が A で積分可能であることを示している。

($\Rightarrow$)　f が A で積分可能であると仮定する。

$$B_m \stackrel{\text{def.}}{=} \left\{x \in A; o(f, x) \geq \frac{1}{m}\right\} \quad (m \in \mathbf{N})$$

とおくと $B = \cup_{i=1}^\infty B_m$ となる。ただし、$o(f, a)$ は a における f の振幅

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \left(\sup_{x \in B(a;\delta)} f(x) - \inf_{x \in B(a;\delta)} f(x) \right)$$

を表すものとする。

B が Lebesgue 零集合であることを示すには、各 B_m が Lebesgue 零集合であることを確かめればよい。

A の分割 Δ を

$$U(f, A, \Delta) - L(f, A, \Delta) < \frac{\varepsilon}{m}$$

[9] A.2 の定理 A.2.1 を見よ。

が成り立つように取る (これは f が A で積分可能という仮定からできる)。

$$\mathcal{A} \overset{\text{def.}}{=} \Delta \text{ の小閉方体のうち内部が } B_m \text{ と交わるもの}$$

とおくと、$\mathcal{A}$ は B_m° の有限被覆である。

$S \in \mathcal{A}$ に対して

$$\sup_{y\in S} f(y) - \inf_{y\in S} f(y) \geq \frac{1}{m}$$

であるから、

$$\begin{aligned}
\frac{1}{m}\sum_{S\in\mathcal{A}} \mu(A) &\leq \sum_{S\in\mathcal{A}} \left[\sup_S f - \inf_S f\right]\mu(S) \leq \sum_S \left[\sup_S f - \inf_S f\right]\mu(S) \\
&= U(f,A,\Delta) - L(f,A,\Delta) \\
&< \frac{\varepsilon}{m}.
\end{aligned}$$

ゆえに

$$\sum_{S\in\mathcal{A}} \mu(A) \leq \varepsilon.$$

一方、明らかに $\bigcup_{i=1}^{\ell} \partial A_i$ は Lebesgue 零集合 (ここで ∂A は A の境界を表す)。これは有界閉集合であるからコンパクトであることに注意すると、有限個の閉方体の列 $U_1, \cdots, U_k$ で

$$\sum_{j=1}^{k} \mu(U_j) < \varepsilon, \quad \bigcup_{j=1}^{k} U_j \supset \bigcup_{i=1}^{\ell} \partial A_i$$

を満たすものが取れることが分かる。

$\mathcal{A} \cup \{U_j\}_{j=1}^k$ は B_m を覆う。そして

$$\sum_{S\in\mathcal{A}} \mu(A) + \sum_{j=1}^{k} \mu(U_j) < 2\varepsilon.$$

ゆえに B_m は Lebesgue 零集合である。■

この定理の系として、重要な命題 (一応定理としておこう) が二つ出る。

定理 1.3.2 (境界が Lebesgue 零集合ならば Jordan 可測) Ω を $\mathbf{R}^n$ の有界集合とするとき

$$\Omega \text{ が Jordan 可測} \iff \Omega \text{ の境界 } \partial\Omega \text{ が Lebesgue 零集合。}$$

証明 $\overline{\Omega} \subset A^\circ$ となる $\mathbf{R}^n$ の閉方体 A を取ったときに

$$\chi_\Omega \text{ が } A \text{ で積分可能} \iff \partial\Omega \text{ が Lebesgue 零集合}$$

を示せばよいが、前の定理から

$$\partial\Omega = \{x \in A; \chi_\Omega \text{ は } x \text{ で不連続}\}$$

であることを確かめれば十分である。「明らか」と言ってもよいくらいだが、一応やっておこう。

(a) x が Ω の内点とすると

$$x \in U \subset \Omega$$

となる開区間 U が取れるが、このとき $\chi_\Omega = 1$ on U. よって x で χ_Ω は連続である。

(b) x が Ω の外点とすると

$$x \in U \subset \mathbf{R}^n \setminus \Omega$$

となる開区間 U が取れるが、このとき $\chi_\Omega = 0$ on U. よって x で χ_Ω は連続である。

(c) x が Ω の境界点、すなわち $x \in \partial\Omega$ とすると、$x \in U$ となる任意の開区間 U は Ω の内部とも外部とも共通点を持つ。

- $y_1 \in U \cap \Omega^\circ$ とすると $\chi_\Omega(y_1) = 1$.
- $y_2 \in U \cap (\mathbf{R}^n \setminus \Omega)^\circ$ とすると $\chi_\Omega(y_2) = 0$.

これから χ_Ω は x で不連続であることが分かる。

以上より B は χ_Ω の不連続点全体の集合であることが分かった。 ■

注意 1.3.2 この定理に関しては、有界集合の境界はコンパクトであるから、Lebesgue 零集合と言うかわりに Jordan 零集合と言っても良い。すなわち

$$\Omega \text{ が Jordan 可測} \iff \partial\Omega \text{ が Jordan 零集合}.$$

これから「Ω が Jordan 可測であるための必要十分条件は、$\partial\Omega$ が任意に小さな測度を持つ区間塊で覆えることである」という定理が得られる (これはこんな遠回りをしなくても、もっと直接に証明できるが)。 ■

注意 1.3.3 Jordan 可測性の簡単な判定条件としては、

その集合の境界が有限個の連続関数のグラフの合併になっていれば Jordan 可測

というものが得られる。落合・高橋 [4] では、それとほぼ同等の条件で「C^0 級の開集合」というものを定義して、それは Jordan 可測という結果を導いている (実際上うまいやり方だと思う)。 ■

この定理の証明と同様の論法で次の定理が得られる。

定理 1.3.3 (不連続点全体が Lebesgue 零集合 ⇔ 積分可能 (一般バージョン)) Ω が $\mathbf{R}^n$ の有界な Jordan 可測集合で、$f\colon \Omega \to \mathbf{R}$ を有界な関数とする。このとき、

$$f \text{ が } \Omega \text{ で積分可能} \Leftrightarrow f \text{ の不連続点全体の集合は Lebesgue 零集合。}$$

(不連続点が少ないことが積分可能であるための必要十分条件ということで、これ以上ないというくらいすっきりした結論である。)

命題 1.3.10 Ω が $\mathbf{R}^n$ の有界な Jordan 可測集合とするとき、閉包 $\overline{\Omega}$, 内部 Ω° も有界 Jordan 可測であり、

$$\mu(\Omega) = \mu\left(\overline{\Omega}\right) = \mu\left(\Omega^\circ\right).$$

証明　$\Omega\subset\overline{\Omega}$ より $\Omega^\circ\subset\left(\overline{\Omega}\right)^\circ$ であるから、

$$\partial\overline{\Omega}=\overline{\overline{\Omega}}\setminus\left(\overline{\Omega}\right)^\circ=\overline{\Omega}\setminus\left(\overline{\Omega}\right)^\circ\subset\overline{\Omega}\setminus\Omega^\circ=\partial\Omega.$$

Ω が Jordan 可測であるから $\partial\Omega$ は Jordan 零集合であるから、
$rd\overline{\Omega}$ も Jordan 零集合であり、$\overline{\Omega}$ は Jordan 可測である。

同様に $\Omega^\circ\subset\Omega$ より $\overline{\Omega^\circ}\subset\overline{\Omega}$ であるから、

$$\partial\left(\Omega^\circ\right)=\overline{\Omega^\circ}\setminus\left(\Omega^\circ\right)^\circ=\overline{\Omega^\circ}\setminus\Omega^\circ\subset\overline{\Omega}\setminus\Omega^\circ=\partial\Omega.$$

これから Ω° が Jordan 可測であることが分かる。

以上の議論の過程で、各集合の差の Jordan 測度が 0 であることも分かったので、$\mu(\Omega)=\mu\left(\overline{\Omega}\right)=\mu\left(\Omega^\circ\right)$. ■

なお、この命題の逆は成立しない。実際 $\Omega:=[0,1]\cap\mathbf{Q}$ とするとき、Ω は Jordan 可測ではなく、$\overline{\Omega}=[0,1]$, $\Omega^\circ=\emptyset$ のいずれも Jordan 可測である。

1.4　Fubini の定理

1.4.1　イントロダクション

これまで重積分の定義を学んできた。これから具体的に値を計算するために役立つ方法を学ぶ。

ここでは、そのうちの一つ、重積分を 1 次元の積分の繰り返し（累次積分、重複積分という）に変形する「Fubini の定理」を説明する。

まず Fubini の定理の直感的な意味を二通りの方法で示す。

積分は和の極限であるという立場からの理解

平面上で 1 以上 10 以下の整数を座標に持つ点の集合 A を考える。

$$A=\{(i,j)\in\mathbf{Z}^2;1\le i,j\le 10\}.$$

各 $(i,j)\in A$ の上に i^2j という値がおいてあるとして、それらすべての和はいくらになるか？

これは別に難しくはなく、次のように計算できる。

$$\sum_{(i,j)\in A}i^2j\;=\;\sum_{i=1}^{10}\left(\sum_{j=1}^{10}i^2j\right)=\sum_{i=1}^{10}i^2\frac{10\cdot 11}{2}=\frac{10\cdot 11\cdot(2\cdot 10+1)}{6}\cdot 55=21175.$$

この計算で使った原理を、一般的に表すと

$$\sum_{a\le i\le b,c\le j\le d}a_{ij}\;=\;\sum_{i=a}^{b}\left(\sum_{j=c}^{d}a_{ij}\right)$$

となる。つまり

「二重級数の和は、(一重) 級数の和の計算 2 回で出来る」

ということである。積分に関してもまったく同様のこと (Fubini の定理) が成り立つ。後で Fubini の定理の証明を学ぶが、それは上の級数の計算と本質的に同等である。

積分は測度であるという立場からの理解

2 次元の閉方体 $A=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]$ 上の積分で説明する。いま $f\colon A\ni(x_1,x_2)\mapsto f(x_1,x_2)\in \mathbf{R}$, $f\geq 0$ (on A) とするとき、f の A 上の積分

$$\int_A f(x)\,dx$$

を考える。すでに述べたように、これは集合

$$\{(x_1,x_2,y)\in\mathbf{R}^3;(x_1,x_2)\in A, 0\leq y\leq f(x_1,x_2)\}$$

の体積である。ところで、高等学校の数学で

「立体図形の体積は、一つの軸に関する断面積を、その軸に沿って積分したものである」

ことを学んだ。このことから

$$\begin{aligned}\int_A f(x)\,dx &= \iint_A f(x_1,x_2)\,dx_1dx_2\\ &= \int_{a_1}^{b_1}\left(\int_{a_2}^{b_2} f(x_1,x_2)\,dx_2\right)dx_1\\ &= \int_{a_2}^{b_2}\left(\int_{a_1}^{b_1} f(x_1,x_2)\,dx_1\right)dx_2\end{aligned}$$

となる。

次元 $n>2$ の場合も、繰り返して用いることによって、

$$\begin{aligned}&\iint\cdots\int_{[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times\cdots\times[a_n,b_n]} f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,dx_1dx_2\cdots dx_n\\ &=\int_{a_1}^{b_1}\left(\int_{a_2}^{b_2}\cdots\left(\int_{a_n}^{b_n} f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,dx_n\right)\cdots dx_2\right)dx_1\end{aligned}$$

すなわち 1 次元の積分を繰り返すこと (**累次積分**, **重複積分**, **repeated integral**) に帰着する。

1.4.2 定理の陳述

Fubini の定理を述べよう (証明は 1.4.3 で述べる)。何次元でも成り立つ定理であるが、とりあえず 2 次元の場合に書いておく。

定理 1.4.1 (Fubini の定理) $A=[a,b]\times[c,d]$, $f\colon A\to\mathbf{R}$ 有界、さらに二条件

(1) f は A で積分可能である。

(2) $\forall x\in[a,b]$ を固定したとき、関数 $f(x,\cdot)\colon [c,d]\ni y\longmapsto f(x,y)\in\mathbf{R}$ が $[c,d]$ で積分可能である。

が満たされるならば、関数
$$F(x):=\int_c^d f(x,y)\,dy$$
は $[a,b]$ で積分可能で
$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b F(x)\,dx,$$
すなわち
$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx.$$

注意 1.4.1 (記号に関する注意) 少し変わった記号であるが、
$$\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx$$
を
$$\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)\,dy$$
のように書くことがよくある。また、括弧を略して
$$\int_a^b\int_c^d f(x,y)dydx$$
のように書くことも多い。 ■

注意 1.4.2 (a) 二つの条件 (1), (2) のうち本質的なのは (1) の方で、(1) を仮定するだけで (2) を少し弱くした条件が成立し、適当な修正を加えた上で、定理の最後の等式も成立する。しかし、ここではあまり欲張らないことにする。(例えばスピヴァック [14] を見よ。)

(b) 特に f が A 上連続であれば、(1), (2) は満たされる。つまり次の系が成り立つ。

(c) (知っていても知らなくても、後の説明を理解するのには関わりのないことだが) 条件 (2) に現れる関数 $y\mapsto f(x,y)$ のことを $f(x,\cdot)$ と表すことがある。

(d) 上の定理は通常 Fubini の定理と呼ばれるが、この形の定理がはじめて文献に登場するのは、多変数関数の微分の定義でも有名な Otto Stolz (1842–1905, 当時 Austria であった Hall に生まれ、Austria の Innsburck にて没する) の 1886 年の論文であるとか。 ■

系 1.4.1 (連続関数に対する Fubini の定理) $A = [a,b] \times [c,d]$, $f\colon A \to \mathbf{R}$ 連続ならば関数

$$F(x) := \int_c^d f(x,y)\,dy$$

は $[c,d]$ 上連続（したがって積分可能）で

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx.$$

例 1.4.1 $A = [0,1] \times [0,1]$, $f(x,y) = x^2 y$ のとき $\displaystyle\iint_A f(x,y)\,dx\,dy$ を求めよ。

解. f は A 上連続であるから

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^1 x^2 y\,dy \right) dx = \int_0^1 \left[x^2 \cdot \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=1} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{6}. \blacksquare$$

応用上は積分範囲が区間でない場合が多い。「縦線(たてせん)集合」の場合は、次のような簡単な結果がある。

定理 1.4.2 (縦線集合に対する Fubini の定理) D を $\mathbf{R}^m$ の有界な Jordan 可測集合、φ_1, φ_2 を $\overline{D}$ 上の連続関数で、$\varphi_1 \le \varphi_2$ を満たすものとする。このとき、

$$\Omega = \{(x,y); x \in D, \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\} \tag{1.6}$$

とおくと、次の (1), (2) がなりたつ。

(1) Ω は $\mathbf{R}^{m+1}$ の有界 Jordan 可測集合である。

(2) $f\colon \Omega \to \mathbf{R}$ を有界連続関数とするとき、

$$\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \int_D \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

注意 1.4.3 上の定理の Ω のように、適当な集合 D, 関数 φ_1, φ_2 によって、(1.6) の形に表される集合を**縦線集合**と呼ぶ。 ■

例 1.4.2 (グラフと座標平面ではさまれる部分の測度) K を $\mathbf{R}^n$ の Jordan 可測な有界閉集合、$f\colon K \to \mathbf{R}$ を連続関数で、K 上 $f \ge 0$ を満たすものとするとき、

$$V := \{(x,y); x \in K,\ 0 \le y \le f(x)\}$$

は定理の適用できる縦線集合であるから Jordan 可測で

$$\mu_{n+1}(V) = \iint_V dx\,dy = \int_K \left(\int_0^{f(x)} dy \right) dx = \int_K f(x)\,dx. \blacksquare$$

例 1.4.3 平面上で 3 点 $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ を頂点とする三角形の内部および周を Ω とするとき、

$$I := \iint_\Omega x^2 y\,dxdy$$

を求めよ。$\Omega = \{(x,y); 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x\}$ であるから、

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^x x^2 y\,dx\,dy\right) = \int_0^1 \left[x^2\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=x} dx = \int_0^1 \frac{x^4}{2}dx = \left[\frac{x^5}{10}\right]_0^1 = \frac{1}{10}.\blacksquare$$

例 1.4.4 (球の体積) 球 $\Omega = \{(x,y,z); x^2+y^2+z^2 \le R^2\}$ の体積を求めよ。

$$D := \{(x,y); x^2+y^2 \le R^2\}, \quad \varphi_1(x,y) := -\sqrt{R^2-x^2-y^2}, \quad \varphi_2(x,y) := \sqrt{R^2-x^2-y^2}$$

とおくと $\forall(x,y) \in D$ に対して $\varphi_1(x,y) \le \varphi_2(x,y)$ が成り立ち、

$$\Omega = \{(x,y,z); (x,y) \in D,\ \varphi_1(x,y) \le z \le \varphi_2(x,y)\}$$

となるので Ω は縦線集合である。

$$\begin{aligned}\mu(\Omega) = \iiint_\Omega dx\,dy\,dz &= \iint_D \left(\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} dz\right) dx\,dy = \iint_D (\varphi_2(x,y) - \varphi_1(x,y))\,dx\,dy \\ &= 2\iint_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dx\,dy.\end{aligned}$$

実は D も縦線集合と見なせる。実際、

$$\psi_1(x) := -\sqrt{R^2-x^2}, \quad \psi_2(x) := \sqrt{R^2-x^2}$$

とおくとき、$\psi_1(x) \le \psi_2(x)$ $(x \in [-R,R])$ が成り立ち

$$D = \{(x,y); x \in [-R,R],\ \psi_1(x) \le y \le \psi_2(x)\}$$

となる。ゆえに

$$\mu(\Omega) = 2\int_{-R}^R \left(\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dy\right) dx = 2\int_{-R}^R \left(\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dy\right) dx.$$

ここで

$$\int_{-a}^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \text{原点中心半径 } a \text{ の円板の上半分の面積} = \frac{\pi a^2}{2}$$

であることを $a = \sqrt{R^2-x^2}$ について用いると、

$$\mu(\Omega) = 2\int_{-R}^R \frac{\pi(R^2-x^2)}{2}\,dx = 2\pi\int_0^R (R^2-x^2)dx = 2\pi\left(R^2\cdot R - \frac{R^3}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi R^3.\blacksquare$$

例 1.4.5 $\Omega=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3; x^2+y^2+z^2\le x\}$ とするとき $\displaystyle\iiint_\Omega x\,dx\,dydz$ を求めよ。

Ω は中心 $(1/2,0,0)$, 半径 $1/2$ の閉球であるから、以下のように縦線集合とみなせる。

$$\begin{aligned} D &= \left\{(x,y);(x-1/2)^2+y^2\le 1\right\},\\ \Omega &= \left\{(x,y,z);(x,y)\in D, -\sqrt{x-x^2-y^2}\le z\le\sqrt{x-x^2-y^2}\right\}. \end{aligned}$$

実は D 自身も縦線集合とみなせる。

$$D'=[0,1],\quad D=\left\{(x,y);x\in D',\ -\sqrt{x-x^2}\le y\le\sqrt{x-x^2}\right\}.$$

ゆえに

$$\begin{aligned} \iiint_\Omega x\,dx\,dy\,dz &= \iint_D\left(\int_{-\sqrt{x-x^2-y^2}}^{\sqrt{x-x^2-y^2}} x\,dz\right)dx\,dy=\iint_D 2x\sqrt{x-x^2-y^2}\,dx\,dy\\ &= \int_0^1\left(\int_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}} 2x\sqrt{x-x^2-y^2}\,dy\right)dx\\ &= \int_0^1 4x\left(\int_0^{\sqrt{x-x^2}}\sqrt{(x-x^2)-y^2}\,dy\right)dx\\ &= \int_0^1 4x\cdot\frac{\pi(x-x^2)}{4}dx=\pi\int_0^1(x^2-x^3)dx=\frac{\pi}{12}.\blacksquare \end{aligned}$$

積分の順序交換　Fubini の定理の効用として「重積分を累次積分に直す」ことをあげたが、**積分順序の交換**

$$\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy$$

も役に立つことが多い。つまり、もともと累次積分の形になっている式で、そのまま計算しようとすると面倒だが、積分の順序を交換すると簡単になることがある。

一つの集合 Ω が二つの方向にいずれについても縦線集合である場合の、(重複) 積分の順序交換も応用上頻出する。

例 1.4.6 $I:=\displaystyle\int_0^1 dy\int_y^1 e^{x^2}dx$ を求めよ。

この累次積分に対応する重積分の積分範囲 $\Omega=\{(x,y);0<y<1,\ y<x<1\}$ は $\Omega=\{(x,y);0<x<1,\ 0<y<x\}$ とも書ける。ゆえに

$$I=\int_0^1 dx\int_0^x e^{x^2}dy=\int_0^1 e^{x^2}\left[y\right]_{y=0}^{y=x}dx=\int_0^1 xe^{x^2}\,dx=\left[\frac{e^{x^2}}{2}\right]_0^1=\frac{e^2-1}{2}.\blacksquare$$

この例のように Ω が

$$\Omega=\{(x,y);a<x<b,\ \varphi_1(x)<y<\varphi_2(x)\}=\{(x,y);c<y<d,\ \psi_1(y)<x<\psi_2(y)\}$$

と二通りに表される場合は等式

$$\int_a^b\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\right)dx=\int_c^d\left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx\right)dy$$

が成り立つ。

練習問題 1.4.1 次の各積分の順序を交換しなさい。
(1) $\displaystyle\int_0^a \left(\int_0^x f(x,y)\,dy\right)dx.$ (2) $\displaystyle\int_0^{2a} \left(\int_0^{2ax-x^2} f(x,y)\,dy\right)dx.$ (3) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_{-x}^x f(x,y)\,dy\right)dx.$
(4) $\displaystyle\int_{-1}^1 \left(\int_{\sqrt{1-x^2}}^3 f(x,y)\,dy\right)dx.$

解答 1.4.1 (1) $\displaystyle\int_0^a \left(\int_y^a f(x,y)dx\right)dy.$ (2) $\displaystyle\int_0^{a^2} \left(\int_{a-\sqrt{a^2-y}}^{a+\sqrt{a^2-y}} f(x,y)\,dx\right)dy.$
(3) $\displaystyle\int_{-1}^0 \left(\int_{-y}^1 f(x,y)\,dx\right)dy + \int_0^1 \left(\int_y^1 f(x,y)\,dx\right)dy.$
(4) $\displaystyle\int_1^3 \left(\int_{-1}^1 f(x,y)\,dx\right)dy + \int_0^1 \left(\int_{-1}^{-\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx\right)dy + \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{1-y^2}}^1 f(x,y)\,dx\right)dy.$

1.4.3 Fubini の定理の証明

Fubini の定理の証明は割と素直である (特にこれと言う山場はない)。

定理 1.4.1 の証明 $A' = [a,b]$, $A'' = [c,d]$ の小閉方体への分割

$$\Delta' : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_\ell = b,$$

$$\Delta'' : c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d$$

をとり、$A'_i \stackrel{\text{def.}}{=} [x_{i-1}, x_i]$ とおく。

この Δ', Δ'' を組にしてできる A の小閉方体への分割を Δ とすると、それに属する小閉方体は

$$A_{ij} \stackrel{\text{def.}}{=} A'_i \times [y_{j-1}, y_j] \quad (1 \le i \le \ell;\ 1 \le j \le m)$$

となる。また $|\Delta| = \max\{|\Delta'|, |\Delta''|\}$ であるから、

$$|\Delta| \to 0 \iff |\Delta'| \to 0 \text{ かつ } |\Delta''| \to 0$$

である。

さて、

$$M_{ij} \stackrel{\text{def.}}{=} \sup_{(x,y)\in A_{ij}} f(x,y), \quad m_{ij} \stackrel{\text{def.}}{=} \inf_{(x,y)\in A_{ij}} f(x,y)$$

とおくと、$\forall \xi_i \in A'_i$ に対して $m_{ij} \le f(\xi_i, y) \le M_{ij}$ $(y \in [y_{j-1}, y_j])$ であるから、

$$\sum_{j=1}^m m_{ij}(y_j - y_{j-1}) \le \sum_{j=1}^m \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(\xi_i, y)dy \le \sum_{j=1}^m M_{ij}(y_j - y_{j-1}),$$

すなわち

$$\sum_{j=1}^m m_{ij}(y_j - y_{j-1}) \le \int_c^d f(\xi_i, y)dy \le \sum_{j=1}^m M_{ij}(y_j - y_{j-1}).$$

この両辺に $\mu(A_i')$ をかけて和を取ると

$$\sum_{i=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{m} m_{ij}(y_j - y_{j-1})\mu(A_i') \le \sum_{i=1}^{\ell}\int_c^d f(\xi_i, y)dy \cdot \mu(A_i') \le \sum_{i=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{m} M_{ij}(y_j - y_{j-1})\mu(A_i'),$$

すなわち

$$L(f, A, \Delta) \le \sum_{i=1}^{\ell} F(\xi_i)\mu(A_i') \le U(f, A, \Delta), \quad F(x) := \int_c^d f(x, y)\, dy.$$

f が A で積分可能であるという仮定から、$|\Delta| \to 0$ のとき、左辺も右辺も $\displaystyle\iint_A f(x,y)\,dx\,dy$ に収束する。従って、F の Riemann 和も同じ値に収束する。

ゆえに F は $[a, b]$ で積分可能で

$$\int_a^b F(x)\, dx = \iint_A f(x, y)\, dx\, dy$$

が成り立つ。すなわち

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\, dy\right) dx = \iint_A f(x, y)\, dx\, dy. \quad \blacksquare$$

今度は縦線集合上の Fubini の定理である。

定理 1.4.2 の証明

(1) まず

$$\begin{aligned} K_1 &= \{(x, y) \in \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}; x \in D^\circ,\ y = \varphi(x)\}, \\ K_2 &= \{(x, y) \in \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}; x \in D^\circ,\ y = \psi(x)\}, \\ K_3 &= \{(x, y) \in \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}; x \in \partial D,\ \varphi(x) \le y \le \psi(x)\} \end{aligned}$$

とおくと

$$\partial\Omega = K_1 \cup K_2 \cup K_3$$

が成り立つのを確かめるのはやさしい。定理を証明するには、各 K_i が Lebesgue 零集合であることを示せば良い。

(a) (K_3 が Lebesgue 零集合であること) D が Jordan 可測であるという仮定から、 ∂D は Lebesgue 零集合である。よって、$\forall\varepsilon > 0$ に対して

$$\exists\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \text{ s.t. } \partial D \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) < \varepsilon$$

が成り立つ。ここで

$$\tilde{A}_i \stackrel{\text{def.}}{=} A_i \times [m, M], \quad m = \min_{x\in\overline{D}} \varphi(x), \quad M = \max_{x\in\overline{D}} \psi(x)$$

とおくと、

$$K_3 \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \tilde{A}_i, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \mu(\tilde{A}_i) < (M - m)\varepsilon.$$

これは K_3 が Lebesgue 零集合であることを示している。

(b) (K_1, K_2 が Lebesgue 零集合であること) どちらでも同じことだから K_1 について示す。φ は $\overline{D}$ (これは有界閉集合であるからコンパクトであることに注意) で連続であるから、一様連続である。つまり $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$ s.t.

$$x, y \in \overline{D}, \quad \|x - y\| < \delta \Longrightarrow |\varphi(x) - \varphi(y)| < \varepsilon.$$

$\overline{D} \subset A^\circ$ となる閉方体 A を取り、A の分割 Δ で $|\Delta| < \dfrac{1}{\sqrt{m}}\delta$ となるものを取る。Δ の小閉方体のうち $\overline{D}$ と共通部分を持つものを $A_1, A_2, \cdots, A_\ell$ とする。各 A_i に対しては、$\xi_i \in A_i \cap \overline{D}$ を任意に取って固定すると

$$\forall x \in A_i \cap \overline{D} \quad |\varphi(x) - \varphi(\xi_i)| < \varepsilon$$

が成り立つ。そこで

$$\tilde{A}_i \overset{\text{def.}}{=} A_i \times [\varphi(\xi_i) - \varepsilon, \varphi(\xi_i) + \varepsilon]$$

とおく。すると $K_1 \subset \displaystyle\bigcup_{i=1}^{\ell} \tilde{A}_i$, さらに

$$\sum_{i=1}^{\ell} \mu(\tilde{A}_i) = 2\varepsilon \sum_{i=1}^{\ell} \mu(A_i) \le 2\varepsilon\mu(A)$$

が導かれる。よって、K_1 は Lebesgue 零集合である。

(2) $m = 1$ の場合のみ証明する ($m \ge 2$ の場合もまったく同様である)。$\overline{\Omega} \subset A^\circ$ なる区間 $A = [a, b] \times [c, d]$ を取り、$\tilde{f}$ を

$$\tilde{f}(x, y) \overset{\text{def.}}{=} \begin{cases} f(x, y) & ((x, y) \in \Omega) \\ 0 & ((x, y) \in A \setminus \Omega) \end{cases}$$

とおく。

$\forall x \in D$ に対して、関数

$$f(x, \cdot)\colon [c, d] \ni y \longmapsto \tilde{f}(x, y) \in \mathbf{R}$$

は高々 2 点 $\varphi(x)$, $\psi(x)$ を除き連続であるから、これは $[c, d]$ で積分可能である。それゆえ、定理 1.4.1 から

$$\begin{aligned} \iint_\Omega f(x, y)\, dx\, dy &= \iint_A \tilde{f}(x, y)\, dx\, dy = \int_{[a,b]} \left(\int_c^d \tilde{f}(x, y)\, dy \right) dx \\ &= \int_D \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\, dy \right) dx. \blacksquare \end{aligned}$$

1.4.4 一般化

ここまで、積分範囲が二つの閉方体の直積である場合を扱ってきたが、任意の Jordan 可測集合の直積の場合に一般化できる。

定理 1.4.3 (一般化された Fubini の定理) U, V はそれぞれ $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{R}^m$ の有界 Jordan 可測集合で、$f\colon U \times V \to \mathbf{R}$ は有界かつ連続な関数とするとき、

$$\iint_{U\times V} f(x,y)\,dx\,dy = \int_V \left(\int_U f(x,y)\,dx\right) dy.$$

証明は省略するが、意外と簡単 (はみ出たところは 0 で積分に影響しない) であるから、各自やってみることを勧める。

系 1.4.2 A, B がそれぞれ $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{R}^m$ の有界な Jordan 可測集合とするとき、$A \times B$ は $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ の Jordan 可測集合で、

$$\mu_{n+m}(A\times B) = \mu_n(A)\mu_m(B).$$

1.4.5 断面で積分

命題 1.4.1 D は $\mathbf{R}^{n+1}$ の有界 Jordan 可測集合で、任意の $\eta \in \mathbf{R}$ に対して、

$$D_\eta := \{x \in \mathbf{R}^n ; (x,\eta) \in D\}$$

が $\mathbf{R}^n$ の Jordan 可測集合であるならば、任意の有界連続関数 $f\colon D \to \mathbf{R}$ に対して、

$$\iint_D f(x,y)\;dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{D_y} f(x,y)\;dx\right) dy$$

が成り立つ。ただし $a := \inf_{(x,y)\in D} y$, $b := \sup_{(x,y)\in D} y$ であり、$D_y = \emptyset$ となる y に対しては $\displaystyle\int_{D_y} f(x,y)\;dx = 0$ とする。特に

$$\mu_{n+1}(D) = \int_a^b \left(\int_{D_y} dx\right) dy = \int_a^b \mu_n(D_y)\;dy.$$

証明　$\mathbf{R}^n$ の十分大きい閉方体 A を取ると $D \subset A \times [a,b]$ となる。$\forall y \in \mathbf{R}$ に対して、

$$\chi_{D_y} = \chi_D(\cdot, y)$$

が成り立つことに注意すると、

$$\begin{aligned}\iint_D f(x,y)\,dx\,dy &= \iint_{A\times[a,b]} \widetilde{f}(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_A \widetilde{f}(x,y)\,dx\right) dy \\ &= \int_a^b \left(\int_{D_y} f(x,y)\,dx\right) dy\end{aligned}$$

例 1.4.7 (カヴァリエリの原理) $\mathbf{R}^{n+1}$ の有界 Jordan 可測集合 D, E が、

$$\forall y \in \mathbf{R} \quad \mu_n(D_y) = \mu_n(E_y)$$

を満たすならば $\mu_{n+1}(D) = \mu_{n+1}(E)$. ■

1.5 変数変換の公式

ここでは重積分の変数変換の公式 (いわゆる置換積分) を学ぶ。

1.5.1 1 次元の復習

まず 1 変数の場合の復習をしよう。積分

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

があるとき、任意の C^1-級の全単射 $\varphi\colon I \to [a,b]$ に対して、

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\,du \quad (\text{ただし } \varphi(\alpha)=a,\ \varphi(\beta)=b). \tag{1.7}$$

証明は簡単で、f の原始関数 F を取ると、

$$f(\varphi(u))\varphi'(u) = F'(\varphi(u))\varphi'(u) = \frac{d}{du}F(\varphi(u))$$

であるから、

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\,du = \int_\alpha^\beta \frac{d}{du}F(\varphi(u))\,du = [F(\varphi(u))]_\alpha^\beta = [F(x)]_a^b = \int_a^b f(x)\,dx.$$

覚え方 多分、高等学校で勉強した場合は、次のように覚えているであろう。$x = \varphi(u)$ とおくと

$$dx = \varphi'(u)du$$

であるから

$$F(u)du = f(\varphi(u))\varphi'(u)du = f(x)dx.$$

変数の範囲については自然に

u	$\alpha \to \beta$
x	$a \to b$

ほとんど暗記の苦労のない公式である (記号を作った人が賢いせいである)。

1.5.2 定理の紹介

定理 1.5.1 (重積分の変数変換, $n=2$: Euler (1769), $n=3$: Lagrange (1773)) 次の (i) – (iv) を仮定する。

(i) D は $\mathbf{R}^n$ の有界な Jordan 可測集合。

(ii) U は $\overline{D}\subset U$ となる $\mathbf{R}^n$ の開集合。

(iii) $\varphi=\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \vdots\\ \varphi_n\end{pmatrix}: U\longrightarrow \mathbf{R}^n$ は C^1-級の単射。

(iv) $\forall u\in U$ に対して $\det\varphi'(u)\neq 0$.

このとき次の (1), (2) が成り立つ。

(1) $\Omega:=\varphi(D)$ は Jordan 可測集合。

(2) 有界な連続関数 $f\colon\Omega\to\mathbf{R}$ に対して

$$\int_\Omega f(x)dx=\int_D f(\varphi(u))|\det\varphi'(u)|du. \tag{1.8}$$

注意 1.5.1 公式 (1.8) で φ のヤコビアン (ヤコビ行列の行列式) $\det\varphi'(u)$ の絶対値が現れるが、(1.7) では、絶対値のついていない $\varphi'(u)$ が現れる。これは一見食い違っているように思えるかもしれないが、1 次元の積分では、積分区間の端点に大小関係がなくても構わないためで、実は (1.7) でも、

$$a'=\min\{a,b\},\quad b'=\max\{a,b\},\quad \alpha'=\min\{\alpha,\beta\},\quad \beta'=\max\{\alpha,\beta\}$$

とおいて書き直すと、

$$\int_{[\alpha',\beta']} f(\varphi(u))|\varphi'(u)|\,du=\int_{[a',b']} f(x)\,dx$$

と絶対値が現れる。■

1.5.3 例

変数変換の公式を用いる計算例をいくつか紹介しよう。その中でも、極座標変換はよく使うので[10]、最初に調べておこう。

[10]円盤領域、扇形領域、円環領域、さらには全平面や楕円領域などでの積分に便利に利用できる。

平面極座標変換

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad (r \geq 0,\ \theta \in [0, 2\pi))$$

によって $\varphi\colon \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を定めると、

$$\varphi' = \begin{pmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

であるから $\det\varphi' = \cos\theta \cdot r\cos\theta - (-r\sin\theta)\sin\theta = r$. よって平面極座標については、$dx\,dy = r\,drd\theta$ となる。これはしっかり覚えておこう。

　これから例えば $\Omega = B(0; a)$ に対して、

$$\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^a f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,dr\right)d\theta$$

となることが分かる。

例 1.5.1 (円板領域での積分)

$$I = \iint_{x^2+y^2\leq 1} x^2\,dx\,dy$$

については

$$I = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 (r\cos\theta)^2\,dr\right)d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta = \frac{1}{4}\cdot\pi = \frac{\pi}{4}.\blacksquare$$

例 1.5.2 $r = r(\theta)$ が $[\alpha, \beta]$ $(\beta - \alpha \leq 2\pi)$ で連続、ならば、極座標について

$$0 \leq r \leq r(\theta), \quad \alpha \leq \theta \leq \beta$$

で表される xy 平面上の図形 Ω の面積は

$$\mu(\Omega) = \iint_\Omega dx\,dy = \int_\alpha^\beta\left(\int_0^{r(\theta)} r\,dr\right)d\theta = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r(\theta)^2 d\theta$$

で与えられる (図を用意しよう！)。— 「扇形の面積は $\frac{1}{2}r^2\theta$」 という公式があるが、これはその一般化である。例えば Cardioid

$$r = 1 + \cos\theta \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

で囲まれた領域 Ω の面積は

$$\mu(\Omega) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos\theta)^2\,d\theta = \frac{3}{2}\pi.\blacksquare$$

例 1.5.3

$$I = \iint_\Omega (1-x^2-y^2)dx\,dy, \quad \Omega = \{(x,y); x^2+y^2 \le x,\ y \ge 0\}$$

を求めよ。この問題は前節の Fubini の定理を用いても解けるが、ここでは極座標変換を用いてみる。

$$x^2+y^2 \le x \Leftrightarrow x^2-x+y^2 \le 0 \Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \le \frac{1}{4}$$

であるから、Ω は $(1/2,0)$ を中心とする半径 $1/2$ の円盤の上半分である。

この問題については

$$x = \frac{1}{2} + r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

という変数変換が有効である。この場合も $dx\,dy = r\ drd\theta$ で、Ω に対応するのは

$$D = \{(r,\theta); 0 \le r \le 1/2,\ 0 \le \theta \le \pi\}$$

であるから、

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \left(1 - \left(\frac{1}{2}+r\cos\theta\right)^2 - (r\sin\theta)^2\right) r\ drd\theta \\ &= \int_0^\pi d\theta \int_0^{1/2} \left(\frac{3}{4}r - r^2\cos\theta - r^3\right) dr = \cdots = \frac{5\pi}{64}. \end{aligned}$$

ちょっと気づきにくいが、普通の極座標変換

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \quad (r \ge 0,\ \theta \in [0,2\pi))$$

によって、Ω に対応する領域が案外と簡単で、

$$D = \left\{(r,\theta); 0 \le r \le \cos\theta, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right\}$$

と求まる (図を描いて見ること。円周 $\partial\Omega$ は極座標で $r = \cos\theta$ と表されることを理解しよう。これは、原点を通り、x 軸から測って角度 θ をなす直線 $y = x\tan\theta$ と円の交点を考えることによって分かる。)。すなわち $\varphi(r,\theta) = (x,y)$ とすると、$\varphi(D) = \Omega$ となる。ゆえに

$$I = \iint_\Omega (1-x^2-y^2)dx\,dy = \iint_D (1-r^2)r\ drd\theta = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\cos\theta} (r-r^3)dr = \frac{5\pi}{64}.\blacksquare$$

空間極座標変換

空間極座標 (3 次元極座標、あるいは球座標, spherical coordinate)

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \quad (r \ge 0,\ 0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le \phi < 2\pi)$$

によって $\varphi\colon [0,\infty)\times[0,\pi]\times[0,2\pi)\to\mathbf{R}^3$ を定めると、

$$\varphi' = \begin{pmatrix} x_r & x_\theta & x_\phi \\ y_r & y_\theta & y_\phi \\ z_r & z_\theta & z_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

より

$$\begin{aligned} \det\varphi' &= \cos\theta\begin{vmatrix} r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \end{vmatrix} + (-1)(-r\sin\theta)\begin{vmatrix} r\sin\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ r\sin\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \end{vmatrix} \\ &= \cos\theta\cdot r\cos\theta\cdot r\sin\theta\begin{vmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{vmatrix} + (-1)(-r\sin\theta)\cdot\sin\theta\cdot r\sin\theta\begin{vmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{vmatrix} \\ &= r^2\cos^2\theta\sin\theta + r^2\sin^3\theta = r^2\sin\theta \end{aligned}$$

となるので、$r^2\sin\theta\ge 0$ に注意して[11]

$$dx\,dy\,dz = |\det\varphi'|\,drd\theta\,d\phi = r^2\sin\theta\ dr\,d\theta\,d\phi.\blacksquare$$

例 1.5.4 (球の体積) $\Omega=\{(x,y,x); x^2+y^2+z^2\le R^2\}$ は $D=\{(r,\theta,\phi); 0\le r\le R,\ 0\le\theta\le\pi,\ 0\le\phi\le 2\pi\}$ によって $\Omega=\varphi(D)$ と書ける。

ゆえに

$$\begin{aligned} \mu(\Omega) &= \iiint_\Omega 1\ dx\,dy\,dz = \iiint_D |\det\varphi'|\ drd\theta d\phi = \iiint_D r^2\sin\theta\ drd\theta d\phi \\ &= \int_0^R\left(\int_0^{2\pi}\left(\int_0^\pi r^2\sin\theta\ d\theta\right)d\phi\right) = \left(\int_0^R r^2dr\right)\cdot\left(\int_0^{2\pi}d\phi\right)\cdot\left(\int_0^\pi\sin\theta\ d\theta\right) \\ &= \frac{R^3}{3}\cdot 2\pi\cdot 2 = \frac{4\pi R^3}{3}.\blacksquare \end{aligned}$$

問　上半球 $\{(x,y,z); x^2+y^2+z^2\le R^2,\ z\ge 0\}$ や、1/8 球 $\{(x,y,z); x^2+y^2+z^2\le R^2,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0\}$ を求める場合はどうか？ (結果はもちろん明らかだが、変数変換をしたときの r, θ, ϕ の範囲がちゃんとわかるか？)

問　a, b, c を正定数とするとき、3 次元の楕円体

$$\Omega=\{(x,y,z); \frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}\le 1\}$$

(ただし $(x_0,y_0,z_0)\in\mathbf{R}^3$) の体積を求めよ。

1 次変換

極座標変換以外には、1 次変換[12]による変数変換が比較的よく出て来る。

[11] $\theta\in[0,\pi]$ であるから。
[12] $\mathbf{R}^n$ から $\mathbf{R}^n$ への線型写像を $\mathbf{R}^n$ の 1 次変換と呼ぶ (習っているはず？)。

例 1.5.5 xy 平面上の集合 Ω を、直線 $y=2x,\ y=\dfrac{x}{2},\ x+y=2$ で囲まれた三角形とするとき、

$$I=\iint_\Omega (x+y)dx\,dy$$

を求めよ。

(解) Ω は $(0,0),(4/3,2/3),(2/3,4/3)$ を頂点とする三角形であるから、$\varphi\colon \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},\quad A:=\begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

で定めると、ヤコビアン $\det\varphi'\equiv\det A=\dfrac{4}{3}$ で、Ω は uv 平面上の、3 点 $(0,0),(1,0),(0,1)$ を頂点とする三角形 $\Delta=\{(u,v);u\ge 0,\ v\ge 0,\ u+v\le 1\}$ に写像される。

$$\begin{aligned} I &= \iint_\Delta \left[\left(\frac{4}{3}u+\frac{2}{3}v\right)+\left(\frac{2}{3}u+\frac{4}{3}v\right)\right]\cdot\frac{4}{3}dudv=\frac{8}{3}\iint_\Delta (u+v)dudv \\ &= \frac{8}{3}\int_0^1\left(\int_0^{1-u}(u+v)dv\right)du=\frac{8}{9}.\blacksquare \end{aligned}$$

1.5.4　参考: 平面の 1 次変換のいろは

1 次変換に対する感覚は、変数変換の公式を理解するために必要であるにもかかわらず、多くの学生が満足に持ち合わせていない。以前は高校数学のカリキュラムに入っていたのだが…

$f\colon \mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$ について、以下の (1)–(6) が成り立つ。

(1) f が線形写像 $\iff \exists A\in M(m,n;\mathbf{R})$ s.t. $f(x)=Ax\ (x\in\mathbf{R}^n)$.

(2) $m=n,\ \exists A\in M(n;\mathbf{R})$ s.t. $f(x)=Ax\ (x\in\mathbf{R}^n)$ とするとき、次の (i)–(vi) は同値である。

- (i) f は全単射
- (ii) f は全射
- (iii) f は単射
- (iv) $\det A\ne 0$
- (v) A が逆行列を持つ
- (vi) $\operatorname{rank} A=n$

このとき $f^{-1}(x)=A^{-1}x\ (x\in\mathbf{R}^n)$ で、f は同相写像、さらに強く C^∞ 同相である。

(3) $m=n=2,\ \exists A\in M(2;\mathbf{R})$ s.t. $f(x)=Ax\ (x\in\mathbf{R}^2)$ とするとき[13]、次のいずれかただ一つだけが成り立つ。

[13]成分で書くと $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ のようになる。

(i) $f(\mathbf{R}^2) = \mathbf{R}^2$ $(\Leftrightarrow A$ が逆行列を持つ $\Leftrightarrow \operatorname{rank} A = 2)$

(ii) $f(\mathbf{R}^2)$ は原点を中心とする直線 $(\Leftrightarrow A$ は特異かつ $A \neq O \Leftrightarrow \operatorname{rank} A = 1)$

(iii) $f(\mathbf{R}^2) = \{0\}$ $(\Leftrightarrow A = O \Leftrightarrow \operatorname{rank} A = 0)$

(4) $m = n = 2$, $\exists A \in GL(2;\mathbf{R})$ s.t. $f(x) = Ax$ $(x \in \mathbf{R}^2)$ とするとき、次の (a)–(d) が成り立つ。(**注**: $GL(2;\mathbf{R}) = \{A \in M(2;\mathbf{R}); \det A \neq 0\}$ である。)

(a) f は任意の直線を直線に写す。

(b) f は任意の線分を線分に写す (内部は内部に、端点は端点に)。

(c) f は任意の平行四辺形を平行四辺形に写す (内部は内部に、周は周に、外部は外部に)。

(d) f は任意の三角形を三角形に写す (内部は内部に、周は周に、外部は外部に)。

(5) $m = n = 2$, $\exists A \in M(2;\mathbf{R})$ s.t. $f(x) = Ax$ $(x \in \mathbf{R}^2)$ とするとき、

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \quad f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \qquad \Longleftrightarrow \qquad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

(**注**: A が逆行列を持っても持たなくても関係ない。知っていると知らないとでは大違いの命題である。)

(6) $\mathbf{R}^2$ において、平行四辺形 $\{\boldsymbol{p} + t\boldsymbol{a} + s\boldsymbol{b}; t \in [0,1],\ s \in [0,1]\}$ の面積は $|\det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})|$. より強く、$A \in M(2;\mathbf{R})$ とするとき、$f \colon \mathbf{R}^2 \ni x \mapsto Ax \in \mathbf{R}^2$ は、任意の図形[14]の面積を $|\det A|$ 倍にする ($\det A < 0$ のときは「裏返し」)。

練習問題 A　上の (4) を証明せよ。(ヒント: 例えば 2 点 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ を通る直線上の任意の点は $t\boldsymbol{a} + (1-t)\boldsymbol{b}$ $(t \in \mathbf{R})$ と書けるが、$f\,(t\boldsymbol{a} + (1-t)\boldsymbol{b}) = tf\,(\boldsymbol{a}) + (1-t)f\,(\boldsymbol{b})$ である。)

練習問題 B　上の (3)–(6) の 3 次元バージョンを書け。

練習問題 C

(1) $\mathbf{R}^2$ の三角形 $\triangle(\boldsymbol{p}; \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) := \{\boldsymbol{p} + t\boldsymbol{a} + s\boldsymbol{b};\ t \geq 0,\ s \geq 0,\ t + s \leq 1\}$ の面積を求めよ。

(2) $\mathbf{R}^3$ の四面体 $T\,(\boldsymbol{p}; \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) := \{\boldsymbol{p} + t\boldsymbol{a} + s\boldsymbol{b} + r\boldsymbol{c}; t \geq 0,\ s \geq 0,\ r \geq 0,\ t + s + r \leq 1\}$ の体積を求めよ。

(3) $\mathbf{R}^n$ $(n \in \mathbf{N},\ n \geq 4)$ に一般化するとどうなるか？

[14]大学数学的ツッコミを入れると、「任意の有界 Jordan 可測集合」が正しい。

1.5.5 直観的イメージ

変数変換の公式の厳密な証明を限られた授業時間中に説明するのはやや困難である (証明に興味がある人のために付録 B.1 に収録しておく)。ここでは公式が成り立つことのおおざっぱな説明を行うにとどめる。

Ω に格子をかぶせて、Ω を閉方体の合併で近似する: $\Omega \simeq \bigcup_{j=1}^{\ell} A_j$. このとき

$$D = \varphi(\Omega) \simeq \varphi\left(\bigcup_{j=1}^{\ell} A_j\right) = \bigcup_{j=1}^{\ell} \varphi(A_j).$$

各 A_j から代表点 u_j を選ぶと、

$$\int_D f(x)\,dx \simeq \sum_{j=1}^{\ell} \int_{\varphi(A_j)} f(x)\,dx \simeq \sum_{j=1}^{\ell} f(\varphi(u_j)) m(\varphi(A_j)).$$

ここで微分の定義から、$u \to u_j$ のとき $\varphi(u) \simeq \varphi(u_j) + \varphi'(u_j)(u - u_j)$ に注意すると、

$$\varphi(A_j) \simeq \varphi(u_j) + \varphi'(u_j)(A_j - u_j) \quad (A_j - u_j \text{ は } A_j \text{ を } -u_j \text{ だけ平行移動したもの})$$

であり、$m(\varphi(A_j)) \simeq |\det \varphi'(u_j)|\, m(A_j)$. ゆえに

$$\int_D f(x)\,dx \simeq \sum_{j=1}^{\ell} f(\varphi(u_j))\,|\det \varphi'(u_j)|\, m(A_j) \simeq \int_\Omega f(\varphi(u))\,|\det \varphi'(u)|\,du. \blacksquare$$

1.6 重積分の応用

ここでは重積分の応用のうちポピュラーな (数学科以外の人にも意味がわかりそうな) ものをいくつか紹介する。

1.6.1 面積, 体積

(すでに説明して、例もいくつか示してあることだが、念のために繰り返すと) $\mathbf{R}^n$ の (Jordan 可測) 部分集合 Ω に対して、Ω の n 次元 Jordan 測度 $\mu_n(\Omega) = \int_\Omega dx$ とは、$n = 2$ のとき Ω の面積 (area)、$n = 3$ のとき Ω の体積 (volume) であった。

後は単なる計算である。Ω が連立不等式で表される条件で定義されている場合は、比較的簡単に定理 1.4.2 や命題 1.4.1 を適用できることが多い。

「○○と□□と△△で囲まれた範囲」、「○○で切り取られた」などの表現で Ω が指定されている場合は、簡単な図を描いて、Ω を定義する条件を解読する必要がある (多少の練習が必要かもしれない)。

例 1.6.1 (立体図形の体積の計算例) $\mathbf{R}^3$ において、曲面 $z = x^2 + y^2$ と平面 $z = x$ とで囲まれる部分 Ω の体積を求めよ。簡単な図を描くことで、$z = x^2 + y^2$ で下から、$z = x$ で上から

囲まれているということが分かる。すなわち

$$\Omega = \{(x,y,z); x^2+y^2 \le z \le x\}.$$

これは縦線集合である。実際

$$D := \{(x,y); x^2+y^2 \le x\},$$

さらに

$$\varphi_1(x,y) := x^2+y^2, \quad \varphi_2(x,y) := x$$

とおくと、$\varphi_1(x,y) \le \varphi_2(x,y)$ $((x,y)\in D)$ で、Ω は

$$\Omega = \{(x,y,z); (x,y)\in D,\ \varphi_1(x,y) \le z \le \varphi_2(x,y)\}$$

と表される[15]。ゆえに[16]

$$\begin{aligned}\mu(\Omega) &= \iiint_\Omega 1\,dx\,dy\,dz = \iint_D (\varphi_2(x,y)-\varphi_1(x,y))\,dx\,dy = \iint_D (x-x^2-y^2)\,dx\,dy \\ &= \cdots \text{途中略} \cdots = \frac{\pi}{32}.\blacksquare\end{aligned}$$

1.6.2 平均値

Ω は $\mathbf{R}^3$ の Jordan 可測集合で、関数 $w\colon \Omega \to \mathbf{R}$ は有界連続で正の値を取る関数とする。$f\colon \Omega\to\mathbf{R}$ を有界連続とするとき、f の重み w の**加重平均** (weighted mean, weighted average) とは、

$$\frac{\displaystyle\int_\Omega f(x)w(x)\,dx}{\displaystyle\int_\Omega w(x)\,dx}$$

のことをいう。$w\equiv 1$ のとき、すなわち

$$\frac{\displaystyle\int_\Omega f(x)\,dx}{\displaystyle\int_\Omega dx} = \frac{\displaystyle\int_\Omega f(x)\,dx}{\mu(\Omega)}$$

を単に f の**平均値** (mean, average) という。

(ケーキで例えをすると、体積割る底面積で平均の高さが求まる、という話になる。)

(加重平均については、離散的な場合に $\dfrac{\sum_i f_i w_i}{\sum_i w_i}$ となることを何か例をあげて説明しておき、照らし合わせる。)

[15] ここで大事なのは、D の決め方である。よく考えて納得すること。

[16] $x = r\cos\theta + 1/2$, $y = r\sin\theta$ とおくと、$0\le r\le 1/2$, $0\le\theta<2\pi$ で、$dx\,dy = r dr\,d\theta$, $x-x^2-y^2 = 1/4-r^2$ となるので、$\mu(\Omega) = \int_0^{1/2} dr \int_0^{2\pi}(1/4-r^2) r d\theta = 2\pi\left(\frac14\cdot\frac12\cdot\left(\frac12\right)^2 - \frac14\left(\frac12\right)^4\right) = \dfrac{\pi}{32}$.

例 1.6.2 連続関数 $f\colon \Omega\to\mathbf{R}$ と、$a\in\Omega$ に対して、a を中心とする半径 r の球における f の平均

$$\frac{1}{\mu(B(a;r))}\int_{B(a;r)} f(x)\,dx$$

は $r\to 0$ のとき $f(a)$ に収束する。実際、

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mu(B(a;r))}\int_{B(a;r)} f(x)\,dx-f(a) &= \frac{1}{\mu(B(a;r))}\int_{B(a;r)} f(x)\,dx-f(a)\frac{1}{\mu(B(a;r))}\int_{B(a;r)} dx\\
&= \frac{1}{\mu(B(a;r))}\int_{B(a;r)} [f(x)-f(a)]\,dx
\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{\mu(B(a;r))}\int_{B(a;r)} f(x)\,dx-f(a)\right| &\le \frac{1}{\mu(B(a;r))}\int_{B(a;r)} |f(x)-f(a)|\,dx\\
&\le \max_{x\in B(a;r)}|f(x)-f(a)|\,\frac{1}{\mu(B(a;r))}\int_{B(a;r)} dx\\
&= \max_{x\in B(a;r)}|f(x)-f(a)|\,.
\end{aligned}$$

f が a で連続であることから、この右辺は $r\to+0$ のとき 0 に収束する。ゆえに

$$\lim_{r\to+0}\frac{1}{\mu(B(a;r))}\int_{B(a;r)} f(x)\,dx=f(a).\blacksquare$$

1.6.3 重心

$\mathbf{R}^3$ において、ある物体の占める閉領域[17]を $\overline{\Omega}$, 点 (x,y,z) での密度を $\rho=\rho(x,y,z)$ とするとき、物体の**重心** (barycenter, center of gravity, center of mass) $\boldsymbol{g}=(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$ とは、

$$\begin{aligned}
\overline{x} &= \frac{1}{M}\iiint_\Omega x\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz,\\
\overline{y} &= \frac{1}{M}\iiint_\Omega y\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz,\\
\overline{z} &= \frac{1}{M}\iiint_\Omega z\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz
\end{aligned}$$

で定義される。ただし

$$M:=\iiint_\Omega \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz\quad(\text{全質量}).$$

ベクトル形式で書き換えておくと

$$\boldsymbol{g}=\frac{1}{M}\int_\Omega \boldsymbol{x}\rho(x)\,d\boldsymbol{x},\quad M=\int_\Omega \rho(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}.$$

次のように標語的にまとめられる:

[17]領域とは連結な開集合のこと。閉領域とは、ある領域の閉包となる集合のこと。

重心とは、密度を重みとした座標の加重平均である。

例 1.6.3 (三角形の重心) 平面上の 3 点 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ を頂点とする密度一様な 3 角形 Ω の重心は $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})/3$ である。

実際、$(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ を頂点とする三角形 $\Delta := \{(u,v)^T; u \geq 0, v \geq 0, u+v \leq 1\}$ を定義域とする写像 $\varphi\colon \Delta \to \mathbf{R}^2$ を

$$\varphi(u,v) = \varphi\left(\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right) := \boldsymbol{a} + u(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}) + v(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})$$

で定めると、$\varphi(\Delta) = \Omega$ で、$\det \varphi'(u,v) = \det(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})$ であるから、

$$d\boldsymbol{x} = dxdy = |\det \varphi'(u,v)|\, dudv = |\det(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})|\, dudv = 2\mu(\Omega) dudv.$$

密度を ρ とすると、全質量 M は

$$M = \int_\Omega \rho\, d\boldsymbol{x} = \rho \int_\Omega d\boldsymbol{x} = \rho\mu(\Omega)$$

であるから、重心 $\boldsymbol{g}$ は[18]

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{g} &= \frac{1}{M}\int_\Omega \rho\boldsymbol{x}\, d\boldsymbol{x} = \frac{1}{\rho\mu(\Omega)}\int_\Omega \rho\boldsymbol{x}\, d\boldsymbol{x} = \frac{1}{\mu(\Omega)}\int_\Omega \boldsymbol{x}\, d\boldsymbol{x} \\
&= \frac{1}{\mu(\Omega)}\iint_\Delta (\boldsymbol{a} + u(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}) + v(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}))\, 2\mu(\Omega)\, dudv \\
&= 2\left[\left(\iint_\Delta dudv\right)\boldsymbol{a} + \left(\iint_\Delta u\, dudv\right)(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}) + \left(\iint_\Delta v\, dudv\right)(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})\right] \\
&= 2\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{a} + \frac{1}{6}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}) + \frac{1}{6}(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})\right) = \frac{1}{3}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}).\blacksquare
\end{aligned}$$

1.6.4 慣性モーメント

$\mathbf{R}^3$ において、ある物体の占める閉領域を $\overline{\Omega}$, 点 (x,y,z) での密度を $\rho = \rho(x,y,z)$ とする。ある定直線 ℓ から、物体 $\overline{\Omega}$ 上の各点 (x,y,z) までの距離を $p(x,y,z)$ とすれば、ℓ に関する物体 $\overline{\Omega}$ の**慣性モーメント** I は

$$I = \iiint_\Omega \rho(x,y,z)p(x,y,z)^2\, dx\, dy\, dz$$

で定義される。また、この物体 $\overline{\Omega}$ の、直線 ℓ に関する**回転半径** R とは、

$$I = MR^2$$

を満たす正数として定義される (要するに $R := \sqrt{I/M}$ とする)。

[18] $\iint_\Delta dudv$ は底面積 1/2, 高さ 1 の三角柱の体積なので 1/2, $\iint_\Delta u\, dudv$ と $\iint_\Delta v\, dudv$ は底面積 1/2, 高さ 1 の三角錐の体積なので 1/6 である (もちろん地道に計算しても良いが)。

1.7 広義積分

この節は大幅な書き換えを検討中。符号一定の場合を一通り説明してから、絶対収束の話と主値積分の話をちょっとずつ。「微分積分学２」の方でも作業が進んでいる。

これまで、この解析概論 II では

有界 Jordan 可測集合上の**有界**な関数の積分

を扱って来た。この節では「有界」という条件を落した場合を考える。これは応用範囲が案外と広い。

実は、この種の積分は、 Lebesgue 積分で取り扱うのがふさわしく、Riemann 積分の範囲ではあまりシャープな結果が得られない。そこで、ここでは欲張らず、実用上問題ない程度の結果で満足することにする。キーワードは「絶対収束」であり、無限級数とよく似たところがある。

1.7.1 1 次元の場合の復習

1 次元の広義積分については 1 年生で学んでいる。いくつか例をあげて、思い出してもらおう。

例 1.7.1 $\alpha > 0$ に対して

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx$$

は? 積分範囲 $[1,\infty)$ は有界ではない。これを有界な区間 $[1,R]$ の $R\to\infty$ の極限と考えて、

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx \overset{\text{def.}}{=} \lim_{R\to\infty}\int_1^R \frac{1}{x^\alpha}\,dx$$

と定義したのであった。

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{R\to\infty}\begin{cases}\left[\dfrac{1}{1-\alpha}x^{-\alpha+1}\right]_1^R & (\alpha\ne 1)\\ [\log x]_1^R & (\alpha = 1)\end{cases} = \begin{cases}\dfrac{1}{\alpha-1} & (\alpha>1)\\ \infty & (0<\alpha\le 1).\blacksquare\end{cases}$$

例 1.7.2 $\beta > 0$ とするとき

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\beta}\,dx$$

は? $f(x) = \dfrac{1}{x^\beta}$ とおくと、

$$\lim_{x\downarrow 0} f(x) = +\infty$$

であるから、f は $(0,1]$ で有界ではない。しかし、$0<\forall\varepsilon<1$ に対して、f は $[\varepsilon,1]$ において有界で可積分。そこで

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\beta}\,dx \overset{\text{def.}}{=} \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^\beta}\,dx$$

と定義したのであった。結果は

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\beta}\,dx = \begin{cases}+\infty & (\beta\ge 1)\\ \dfrac{1}{1-\beta} & (0<\beta<1).\blacksquare\end{cases}$$

例 1.7.3

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx.$$

積分範囲 $[0,\infty)$ は有界ではない。これを有界な区間 $[0,R]$ の極限と考えて、

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx \overset{\text{def.}}{=} \lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

と定義したのであった。

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{R\to\infty}\left[\mathrm{Tan}^{-1}x\right]_0^R = \frac{\pi}{2}.$$

(ここで Tan^{-1} は $\tan$ の逆関数 $\arctan = \tan^{-1}$ の主値を表すものとする。) ■

例 1.7.4 (確率積分)

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx.$$

これは積分範囲が有界でないから

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-x^2}\,dx$$

と定義するわけだが、$f(x) \overset{\text{def.}}{=} e^{-x^2}$ の原始関数の具体形が得られないので、この後の計算が難しい。しかし

$$g(x) \overset{\text{def.}}{=} \begin{cases} 1 & (x\in[0,1]) \\ \dfrac{1}{x^2} & (x\in[1,\infty)) \end{cases}$$

とおくと

$$|f(x)| \le g(x) \quad (x\in[0,\infty))$$

であること[19]、さらに

$$\int_0^\infty g(x)\,dx < \infty$$

であることが分かる。ゆえに I は存在する。 ■

1.7.2 広義積分のための共通の仮定

この項では、$\mathbf{R}^n$ における広義積分を定義するために 3 つの仮定 (A1), (A2), (A3) を導入する。

Ω における関数 f の広義積分 $\displaystyle\int_\Omega f(x)\,dx$ というものを定義するのが目標である。例えば

$$\int_{\mathbf{R}^n} \frac{1}{|x|}\,dx$$

[19]微分法で $x^2e^{-x^2}$ の増減を調べると、最大値 $1/e$ を持つことが分かるので、$x^2e^{-x^2} \le 1/e \le 1$. ゆえに $e^{-x^2} \le \dfrac{1}{x^2}$.

のような式に意味をつけよう、ということである。この例では $\Omega=\mathbf{R}^n$, $f(x)=\dfrac{1}{|x|}$ であるが、f は Ω 全体で定義されているわけではないことに注意しよう (原点では分母が 0 になってナンセンス)。そこで、f は Ω から、ある Lebesgue 零集合 N をのぞいた $\Omega\setminus N$ の上で定義されていると考えることにする。この例では $N=\{0\}$ とするわけである。

これまでは、有界な集合に対してのみ Jordan 可測性を定義してあったが、非有界な Ω に対しては、次の条件が成り立つとき、Jordan 可測であると定義する。

(1.9) $\quad\forall R>0$ に対して $\Omega\cap B(0;R)$ は (有界な) Jordan 可測集合である.

さて、多次元の広義積分の定義を難しくしているのは、積分範囲 Ω の形状にバラエティーがあり、近似の仕方が無数にあるからである[20]。そこで、 $\Omega'=\Omega\setminus N$ をいかに近似するかという問題を考える必要がある。

定義 1.7.1 (近似列) $\Omega\subset\mathbf{R}^n$, $K_m\subset\mathbf{R}^n$ $(m\in\mathbf{N})$ とするとき、 $\{K_m\}_{m\in\mathbf{N}}$ が Ω の**近似列**であるとは、以下の 3 条件が成り立つことである。

(1) 各 K_m はコンパクトな Jordan 可測集合で、Ω に含まれる。

(2) $K_1\subset K_2\subset K_3\subset\cdots\subset K_m\subset K_{m+1}\subset\cdots$.

(3) Ω 内の任意のコンパクト集合 K に対して $\exists m_0\in\mathbf{N}$ s.t. $K\subset K_{m_0}$.

注意 1.7.1 (Ω の近似列は Ω を覆う) $\{K_m\}_{m\in\mathbf{N}}$ が Ω の**近似列**であるとき $\Omega=\bigcup_{m=1}^{\infty}K_m$ となる。実際、$\forall x\in\Omega$ について、$\{x\}$ は Ω に含まれるコンパクト集合であるから、近似列の定義によって、$\exists m_0\in\mathbf{N}$ s.t. $\{x\}\subset K_{m_0}$. ゆえに $x\in\bigcup_{m=1}^{\infty}K_m$. したがって $\Omega\subset\bigcup_{m=1}^{\infty}K_m$. 一方 $\Omega\supset\bigcup_{m=1}^{\infty}K_m$ は明らかだから、$\Omega=\bigcup_{m=1}^{\infty}K_m$. ■

例 1.7.5 $\Omega=(0,1)$, $K_m=\left[\dfrac{1}{m},1-\dfrac{1}{m}\right]$ とすると、$\{K_m\}_{m\in\mathbf{N}}$ は Ω の近似列になる。実際、定義の条件 (1), (2) は明らかである。条件 (3) については、K と $\partial\Omega=\{0,1\}$ との距離を d とおくと、$d>0$ であるので[21]、$m_0>1/d$ となるような $m_0\in\mathbf{N}$ を取れば $K\subset\left[\dfrac{1}{m_0},1-\dfrac{1}{m_0}\right]=K_{m_0}$. ■

例 1.7.6 $\Omega=\mathbf{R}^n$, $K_m=\overline{B}(0;m)=\{x\in\mathbf{R}^n;|x|\le m\}$ とすると、$\{K_m\}_{m\in\mathbf{N}}$ は Ω の近似列になる。

実際、条件 (1), (2) は明らかである。(3) を満たすことを証明する。K を Ω の任意のコンパクト集合とする。特に K は有界であるから、$\exists R\in\mathbf{R}$ s.t. $K\subset B(0;R)$. $m_0\in\mathbf{N}$ を $m_0\ge R$ となるように取れば、$K\subset B(0;R)\subset B(0;m_0)\subset K_{m_0}$. ■

[20] 1 次元の場合は、積分範囲とする領域が実質的に区間しかないため、近似の仕方が本質的に一通りしかなかった。

[21] $0\notin K$, $1\notin K$ であり、K はコンパクト集合なので、連続関数 $K\ni x\mapsto\min\{x,1-x\}$ は K の上で最小値を持ち、$d=\inf_{x\in K}\min\{x,1-x\}=\min_{x\in K}\min\{x,1-x\}>0$ である。

例 1.7.7 $\Omega = \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$, $K_m = \{x; 1/m \le |x| \le |m|\}$ とすると、$\{K_m\}_{m\in\mathbf{N}}$ は Ω の近似列になる。証明は上の例とほぼ同じである。■

普通に考えられる大抵の「素直な」集合は近似列を持ち、それを見つけるのは難しくないことが分かる[22]。

それでは、いよいよ 3 つの仮定を導入しよう。

(A1) Ω は Jordan 可測集合である。すなわち Ω は有界な Jordan 可測集合であるか、条件 (1.9) を満たす。

(A2) N は Ω に含まれる Jordan 零集合で、$\Omega \setminus N$ は少なくとも一つの近似列を持つ。

(A3) f は $\Omega \setminus N$ で定義され、$\Omega \setminus N$ 内の任意のコンパクト Jordan 可測集合 K 上で、有界かつ積分可能である (つまり通常の積分 $\displaystyle\int_K f(x)\,dx$ が存在する)。

f が $\Omega \setminus N$ 上の連続関数であれば (A3) は自動的に成り立つ。

1.7.3 広義積分の定義

ここで紹介する $\mathbf{R}^n$ における広義積分の定義は、たとえ 1 次元の場合でも、1.7.1 で紹介 (復習) した 1 次元の広義積分とは若干異なる (これについては後で説明する) ことを最初に注意しておこう。

定義 1.7.2 (R^n の広義積分) Ω, N, f は前小節の仮定 (A1), (A2), (A3) を満たすとするとき、f が Ω で**広義積分可能**であるとは、$\Omega \setminus N$ の任意の近似列 $\{K_m\}_{m\in\mathbf{N}}$ に対して、$\displaystyle\int_{K_m} f(x)\,dx$ は $m \to \infty$ とするとき共通の極限 I を持つことをいう。このとき、この極限 I を $\displaystyle\int_\Omega f(x)\,dx$ で表し、f の Ω 上の**広義積分** (improper integral) と呼ぶ。

注意 1.7.2 (広義積分に関する言葉使い) f が Ω で広義積分可能であることを、「広義積分 $\displaystyle\int_\Omega f(x)\,dx$ が**存在する**」と言ったり、「広義積分 $\displaystyle\int_\Omega f(x)\,dx$ が**収束する**」と言ったりする。広義積分可能でないことを「広義積分 $\displaystyle\int_\Omega f(x)\,dx$ が**発散する**」とも言う。だから「次の広義積分の収束・発散を調べよ」は「広義積分可能であるか、そうでないか、調べよ」という意味である。■

注意 1.7.3 (普通の積分を広義積分と考えても矛盾しない) Ω が有界 Jordan 可測集合、f が Ω 上の有界関数とするとき、f の Ω 上の普通の積分と f の Ω 上の広義積分の両方が考えられるが、両者は一致する。■

[22]複雑な形の集合については、「点と集合の距離」という概念を用いると便利なことがある。これについては「解析概論 I 講義ノート」(`http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/lecture/kaisekigairon-1/` にある) の付録を参照せよ。

注意 1.7.4 1 年生で学んだ 1 次元の広義積分と、ここで定義した $\mathbf{R}^n$ 上の広義積分の $n=1$ の場合は、実は一致しない。例えば

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$$

は前者の定義では広義積分可能であるが[23]、後者の定義では広義積分可能ではない[24]。 ■

1.7.4 広義積分の収束・発散の判定法

前小節で広義積分を定義したが、この定義に直接従って広義積分可能であることを示すのは、簡単な場合にしか出来ない (任意の近似列に対して、積分の極限が存在することを示すのは大変である)。

このあたりの事情は、無限級数の収束・発散の議論に似ている。無限級数の場合に、正項級数については議論が簡単になり、これを基礎とした議論を展開するが、広義積分についても、非積分関数 f が非負関数である場合は簡単である。

補題 1.7.1 (正の関数については、ただ一つの近似列でチェックすればよい) Ω, N, f は (A1), (A2), (A3) を満たし、さらに

(1) $\Omega \setminus N$ 上で $f \geq 0$.

(2) $\exists \{K_m\}_{m\in\mathbf{N}}$ s.t. $\Omega \setminus N$ の近似列で、$\displaystyle\lim_{m\to\infty}\int_{K_m} f(x)\,dx$ が存在する。

が成り立つならば、 f は Ω 上で広義積分可能である。

証明 $\{K'_m\}_{m\in\mathbf{N}}$ を $\Omega \setminus N$ の任意の近似列とする。$\{K_m\}_{m\in\mathbf{N}}$ が近似列であることから、任意の $m\in\mathbf{N}$ に対して、$K'_m \subset K_{m_0}$ を満たす $m_0 \in \mathbf{N}$ が存在する。$f\geq 0$ であるから、

$$\int_{K'_m} f(x)\,dx \leq \int_{K_m} f(x)\,dx \leq \lim_{m\to\infty}\int_{K_m} f(x)\,dx.$$

したがって $\left\{\int_{K'_m} f(x)\,dx\right\}_{m\in\mathbf{N}}$ は上に有界な数列である。単調増加であることは明らかなので収束し、

$$\lim_{m\to\infty}\int_{K'_m} f(x)\,dx \leq \lim_{m\to\infty}\int_{K_m} f(x)\,dx$$

が成り立つ。ところで $\{K_m\}$ と $\{K'_m\}$ の役割を入れ替えることができるので、逆向きの不等式も成り立ち、結局

$$\lim_{m\to\infty}\int_{K'_m} f(x)\,dx = \lim_{m\to\infty}\int_{K_m} f(x)\,dx.$$

共通の極限が存在することが示されたので f は Ω 上で広義積分可能である。 ■

---

[23] 実際 $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{\sin x}{x}\,dx = \pi/2$ が成り立つ。これは複素関数論のテキストによく載っている。

[24] $A_n := [(2n-2)\pi, (2n-1)\pi]$, $B_n := [(2n-1)\pi, 2n\pi]$ とおくとき、$\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \int_{A_n}\frac{\sin x}{x}\,dx = \infty$, $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \int_{B_n}\frac{\sin x}{x}\,dx = -\infty$ が成り立つ。

補題 1.7.2 (絶対値が広義積分可能な関数で押えられれば広義積分可能) Ω, N は (A1), (A2) を満たし、$\Omega \setminus N$ 上定義された二つの関数 f, φ は (A3) を満たす。さらに二条件

(1) φ は $\Omega \setminus N$ 上で $\varphi \geq 0$ を満たし、Ω で広義積分可能である。

(2) $\Omega \setminus N$ 上で $|f| \leq \varphi$.

が成り立つならば、 f は Ω で広義積分可能である。

証明　任意の $x \in \Omega \setminus N$ に対して

$$f_+(x) := \max\{f(x), 0\}, \quad f_-(x) := \max\{-f(x), 0\}$$

とおいて f_+, f_- を定義すると、f_+, f_- はともに (A3) を満たし、

$$f(x) = f_+(x) - f_-(x), \quad 0 \leq f_+(x) \leq |f(x)| \leq \varphi(x), \quad 0 \leq f_-(x) \leq |f(x)| \leq \varphi(x)$$

が成り立つ。

$$\int_{K_m} f_+(x)\,dx, \int_{K_m} f_-(x)\,dx \leq \int_{K_m} \varphi(x)\,dx \leq \int_\Omega \varphi(x)\,dx < \infty.$$

ゆえに $m \to \infty$ のとき、$\left\{\int_{K_m} f_+(x)\,dx\right\}_{m \in \mathbf{N}}$, $\left\{\int_{K_m} f_-(x)\,dx\right\}_{m \in \mathbf{N}}$ は収束するので、補題 1.7.1 が適用できて、f_+, f_- は Ω で広義積分可能であることが分かる。ゆえに $f = f_+ - f_-$ は Ω で広義積分可能である。■

この補題は補題 1.7.1 と組み合わせることで、威力を発揮する (φ についてはただ一つの近似列でチェックすればよいから)。このことを背景として、次の定義をする。

定義 1.7.3 (絶対収束) Ω, N, f は (A1), (A2), (A3) を満たすとき、広義積分 $\int_\Omega f(x)\,dx$ が**絶対収束**するとは、 $|f|$ が Ω で広義積分可能であることと定義する。

上の 補題 1.7.2 で $\varphi = |f|$ とすることで、次の定理は明らかである。

定理 1.7.1 (広義積分は絶対収束するならば収束する) Ω, N, f は (A1), (A2), (A3) を満たし、広義積分 $\int_\Omega f(x)\,dx$ が絶対収束すると仮定すると、 f は Ω で広義積分可能である。

注意 1.7.5 この定理は、無限級数についての「絶対収束 $\Longrightarrow$ 収束」という定理に非常によく似ている。この後の議論や計算のテクニックなどもそっくりである。無限級数の理論について復習して、広義積分の理論と比較することは良い勉強である。 ■

注意 1.7.6 (何度も繰り返してしつこく思われるかもしれないが) この定理のありがたいところは、ただ一つの近似列についてのみチェックすれば良い、というところにある。(広義積分可能性の定義においては、「任意の」近似列に対しての条件を要請していて、チェックするのがとても難しい。) ■

注意 1.7.7 f が非負であるとき、すなわち Ω 上で $f \geq 0$ であるとき、明らかに「絶対収束 $\equiv$ 普通の収束 (広義積分可能)」である。実は (証明はしないが)、広義積分の定義として、この節で展開した流儀を採用すると、一般に「絶対収束 $\equiv$ 普通の収束 (広義積分可能)」が成り立つ。(任意の近似列に対して、極限値が存在することを仮定するのは、非常に強い要請で、結局は絶対収束を課するのと同等になってしまう、ということである。) ■

注意 1.7.8 数列 $\displaystyle\int_{K_m} |f(x)|\,dx$ $(m = 1, 2, 3, \cdots)$ は単調増加だから、絶対収束というのは、これが上に有界である、すなわち

$$\exists M \in \mathbf{R} \text{ s.t. } \forall m \in \mathbf{N} \quad \int_{K_m} |f(x)|\,dx < M.$$

ということを意味する[25]。 ■

1.7.5 広義積分の計算手順

前項まで、結構長い議論となってしまったが、ここでは

「次の広義積分の収束・発散を調べよ」

あるいは

「次の広義積分を求めよ」

という問題に対して、どうすればよいか、まとめてみよう。

1. まず Ω, N, f が何であるか、はっきりと認識しよう。
   (Ω と f の「式の形」は明らかだが、f が定義できていない点があるかどうかチェックして、それらの点全体を N とおき、Lebesgue 零集合であることを確認する。)
2. f の符号が一定 (つまり常に 0 以上か、あるいは常に 0 以下) でなければ、絶対収束であるかどうかチェックする。例えば次のいずれかを行なう。
   (a) $\Omega \setminus N$ の近似列 $\{K_m\}_{m\in\mathbf{N}}$ を (後の計算がなるべく楽になりそうに) 一つ選んで、$\displaystyle\int_{K_m} |f(x)| dx$ が極限を持つかどうか調べる。
   (b) 具体的な極限値が計算できなくても、無限大に発散するかどうかだけチェックすれば十分である。そこで $|f| \leq \varphi$ なる関数 φ で、$\displaystyle\int_{K_m} \varphi(x)\,dx$ が収束するものがないかどうか調べる。
3. $\Omega \setminus N$ の近似列 $\{K_m\}_{m\in\mathbf{N}}$ を一つ選んで、$\displaystyle\int_{K_m} f(x)\,dx$ を計算する。有限の値に収束すれば、それがこの広義積分の値である。

---
25 「上に有界な単調増加数列は収束する」という定理がある。

例 1.7.8 (被積分関数が非有界) 広義積分

$$I = \iint_{x^2+y^2\le 1} \frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

を求めてみよう。$\Omega = \{(x,y); x^2+y^2 \le 1\}$, $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $N = \{(0,0)\}$ である。 $f \ge 0$ であるから、近似列を一つ取って計算すればよい。

$$K_m = \{(x,y); 1/m^2 \le x^2+y^2 \le 1\}$$

とおくと、$\{K_m\}_{m\in\mathbf{N}}$ は $\Omega \setminus N$ の近似列で、極座標変換

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta \quad (r \ge 0,\ \theta \in [0,2\pi))$$

によって K_m に対応するのは

$$D_m = \{(r,\theta); 1/m \le r \le 1,\ \theta \in [0,2\pi)\}$$

である。よって、

$$\iint_{K_m} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D_m} \frac{1}{r}\cdot r\,drd\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{1/m}^1 dr = 2\pi\left(1-\frac{1}{m}\right) \to 2\pi \quad (m\to\infty).$$

ゆえに $I = 2\pi$. ■

例 1.7.9 (被積分関数が正負両方の値を取る) 広義積分

$$\iint_{x^2+y^2\le 1} \frac{y}{x^2+y^2}dx\,dy$$

については、被積分関数が正にも負にもなるので、厳密には、まず

$$\iint_{x^2+y^2\le 1} \frac{|y|}{x^2+y^2}dx\,dy$$

を調べることになる (つまり、絶対収束かどうか)。これが存在することは $K_m = \{1/m^2 \le x^2+y^2 \le 1\}$ として、

$$\iint_{K_m} \frac{|y|}{x^2+y^2}dx\,dy = \iint_{1/m\le r\le 1, \theta\in[0,2\pi)} \frac{|r\sin\theta|}{r^2}\cdot r\,drd\theta = 4(1-1/m) < 4$$

から簡単に分かる。それから、後は上の例と同じである。答は 0. これは対称性に気づけば明らか。 ■

例 1.7.10 (積分範囲が非有界) α を正の定数とするとき、広義積分

$$I = \iint_{x^2+y^2\ge 1} \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^\alpha}$$

については、$\Omega = \{(x,y); x^2+y^2 \geq 1\}$, $f(x,y) = \dfrac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}$, $N = \emptyset$ (空集合) である。 $f \geq 0$ であるから、一つ近似列を取って計算すればよい。

$$K_m = \{(x,y); 1 \leq x^2+y^2 \leq m^2\}$$

とおくと、$\{K_m\}_{m \in \mathbf{N}}$ は Ω の近似列で、極座標変換

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta \quad (r \geq 0,\, \theta \in [0,2\pi))$$

によって K_m に対応するのは

$$D_m = \{(r,\theta); 1 \leq r \leq m,\ \theta \in [0,2\pi)\}$$

である。よって、

$$\begin{aligned}
\iint_{K_m} f(x,y)\,dx\,dy &= \iint_{D_m} \frac{1}{r^{2\alpha}} \cdot r\ drd\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^m r^{1-2\alpha} dr \\
&= 2\pi \times \begin{cases} \left[\dfrac{r^{2(1-\alpha)}}{2(1-\alpha)}\right]_1^m = \dfrac{m^{2(1-\alpha)}-1}{2(1-\alpha)} & (1-2\alpha \neq -1) \\ [\log r]_1^m = \log m & (1-2\alpha = -1) \end{cases} \\
&\to \begin{cases} \dfrac{\pi}{\alpha-1} & (\alpha > 1) \\ \infty & (\alpha \leq 1) \end{cases} \qquad (m \to \infty).
\end{aligned}$$

ゆえに $\alpha > 1$ のとき広義積分は収束して値は $\pi/(\alpha-1)$, $0 < \alpha \leq 1$ のとき広義積分は発散する。 ■

例 1.7.11 (収束を示すだけなら、上から収束する関数で押えるだけで OK) 広義積分

$$I = \iint_{x^2+y^2 \geq 1} \frac{1}{x^4+2x^2y^2+y^4+x^2+1} dx\,dy$$

の収束・発散を調べてみよう。$\{K_m\}$ を一つ選んで、K_m 上の積分を計算しようと考えても出来るかも知れないが、少し計算が面倒である。

$$\frac{1}{x^4+2x^2y^2+y^4+x^2+1} \leq \frac{1}{x^4+2x^2y^2+y^4} = \frac{1}{(x^2+y^2)^2}$$

に気がつくと、

$$\iint_{x^2+y^2 \geq 1} \frac{1}{(x^2+y^2)^2} dx\,dy$$

が収束するのを示すのは簡単なので (すぐ上の例でやった)、I が収束することが分かる。 ■

例 1.7.12 (確率積分) 確率論の正規分布[26]の話などに現れる

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\ dx$$

[26]平均 m, 分散 σ^2 の正規分布の密度関数は $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right]$ であるが、これを $\mathbf{R}$ 全体で積分すると 1 であることの確認等に必要である。

について考える。まず

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; x \ge 0, y \ge 0\}, \quad f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$$

として、

$$\iint_\Omega f(x,y)dx\,dy$$

を考えよう。次式で Ω の近似列 $\{K_n\}$, $\{C_n\}$ を定義する:

$$K_n = [0,n] \times [0,n], \quad C_n = \{(x,y); x \ge 0, y \ge 0, x^2+y^2 \le n^2\}.$$

まず f は C_n で積分可能で、

$$\iint_{C_n} f(x,y)\,dx\,dy = \frac{\pi}{4}(1-e^{-n^2}) \to \frac{\pi}{4}.$$

$f \ge 0$ に注意すると、これから f は Ω で絶対収束していることが分かる。従って

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{n\to\infty} \iint_{K_n} f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{n\to\infty}\left(\int_0^n e^{-x^2}\,dx\right)^2.$$

ゆえに

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.\blacksquare$$

1.7.6 ガンマ関数とベータ関数

広義積分は応用上実に様々なものが現れるが、かなり多くのものが以下に導入する二つの関数「ガンマ関数 Γ」、「ベータ関数 B」 (それ自身広義積分で定義される) を用いて表現可能である。そこで、この二つの関数の性質を詳しく調べておくと便利である。

(ガンマ関数、ベータ関数とも 1 変数の広義積分ではあるが、後で紹介する**ガンマ関数の積公式**の証明は、ここで紹介するような重積分を利用するのが普通である。)

補題 1.7.3 (ガンマ関数の定義のための準備)

$$I = \int_1^\infty e^{-x}x^{s-1}\,dx \quad (s \in \mathbf{R}), \tag{1.10}$$

$$J = \int_0^1 e^{-x}x^{s-1}\,dx \quad (s > 0) \tag{1.11}$$

はともに絶対収束する広義積分である。

証明　まず I から考える。

$$e^{-x}x^{s-1} \le \frac{M}{x^2} \quad (x \in [1,\infty))$$

となる $M \in \mathbf{R}$ が存在することを示せばよいが、これは

$$[1,\infty) \ni x \longmapsto e^{-x}x^{s+1}$$

が上に有界であることと同値で、これを確かめるのは簡単である。次に J について考えると、まず、

$$e^{-x}x^{s-1} \leq x^{s-1} \quad (x \in (0,1])$$

である。$s-1 > -1$ に注意すると、 x^{s-1} は $(0,1]$ で広義積分可能であるから、 J は絶対収束である。 ■

補題 1.7.4 (ベータ関数の定義のための準備) $p > 0$, $q > 0$ に対して次式で定義される広義積分は絶対収束する。

$$I = \int_0^{1/2} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx, \tag{1.12}$$

$$J = \int_{1/2}^{1} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx. \tag{1.13}$$

証明　まず

$$x^{p-1}(1-x)^{q-1} \leq x^{p-1} \quad (x \in (0,1/2]),$$

$$\int_0^{1/2} x^{p-1}\,dx < \infty \quad (\because p-1 > -1)$$

であるから I は絶対収束する。次に

$$x^{p-1}(1-x)^{q-1} \leq (1-x)^{q-1} \quad (x \in [1/2,1))$$

であり、$t = 1-x$ と変数変換することにより

$$\int_{1/2}^{1} (1-x)^{q-1}\,dx = \int_0^{1/2} t^{q-1}\,dx < \infty \quad (\because q-1 > -1)$$

であるから J も絶対収束する。 ■

定義 1.7.4 (ガンマ関数, ベータ関数) (1) $\Gamma\colon (0,\infty) \to \mathbf{R}$ を

$$\Gamma(s) \overset{\text{def.}}{=} \int_0^{\infty} e^{-x}x^{s-1}\,dx \tag{1.14}$$

により定義し、**ガンマ関数**と呼ぶ。

(2) $B\colon (0,\infty)\times(0,\infty) \to \mathbf{R}$ を

$$B(p,q) \overset{\text{def.}}{=} \int_0^{1} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx \tag{1.15}$$

により定義し、**ベータ関数**と呼ぶ。

命題 1.7.1 (ガンマ関数, ベータ関数の性質) ガンマ関数 Γ, ベータ関数 B について、以下の (1)–(5) が成り立つ。

(1) $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ $(s > 0)$.

(2) $\Gamma(1) = 1$.

(3) $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

(4) $B(p,q) = 2\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^{2p-1}\theta\,\cos^{2q-1}\theta\,d\theta \quad (p,q>0)$.

(5) (**ガンマ関数の積公式**) $\quad B(p,q) = \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad (p,q>0)$.

証明　ほとんどは簡単である。(5) については、 $E = \{(x,y); x \geq 0, y \geq 0\}$ とおくと、

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \int_0^\infty e^{-x}x^{p-1}\,dx \int_0^\infty e^{-y}y^{q-1}\,dy = \int_E e^{-x-y}x^{p-1}y^{q-1}\,dx\,dy.$$

ここで

$$\begin{cases} x = uv \\ y = u(1-v) \end{cases}$$

と変数変換する。

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(x,y)} = -u$$

であり、 E に対応するのは

$$D = \{(u,v); u \geq 0, 0 \leq v \leq 1\}$$

である。それゆえ

$$\begin{aligned} \Gamma(p)\Gamma(q) &= \iint_D e^{-u}u^{p+q-1}v^{p-1}(1-v)^{q-1}\,dudv \\ &= \int_0^\infty e^{-u}u^{p+q-1}\,du \int_0^1 v^{p-1}(1-v)^{q-1}\,dv \\ &= \Gamma(p+q)B(p,q). \blacksquare \end{aligned}$$

注意 1.7.9 (1) これから例えば

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad (n \in \mathbf{N})$$

である。すなわちガンマ関数は階乗を一般化したものである。同様に $\Gamma(n+1/2)$ の値も簡単に計算できることが分かる。

(2) 一方、

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n \theta \, d\theta = \frac{1}{2} B\left(\frac{n+1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad \int_0^{\pi/2} \cos^n \theta \, d\theta = \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{2}, \frac{n+1}{2}\right)$$

である。

(3) ガンマ関数は、複素変数まで拡張して考えるのが普通である。

例 1.7.13 (n 次元球の測度) $a \in \mathbf{R}^n$, $R > 0$ とするとき、a を中心とする半径 R の (超) 球 $\Omega = \{x \in \mathbf{R}^n; \|x - a\| \le R\}$ の n 次元 Jordan 測度 $\mu(\Omega)$ を求めよう。定義より

$$\mu(\Omega) = \int_\Omega dx$$

であるが、容易に $a = 0$ として良いことが分かる。n 次元極座標変換は

$$\begin{aligned}
x_1 &= r\cos\theta_1 \\
x_2 &= r\sin\theta_1\cos\theta_2 \\
x_3 &= r\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3 \\
&\vdots \\
x_i &= r\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\cdots\sin\theta_{i-1}\cos\theta_i \quad (2 \le i \le n-1) \\
&\vdots \\
x_{n-1} &= r\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\cdots\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1} \\
x_n &= r\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\cdots\sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1},
\end{aligned}$$

で与えられる。ただし

$$r \ge 0, \quad \theta_i \in [0, \pi] \quad (1 \le i \le n-2), \quad \theta_{n-1} \in [0, 2\pi)$$

であり、ヤコビアンは

$$\frac{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{\partial(r, \theta_1, \cdots, \theta_{n-1})} = r^{n-1} \prod_{i=1}^{n-2} \sin^{n-i-1}\theta_i$$

である。Ω に対応するのは、

$$D := \{(r, \theta_1, \cdots, \theta_{n-2}, \theta_{n-1}); 0 \le r \le R,\ \theta_i \in [0, \pi] \quad (1 \le i \le n-2), \quad \theta_{n-1} \in [0, 2\pi)\}$$

であるから、

$$\begin{aligned}
\mu(\Omega) &= \int \cdots \iint_D \left(r^{n-1} \prod_{i=1}^{n-2} \sin^{n-i-1}\theta_i \right) dr d\theta_1 \cdots d\theta_{n-1} \\
&= \int_0^R r^{n-1} dr \prod_{i=1}^{n-2} \int_0^\pi \sin^{n-i-1}\theta_i \, d\theta_i \int_0^{2\pi} d\theta_{n-1} \\
&= \frac{2\pi R^n}{n} \prod_{i=1}^{n-2} \int_0^\pi \sin^{n-i-1}\theta_i \, d\theta_i.
\end{aligned}$$

命題 1.7.1 から導かれる

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2p-1}\theta\cos^{2q-1}\theta\,d\theta = \frac{1}{2}B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{2\Gamma(p+q)}$$

から

$$\int_0^{\pi} \sin^{\ell}\theta\,d\theta = \frac{\Gamma\left(\dfrac{\ell+1}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{\ell+2}{2}\right)}$$

となるので、

$$\prod_{i=1}^{n-2}\int_0^{\pi} \sin^{n-i-1}\theta_i\,d\theta_i = \frac{\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}\Gamma(1)}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)} = \frac{\pi^{(n-2)/2}}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}.$$

ゆえに

$$\mu(\Omega) = \frac{2\pi^{n/2}R^n}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)} = \frac{\pi^{n/2}R^n}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}+1\right)} = \begin{cases} \dfrac{\pi^k R^{2k}}{k!} & (n=2k,\ k\in\mathbf{N}\ \text{のとき}) \\ \dfrac{2^k\pi^{k-1}R^{2k-1}}{(2k-1)!!} & (n=2k-1,\ k\in\mathbf{N}\ \text{のとき}). \end{cases}$$

$n=1$ のとき $\mu(\Omega)=2R$, $n=2$ のとき $\mu(\Omega)=\pi R^2$, $n=3$ のとき $\mu(\Omega)=4\pi R^3/3$ となることが確認できる。 ■

余談 1.7.1 (ガンマ関数を使わずに…) n 次元球の測度の計算には、上の例のようにガンマ関数を使うとシンプルに書けるが、絶対必要というわけでなく、次のように素朴に計算を進めてもできる。

飛び階乗 $n!!$ という記法の紹介をしておく。

$$n!! := \begin{cases} 2\cdot 4\cdot\cdots\cdot(n-2)\cdot n & (n\ \text{が偶数のとき}) \\ 1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(n-2)\cdot n & (n\ \text{が奇数のとき}). \end{cases}$$

$n=2k$ (k は自然数) の場合は $n!!=(2k)!!=2^{n/2}k!$ が成り立つ。

$V_n := \{x\in\mathbf{R}^n; |x|\le R\}$ の測度 とおく。$n\ge 2$ のとき極座標を使えば

$$V_n = \int_0^R r^{n-1}\,dr\cdot\prod_{j=1}^{n-2}\int_0^{\pi}\sin^j\theta\,d\theta\cdot\int_0^{2\pi}d\theta = \frac{2\pi R^n}{n}\cdot 2^{n-2}\prod_{j=1}^{n-2}\int_0^{\pi/2}\sin^j\theta\,d\theta.$$

そこで $n\ge 0$ に対して $I_n := \displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^n\theta\,d\theta$ とおくと

$$I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2}\quad(n\ge 2),\quad I_0=\frac{\pi}{2},\quad I_1=1.$$

実は $I_{n-1}I_n=\dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{1}{n}$ が成り立つ[27]。さて

$$F_n:=\begin{cases}1 & (n=2),\\ I_1I_2\cdots I_{n-2} & (n\geq 3)\end{cases}$$

とおくと、

$$F_{n+2}=F_n\cdot I_{n-1}I_n=F_n\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{n},\quad F_2=1,\quad F_3=1$$

が成り立つことから、

$$\begin{cases}F_{2k}=\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^{k-1}\cdot\dfrac{1}{(2k-2)!!}=\left(\dfrac{\pi}{4}\right)^{k-1}\dfrac{1}{(k-1)!},\\ F_{2k+1}=\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^{k-1}\cdot\dfrac{1}{(2k-1)!!}.\end{cases}$$

$V_n=\dfrac{2^{n-1}\pi R^n}{n}\cdot F_n$ であるから

$$\begin{aligned}V_{2k}&=\frac{2^{2k-1}\pi R^{2k}}{2k}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{k-1}\frac{1}{(k-1)!}=\frac{\pi^kR^{2k}}{k!},\\ V_{2k+1}&=\frac{2^{2k}\pi R^{2k+1}}{2k+1}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{k-1}\frac{1}{(2k-1)!}=\frac{\pi^kR^{2k+1}2^{k+1}}{(2k+1)!!}.\end{aligned}$$

$V_{n+2}=\dfrac{2\pi R^2}{n+2}V_n$ という漸化式が成り立つが、これを手短かに導出することはできないだろうか？ ■

1.8 項別積分

1.8.1 極限の順序交換

最初に問いかけから始める。次の 3 つの極限ははたして同じものであるだろうか? (第 2 番目と第 3 番目は極限を取る順番を交換したもので、両者が等しいと主張することを「極限の順序交換が可能である」という。)

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)}f(x,y),\quad \lim_{x\to a}\lim_{y\to b}f(x,y),\quad \lim_{y\to b}\lim_{x\to a}f(x,y).$$

答は「ケース・バイ・ケース」である。

---

[27] これを証明するには、

$$I_{2n-1}=\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!},\quad I_{2n}=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2}$$

を得てから[28] $I_{2n-1}I_{2n}=\dfrac{1}{2n}\cdot\dfrac{\pi}{2}$, $I_{2n-2}I_{2n-1}=\dfrac{1}{2n-1}\cdot\dfrac{\pi}{2}$ を確かめてもよいし、$J_n:=I_nI_{n-1}$ とおくとき、

$$J_n=I_nI_{n-2}=\frac{n-1}{n}I_{n-2}\cdot\frac{n-2}{n-1}I_{n-3}=\frac{n-2}{n}J_{n-2}\quad すなわち\quad nJ_n=(n-2)J_{n-2}$$

が成り立ち、

$$J_1=I_0I_1=\frac{\pi}{2}\cdot 1=\frac{\pi}{2}J_2=I_1I_2=1\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$$

が成り立つことから $nJ_n=\dfrac{\pi}{2}$ を導いてもよい。

1.8.2　項別積分、項別微分とは

上のような形で問題を書くと、それほど出番がないようにも見えるが、例えば

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega f_n(x)\,dx=\int_\Omega\lim_{n\to\infty}f_n(x)\,dx\quad(\text{項別積分}),$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{df_n}{dx}(x)=\frac{d}{dx}\left(\lim_{n\to\infty}f_n(x)\right)\quad(\text{項別微分}),$$

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega f(t,x)\,dx=\int_\Omega\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\,dx\quad(\text{積分記号下の微分})$$

のような等式が成り立つかどうかは、気になるところであろう。ところが、微分も積分もある種の極限演算であるから、これはまさに極限の順序交換の問題に他ならない。

注意 1.8.1 (項別積分、項別微分の名の由来) 上の等式が項別積分、項別微分と言われるのは、それらの特別な (応用上は頻出する重要な) 場合として、

$$\sum_{n=1}^\infty\int_\Omega f_n(x)\,dx=\int_\Omega\sum_{n=1}^\infty f_n(x)\,dx,\quad\sum_{n=1}^\infty\frac{df_n}{dx}(x)=\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^\infty f_n(x)\right)$$

があるからである。■

例 1.8.1 ($\lim$ と $\displaystyle\int$ の順序交換が出来ない例)

$$f(x,t)\overset{\text{def.}}{=}\frac{1}{1+(x-t)^2},$$

とおくと、

$$\lim_{t\to\infty}\int_{-\infty}^\infty f(x,t)\,dx=\lim_{t\to\infty}\pi=\pi,$$

しかし

$$\int_{-\infty}^\infty\lim_{t\to\infty}f(x,t)\,dx=\int_{-\infty}^\infty 0\,dx=0.■$$

つまり、二つの lim の順序が交換できるためには、何か条件が必要である。最も有名な十分条件は、「一様収束すること」である。

1.8.3 関数族の一様収束と基本的性質

定義 1.8.1 (関数族の各点収束、一様収束) $\Omega \subset \mathbf{R}^m$, $f\colon \Omega \to \mathbf{R}^n$, $T \subset \mathbf{R}^\ell$ で、$\{f_t\}_{t\in T}$ は各 $t \in T$ につき $f_t\colon \Omega \to \mathbf{R}^n$ であるような関数族[a]であるとする。

(1) $\{f_t\}_{t\in T}$ は $t \to t_0$ のとき f に Ω 上**各点収束**するとは、

$$\forall x \in \Omega \quad \lim_{t\to t_0} f_t(x) = f(x)$$

が成り立つことであると定義する。

(2) $\{f_t\}_{t\in T}$ は $t \to t_0$ のとき f に Ω 上**一様に収束**するとは、

$$\lim_{t\to t_0} \sup_{x\in\Omega} |f_t(x) - f(x)| = 0$$

が成り立つことであると定義する。

[a]関数族とは関数の集合のことである。

次の命題は明らかである。

命題 1.8.1 一様収束するならば各点収束する。

次の定理は、(少なくとも関数列の場合には) 複素関数論等で学んだはずである。

定理 1.8.1 (連続関数族の一様収束極限は連続関数) $\Omega \subset \mathbf{R}^m$, $f\colon \Omega \to \mathbf{R}^n$, $T \subset \mathbf{R}^\ell$ で、$\{f_t\}_{t\in T}$ は各 $t \in T$ につき $f_t\colon \Omega \to \mathbf{R}^n$ であるような関数族であるとする。各 f_t が Ω 上連続で、$\{f_t\}_{t\in T}$ が Ω 上一様に f に収束するならば、f は Ω 上連続である。

次の定理も、複素関数論等で学んだはずである。

定理 1.8.2 (Weierstrass の M テスト) $\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ は $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 上の関数列で、

$$\exists \{M_n\}_{n\in\mathbf{N}} \text{ s.t. } \sup_{x\in\Omega} |f_n(x)| \le M_n \text{ and } \sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty.$$

を満たすものとすると、級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ は Ω 上一様に収束する。

1.8.4 項別積分定理と項別微分定理

次の定理が本題である (証明はやさしい)。

定理 1.8.3 (項別積分定理) Ω は $\mathbf{R}^n$ の有界 Jordan 可測集合、$\{f_t\}_{t\in T}$ は Ω 上の積分可能関数の族で、$t \to t_0$ のとき Ω で積分可能な関数 f に一様収束するならば、

$$\lim_{t\to t_0} \int_\Omega f_t(x)\,dx = \int_\Omega f(x)\,dx$$

が成り立つ。

証明

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega f(x)\,dx - \int_\Omega f_t(x)\,dx\right| &= \left|\int_\Omega (f(x)-f_t(x))\,dx\right| \\
&\le \int_\Omega |f(x)-f_t(x)|\,dx \\
&\le \sup_{x\in\Omega}|f(x)-f_t(x)|\int_\Omega dx \\
&= \mu(\Omega)\sup_{x\in\Omega}|f(x)-f_t(x)| \to 0. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

この定理の系として、次の命題が得られる (証明は省略する)。

定理 1.8.4 (項別微分定理) $\mathbf{R}$ の区間 $I=[a,b]$ を上の C^1-級の関数の族 $\{f_t\}_{t\in T}$ が

(1) $\{f_t\}_{t\in T}$ は $t\to t_0$ のとき、ある関数 f に I 上各点収束する。

(2) 導関数の族 $\{f_t'\}_{t\in T}$ は $t\to t_0$ のとき、ある関数 g に I 上一様に収束する。

を満たすとすると、 f は I 上 C^1-級で、 $f'=g$ を満たす。

1.8.5 積分記号下の微分

最も微積分らしいのは、積分と微分が同時に現れる次の定理であろう。

定理 1.8.5 (積分記号下の微分, 微分と積分の順序交換) A を $\mathbf{R}^n$ のコンパクトな Jordan 可測集合、I を $\mathbf{R}$ の区間、$K=A\times I$, $f\colon A\times I\ni(x,t)\longmapsto f(x,t)\in\mathbf{R}$ を連続関数とすると、次の (1), (2) が成り立つ。

(1) $F(t)=\displaystyle\int_A f(x,t)\,dx$ は I 上で連続。

(2) $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ が K 上連続ならば (とくに f が C^1-級ならば) $F\in C^1(I)$ かつ

$$F'(t)=\int_A\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx$$

すなわち

$$\frac{d}{dt}\int_A f(x,t)\,dx=\int_A\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx.$$

証明　連続性も微分可能性も局所的な概念だから、I がコンパクトな区間 $[a,b]$ であるとして証明すれば十分である。

(1) K はコンパクトだから、連続関数 f は K 上で一様連続である。すなわち $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta>0$ $\forall(x,s)\in K$ $\forall(y,t)\in K$

$$|(x,t)-(y,s)|<\delta\Longrightarrow|f(x,t)-f(y,s)|<\varepsilon.$$

とくに

$$|t-s|<\delta\Longrightarrow|f(x,t)-f(x,s)|<\varepsilon\quad(x\in A).$$

ゆえに

$$|F(t)-F(s)|\le\int_A|f(x,t)-f(x,s)|dx\le\int_A dx\le\varepsilon\mu(A).$$

ゆえに F は I で一様連続である。

(2) $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ が K 上一様連続ならば (1) により

$$G(t)\overset{\text{def.}}{=}\int_A\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx$$

は I で一様連続である。そして積分の順序交換をして

$$\begin{aligned}\int_a^s G(t)\,dt &= \int_a^s\left(\int_A\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx\right)dt=\int_A\left(\int_a^s\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dt\right)dx\\ &= \int_A(f(x,t)-f(x,s))\,dx\\ &= F(s)-F(a).\end{aligned}$$

ゆえに $F'(s)=G(s)$. したがって $F\in C^1([a,b])$. ■

ところが、この定理は広義積分には、そのまま拡張することはできない。「広義積分が一様収束する」という条件 (まだ定義していない) を付加すれば大丈夫であるが、それは話が細かくなるので省略する[29]。

[29] このあたりの話は杉浦「解析入門 I」に詳しい。

付 録A　コンパクト性と一様連続性

A.1　イントロ

本文中の多くの定理の証明中で次の定理を用いた。

(A)

$\mathbf{R}^n$ の任意の有界閉集合 K は**コンパクト**である。すなわち K の任意の開被覆は有限部分被覆を持つ[a](通称「**Heine-Borel の定理**」)

[a]より具体的に書くと、K が $\mathbf{R}^n$ の有界閉集合であるとき、$\mathbf{R}^n$ の開集合の族 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が $K\subset\bigcup_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda$ を満たすならば、有限個の $\lambda_1,\dots,\lambda_r\in\Lambda$ が存在して、$K\subset\bigcup_{j=1}^{r}U_{\lambda_j}$ が成り立つ。

また閉方体上の連続関数の積分可能性 (記憶されるべき定理の筆頭！) の証明において、次の定理を用いた。

(B)

$\mathbf{R}^n$ の有界閉集合上の任意の実数値連続関数は一様連続である (これは「コンパクト距離空間上の実数値連続関数は一様連続である」という定理の特別な場合である。)

この章では、このコンパクト性にまつわる二つの定理の証明を与える。

参考まで: この文書の姉妹編である「解析概論 I 講義ノート」(`http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/lecture/kaisekigairon-1/` から入手可能) では、$\mathbf{R}^n$ の有界閉集合が点列コンパクト[1]であることを利用して、上の (B) を証明してある[2]。ここではせっかく (A) を証明するので、コンパクト性 (任意の開被覆が部分被覆を持つこと) を利用した証明を与える。

この章に書いてあることは「解析学の常識」であって、参考文献はいくらでもあげることができるが、何か一冊面白いものをということならば、誰がいつどの結果を示したか書いてあるハイラー・ワナー [28] をあげておこう。

A.2　Hine-Borel の定理

Heine-Borel の定理は、入門段階の解析学で「難所」と捉えられているように思う。ところが積分に関する議論をたくさんしていると、定理の内容も、以下に与える証明も、実に自然で簡単なものに感じられるのではないだろうか。

[1]K が点列コンパクトであるとは、K 内の任意の点列が、K の点に収束する部分列を持つことをいう。

[2]そこでは「とりあえず使わずにすむ」という理由で Heine-Borel の定理の証明は省略した (省略できた)。積分論になって Heine-Borel の定理を多用することになったのは、不勉強な筆者には「そういうものなのだ」と勉強になった。

余談であるが、複素函数論で有名な Cauchy の積分定理の Goursat による証明 (高木貞治の解析概論に載っているので有名) と話の筋道がとてもよく似ている。やる気のある人は並べて読んでみることをお奨めする。

定理 A.2.1 (Heine-Borel の定理, Heine (1872), Borel (1895)) K が $\mathbf{R}^n$ の有界閉集合であるとき、K の任意の開被覆は有限部分被覆を持つ。

証明 背理法による。$\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を K の開被覆として、これが有限部分被覆を持たない、すなわち K を被覆するには無限個の U_λ が必要である (K は有限個の U_λ では決して被覆されない) と仮定して矛盾を導く。

K を含む閉方体 A を取る。A の各辺を中点で分割した相似比 $1/2$ の小閉方体 $A_\ell^{(1)}$ ($\ell = 1, 2, \ldots, 2^n$) を考える。$K \cap A_\ell^{(1)}$ のうち少なくとも 1 つは、それを被覆するために無限個の U_λ が必要になる (もしそうでなければ K が有限個の U_λ で被覆されることになり、仮定に反する)。そのような小閉方体の一つ $K \cap A_{\ell_1}^{(1)}$ を選び、K_1 とおく。次に $A_{\ell_1}^{(1)}$ をまた小閉方体 $A_\ell^{(2)}$ ($\ell = 1, 2, \ldots, 2^n$) に分けて同じことをする。これを続けて集合列

$$K \supset K_1 \supset K_2 \supset \cdots$$

で、任意の j について、K_j は決して有限個の U_λ では被覆されず、K_j の直径は A の直径の $1/2^j$ 以下であるようなものが取れる。

各 K_j から点 x_j を取って点列 $\{x_j\}$ を作ると、K_j の直径が A の直径の $1/2^j$ 以下であることから、$\{x_j\}$ は Cauchy 列となる。ゆえに $\mathbf{R}^n$ 内に極限 a を持つが、K が閉集合であることから $a \in K$ である。任意の j について $a \in K_j$ であることを注意しておく。

$a \in K \subset \bigcup U_\lambda$ であるから、$a \in U_{\lambda_0}$ となる $\lambda_0 \in \Lambda$ が存在する。U_{λ_0} は開集合であるから、$B(a;\varepsilon) \subset U_{\lambda_0}$ をみたす $\varepsilon > 0$ が存在する。

十分大きな N を取ると、K_N の直径は ε より小さくなるので、$K_N \subset B(a;\varepsilon)$. すると、

$$K_N \subset B(a;\varepsilon) \subset U_{\lambda_0}.$$

これは K_N がただ 1 つの U_{λ_0} で被覆されることを示していて、矛盾である。 ■

A.3 コンパクト距離空間上の連続関数は一様連続

定理 A.3.1 (Heine (1872)) コンパクトな距離空間 (X,d) 上の任意の連続関数 $f\colon X \to \mathbf{R}$ は一様連続である。

証明 $a \in X$, $r > 0$ に対して $B(a;r) := \{x \in X; d(x,a) < r\}$ とおく。

f は X で連続という仮定から、$\forall\varepsilon > 0$ に対して、

$$\forall x \in X \quad \exists\delta_x > 0 \quad \forall x' \in B(x;\delta_x) \quad |f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

各 $x \in X$ に対してこのような δ_x を取っておく。もちろん

$$\bigcup_{x\in X} B(x;\delta_x/2) = X$$

であるが、X はコンパクトであるから、$\exists x_1, x_2, \ldots, x_\ell \in X$ s.t.

$$\bigcup_{j=1}^{\ell} B(x_j; \delta_{x_j}/2) = X. \tag{A.1}$$

$\delta := \min_{1\le j\le \ell} \delta_{x_j}/2$ とおくと $\delta > 0$ であるが、y, $z \in X$ が $d(y,z) < \delta$ を満たせば

$$|f(y) - f(z)| < \varepsilon$$

が成り立つ (ゆえに一様連続性が示される)。実際、まず (A.1) より $\exists j$ s.t. $y \in B(x_j; \delta_{x_j}/2)$. このとき

$$d(z, x_j) \le d(z, y) + d(y, x_j) < \delta + \frac{\delta_{x_j}}{2} \le \frac{\delta_{x_j}}{2} + \frac{\delta_{x_j}}{2} = \delta_{x_j}.$$

ゆえに $z \in B(x_j; \delta_{x_j})$. またもちろん $y \in B(x_j; \delta_{x_j})$. ゆえに

$$|f(y) - f(z)| \le |f(y) - f(x_j)| + |f(x_j) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}. \blacksquare$$

Heine-Borel の定理とあわせて、次の系 (目標だった (B)) を得る。

系 A.3.1 $\mathbf{R}^n$ の空でない有界閉集合 K で定義された実数値連続関数は一様連続である。

付 録B　変数変換の公式についての補足

B.1　変数変換の公式の証明

(主に杉浦 [10], 宮島 [24] などを参考にした。)
本文中の定理を少し拡張した次の定理の証明を目標とする。

定理 B.1.1 (重積分の変数変換) D, Ω は $\mathbf{R}^n$ のコンパクトな Jordan 可測集合、N は $\mu(N)=0$ をみたす D の部分集合、U は D を含む $\mathbf{R}^n$ の開集合、$\varphi\colon U\to\mathbf{R}^n$ は C^1-級の写像で次の (i), (ii), (iii) をみたすものとする。

(i) $\varphi(D)=\Omega$

(ii) $\det\varphi'(u)\neq 0$ $(u\in D\setminus N)$

(iii) $\varphi|_{D\setminus N}$ は単射

このとき、任意の連続関数 $f\colon\Omega\to\mathbf{R}$ に対して

$$\int_\Omega f(x)\,dx=\int_D f(\varphi(u))\left|\det\varphi'(u)\right|\,du.$$

補題 B.1.1 (平行移動で可測性、測度は変わらない) Ω は $\mathbf{R}^n$ の有界 Jordan 可測集合、$a\in\mathbf{R}^n$ として、$\varphi(x)=x+a$ $(x\in\mathbf{R}^n)$ とおくとき、$\varphi(\Omega)$ も有界 Jordan 可測で、$\mu(\varphi(\Omega))=\mu(\Omega)$.

証明　A を $\overline{\Omega}\subset A^\circ$ となる $\mathbf{R}^n$ の閉方体とする。$\varphi(A)$ も $\mathbf{R}^n$ の閉方体で、平行移動の同相性から $\overline{\varphi(\Omega)}\subset\varphi(A)^\circ$.

A の分割全体 $\mathcal{D}(A)$ と $\varphi(A)$ の分割全体 $\mathcal{D}(\varphi(A))$ は、自然に一対一に対応する。実際、$\Delta=(\Delta_1,\cdots,\Delta_n)\in\mathcal{D}(A)$, $\Delta_j=\{x_j^{(i)}\}_{0\le i\le\ell_j}$ $(j=1,2,\cdots,n)$ に対して、$\Delta'=(\Delta'_1,\cdots,\Delta'_n)\in\mathcal{D}(\varphi(A))$ を $\Delta'_j=\{x_j^{(i)}+a_j\}_{0\le i\le\ell_j}$ $(j=1,2,\cdots,n)$ として定めればよい。このとき、

$$L(\chi_\Omega,A,\Delta)=L(\chi_{\varphi(\Omega)},\varphi(A),\Delta'),\quad U(\chi_\Omega,A,\Delta)=U(\chi_{\varphi(\Omega)},\varphi(A),\Delta').$$

ゆえに

$$L(\chi_\Omega,A)=L(\chi_{\varphi(\Omega)},\varphi(A)),\quad U(\chi_\Omega,A)=U(\chi_{\varphi(\Omega)},\varphi(A)).$$

Ω の可測性から $L(\chi_\Omega,A)=U(\chi_\Omega,A)=\mu(\Omega)$ であるから、$L(\chi_{\varphi(\Omega)},\varphi(A))=U(\chi_{\varphi(\Omega)},\varphi(A))=\mu(\Omega)$. ゆえに $\varphi(\Omega)$ は可測で、$\mu(\varphi(\Omega))=\mu(\Omega)$. ■

補題 B.1.2 (超平面に含まれる有界集合は測度 0) B は $\mathbf{R}^n$ の有界集合で、$\mathbf{R}^n$ のある超平面に含まれるとするとき、B は Jordan 可測で $\mu(B)=0$.

証明 B は有界であるから、$\mathbf{R}^n$ の閉方体 A で $\overline{B}\subset A^\circ$ となるものが取れる。以下 $U(\chi_B, A)=0$ を証明する。もしこれができれば、

$$0\le L(\chi_B, A)\le U(\chi_B, A)\le 0$$

から、B は Jordan 可測で $0=\displaystyle\int_B dx=\mu(B)$ であることがわかる。

本質は変らないので、以下 $n=2$ として証明する。$\mathbf{R}^2$ の超平面 (直線！) H は、1 変数 1 次関数 (すなわち $y=px+q$ または $x=ry+s$) のグラフとして表すことができる。ここでは $y=f(x)=px+q$ のグラフであるとしよう。A の x 軸への射影を $A'=[a,b]$ として、また $c=\min\{f(a),f(b)\}$, $d=\max\{f(a),f(b)\}$ とおく。$c=d$ のときは簡単なので、$c<d$ とする。任意に与えられた正数 ε に対して、

$$\exists\delta>0\quad\text{s.t.}\quad\forall x\in A'\quad(\forall x'\in A':|x-x'|\le\delta)\quad|f(x)-f(x')|<\frac{\varepsilon}{2\mu(A')}.$$

N を十分大きく取って、A' の N 等分割 $\Delta_1=\{x_j\}_{j=0}^N$ が $|\Delta_1|\le\delta$ となるようにする。$A'_j:=[x_{j-1},x_j]$ とおく。このとき、すべての $f(x_j)$ を分割点として含むような $[c,d]$ の分割を Δ_2 とする。$\Delta=\Delta_1\times\Delta_2$ とすると、これは $A=[a,b]\times[c,d]$ の分割で、

$$U(\chi_H, A, \Delta)\le\sum_{j=1}^N\mu(A'_{j-1})\cdot 2\frac{\varepsilon}{2\mu(A')}=\frac{\varepsilon}{\mu(A')}\sum_{j=1}^N\mu(A'_j)=\varepsilon.$$

これは $U(\chi_H, A)=0$ であることを示している。ゆえに $U(\chi_B, A)=0$ である。■

系 B.1.1 (閉方体のアフィン変換による像 (平行体) は Jordan 可測) A は $\mathbf{R}^n$ の閉方体、$g\in M(n;\mathbf{R})$, $b\in\mathbf{R}^n$ とするとき、$\varphi(x)=gx+b$ $(x\in\mathbf{R}^n)$, $\Omega:=\varphi(A)$ とおくと、Ω は Jordan 可測である。

証明 $\partial\Omega$ はある超平面に含まれる有界集合の有限個の合併であるから、$\partial\Omega$ は可測で $\mu(\partial\Omega)=0$. ゆえに Ω は可測である。■

命題 B.1.1 (アフィン変換は Jordan 測度を行列式の絶対値倍にする) Ω は $\mathbf{R}^n$ の有界な Jordan 可測集合, $g\in M(n;\mathbf{R})$, $b\in\mathbf{R}^n$ とするとき、$\varphi(x):=gx+b$ $(x\in\mathbf{R}^n)$ とおくと、$\varphi(\Omega)$ は $\mathbf{R}^n$ の Jordan 可測集合で、

$$\mu(\varphi(\Omega))=|\det g|\,\mu(\Omega).$$

証明

Step 1. $b=0$ かつ $\det g\ne 0$ のときに示せば十分であることを示す。

まず、補題 B.1.1 より、平行移動で Jordan 可測性、Jordan 測度は不変であるから、$b=0$ としてよい。

また $\mathrm{Im}\,\varphi = R(g)$ は $\mathbf{R}^n$ の線形部分空間で、$\det g = 0$ のとき $\dim R(g) = \mathrm{rank}\, g < n$ ゆえ、$\mathrm{Im}\,\varphi$ は $\mathbf{R}^n$ のある超平面に含まれる。ゆえに Ω が $\mathbf{R}^n$ の有界集合ならば、$\varphi(\Omega)$ は補題 B.1.2 の仮定をみたし、$\mu(\varphi(\Omega)) = 0.$ これは $|\det g|\,\mu(\Omega) = 0 \cdot \mu(\Omega) = 0$ に等しい。

Step.2 もしも $\mathbf{R}^n$ の任意の閉方体 A に対して

$$\mu(\varphi(A)) = |\det g|\,\mu(A)$$

が示せれば命題は証明される (任意の有界 Jordan 可測集合 Ω に対して、$\mu(\varphi(\Omega)) = |\det g|\,\mu(\Omega)$ が成り立つ) ことを示す。

Ω を $\mathbf{R}^n$ の任意の有界 Jordan 可測集合とすると、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、区間塊 (有限個の閉方体の合併) K_1, K_2 で、

$$K_1 \subset \Omega \subset K_2, \quad \mu(K_2) - \mu(K_1) = \mu(K_2 \setminus K_1) < \varepsilon$$

を満たすものが存在する。これから、まず

$$\mu(\Omega) - \varepsilon \le \mu(K_1) \le \mu(\Omega) \le \mu(K_2) \le \mu(\Omega) + \varepsilon.$$

一方、$\varphi(K_1) \subset \varphi(\Omega) \subset \varphi(K_2)$ より、

$$\mu(\varphi(K_1)) \;=\; L(\chi_{\varphi(K_1)}, A') \le L(\chi_{\varphi(\Omega)}, A') \le U(\chi_{\varphi(\Omega)}, A') \le U(\chi_{\varphi(K_2)}, A') = \mu(\varphi(K_2)).$$

(ただし、A' は $\overline{\varphi(K_2)} \subset A'^\circ$ をみたす閉方体である。)

φ が閉方体の Jordan 測度を $|\det g|$ 倍にすることから、区間塊の Jordan 測度も $|\det g|$ 倍にすることがわかる。ゆえに

$$\mu(\varphi(K_1)) = |\det g|\,\mu(K_1), \quad \mu(\varphi(K_2)) = |\det g|\,\mu(K_2).$$

ゆえに

$$|\det g|\,(\mu(\Omega) - \varepsilon) \le L(\chi_{\varphi(\Omega)}, A') \le U(\chi_{\varphi(\Omega)}, A') \le |\det g|\,(\mu(\Omega) + \varepsilon).$$

これが任意の $\varepsilon > 0$ について成り立つことから

$$L(\chi_{\varphi(\Omega)}, A') = U(\chi_{\varphi(\Omega)}, A') = |\det g|\,\mu(\Omega).$$

これから $\varphi(\Omega)$ が Jordan 可測で $\mu(\varphi(\Omega)) = |\det g|\,\mu(\Omega)$ であることがわかる。

Step 3. 次の補題を示せば十分であることを示す。

補題 B.1.3 Ω を $\mathbf{R}^n$ の有界 Jordan 可測集合、E を n 次の基本行列、$\psi(x) = Ex$ ($x \in E$) とするとき、$\psi(\Omega)$ は有界 Jordan 可測で $\mu(\psi(\Omega)) = |\det E|\,\mu(\Omega)$.

$g = E_1E_2\cdots E_\ell$ (E_j は基本行列) とするとき、$\psi_j\colon x \mapsto E_jx$ として、$\varphi = \psi_1 \circ \psi_2 \circ \cdots \circ \psi_\ell$ であるから、

$$\begin{aligned}\mu(\varphi(\Omega)) &= |\det E_1|\,|\det E_2|\cdots|\det E_\ell|\,\mu(\Omega)\\ &= |\det(E_1E_2\cdots E_\ell)|\,\mu(\Omega) = |\det g|\,\mu(\Omega).\blacksquare\end{aligned}$$

基本行列について復習しておこう。次の 3 つの形の行列を基本行列と呼ぶのであった。

$$P(i,j)=\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & \\ & & & 0 & & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & & & 0 & & & \\ & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \quad (i\neq j), \tag{B.1}$$

$$Q(i,j,a)=\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \cdots & a & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \quad (i\neq j,\ a\in\mathbf{R}), \tag{B.2}$$

$$R(i,c)=\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & c & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \quad (c\in\mathbf{R},\ c\neq 0). \tag{B.3}$$

補題 B.1.4 任意の $g\in GL(n;\mathbf{R})$ は有限個の基本行列の積として表せる。

証明 線形代数で「任意の正則行列は有限回の基本変形で単位行列に変換できる」と学んだ。それと「任意の基本行列の逆行列は基本行列である」から明らか。■

命題 B.1.2 A は $\mathbf{R}^n$ の閉方体、g は基本行列 ((B.1), (B.2), (B.3) のいずれかの行列) とするとき、

$$\mu(\varphi(A))=|\det g|\,\mu(A),\quad \varphi(x):=gx. \tag{B.4}$$

注: 閉方体 $A=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times\cdots\times[a_n,b_n]$ の Jordan 測度は $\prod_{j=1}^n(b_j-a_j)$ であった (それがそもそもの定義で、後で Jordan 測度を拡張したとき、矛盾がないことを確認してある。)。

証明

(1) $g = R(i, c)$ のときは、第 i 辺の長さだけが $|c|$ 倍されるから、Jordan 測度も $|c|$ 倍される。$\det g = c$ なので、$|c| = |\det g|$ であるから、(B.4) が成り立つ。

(2) $g = P(i, j)$ のときは、$\varphi(A)$ は A の第 i 辺と第 j 辺が入れ替わっただけだから、$\mu(\varphi(A)) = \mu(A)$ である。$\det g = -1$ なので $|\det g| = 1$ であるから、(B.4) が成り立つ。

(3) $g = Q(i, j, a)$ の場合。まず Fubini の定理より、「A, B がそれぞれ $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{R}^m$ の有界 Jordan 可測集合であるとき、$\mu_{n+m}(A \times B) = \mu_n(A)\mu_m(B)$ である」が成り立つことを注意しておく。記述を簡単にするため、$i = n - 1$, $j = n$ としよう (一般には (2) の置換行列を利用すればよい)。$y = gx$ とすると、

$$y_k = x_k \quad (k = 1, 2, \cdots, n-2), \quad y_{n-1} = x_{n-1} + a x_n, \quad y_n = x_n$$

となる。$A = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ として、$A' = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_{n-2}, b_{n-2}]$, $A'' = [a_{n-1}, b_{n-1}] \times [a_n, b_n]$ とおくと、

$$\varphi(A) = A' \times \psi(A''),$$

ただし $\psi(x_{n-1}, x_n) := (x_{n-1} + a x_n, x_n)$. $\psi(A'')$ は平行四辺形で、底辺と高さはそれぞれ A'' (これは長方形だが) のそれと等しいので、$\mu_2(\psi(A'')) = \mu_2(A'')$. ゆえに

$$\begin{aligned}\mu_n(\varphi(A)) &= \mu_n(A' \times \psi(A'')) = \mu_{n-2}(A')\mu_2(\psi(A'')) = \mu_{n-2}(A')\mu_2(A'') = \mu_n(A' \times A'') \\ &= \mu_n(A).\end{aligned}$$

$\det g = 1$ であるから、これは (B.4) が成り立つことを示している。 ■

定理 B.1.1 の証明 φ は compact 集合 D の上で C^1-級であるから[1]、

$$\exists L \in \mathbf{R} \quad \text{s.t.} \quad \forall x, y \in D \quad \|\varphi(x) - \varphi(y)\| \le L\|x - y\|.$$

やはり compact 集合上で連続であることから、

$$\exists C \in \mathbf{R} \quad \text{s.t.} \quad \forall u \in D \quad |\det \varphi'(u)| \le C,$$

$$\exists M \in \mathbf{R} \quad \text{s.t.} \quad \forall x \in \Omega \quad |f(x)| \le M.$$

$D' := D \setminus N$ は有界 Jordan 可測集合であるから、$\forall \varepsilon > 0$ に対して、ある区間塊 K が存在して

$$K \subset D', \quad \mu(D' \setminus K) = \mu(D \setminus K) < \frac{\varepsilon}{4} \min\left\{\frac{1}{CM}, \frac{1}{(\sqrt{n}L)^n M}\right\}.$$

K は D を含むある n 次元立方体区間 I の各辺を ℓ 等分して得られる分割 Δ に属する小閉方体 W_j $(j = 1, 2, \cdots, m)$ の合併としてよい。

$$\mu(W_j \cap W_k) = 0 \quad (j \ne k), \quad \bigcup_{j=1}^m W_j = K, \quad \mu(K) = \sum_{j=1}^m \mu(W_j).$$

[1]実はそれほど明らかではない。杉浦 [10] ではきちんと証明されている。

W_j の中心を u_j, $\varphi(u_j)=x_j$ とする。必要ならば ℓ を大きくして $|\Delta|$ を十分小さくすれば

$$|\mu(\varphi(W_j)) - |\det\varphi'(u_j)|\,\mu(W_j)| \le \frac{\varepsilon}{6M(\mu(D)+1)}\mu(W_j) \quad (j=1,2,\cdots,m).$$

関数 $u\mapsto f(\varphi(u))\,|\det\varphi'(u)|$ は compact 集合 D 上の連続関数であるから、実は一様連続であり、やはり ℓ を十分大きくすると

$$|f(\varphi(u))\,|\det\varphi'(u)|| - |f(\varphi(u_j))\,|\det\varphi'(u_j)|| \le \frac{\varepsilon}{6(\mu(\Omega)+1)} \quad (u\in W_j,\ 1\le j\le m).$$

同様に、ℓ を十分大きくすると

$$|f(x)-f(x_j)| \le \frac{\varepsilon}{6(\mu(\Omega)+1)} \quad (x\in g(W_j),\ 1\le j\le m).$$

$$\begin{aligned}
\int_D f(\varphi(u))\,|\det\varphi'(u)|\,du - \int_\Omega f(x)\,dx \quad &= \quad \left(\int_K f(\varphi(u))\,|\det\varphi'(u)|\,du - \int_{\varphi(K)} f(x)\,dx\right)\\
&\qquad + \int_{D\setminus K} f(\varphi(u))\,|\det\varphi'(u)|\,du - \int_{\Omega\setminus K} f(x)\,dx\\
&=: \quad P+Q+R.
\end{aligned}$$

以下 P, Q, R を評価する。まず Q については、

$$|Q| \le \int_{D\setminus K} |f(\varphi(u))|\,|\det\varphi'(u)|\,du \le MC\mu(D\setminus K) \le \frac{\varepsilon}{4}.$$

一方

$$\Omega\setminus\varphi(K) = \varphi(D)\setminus\varphi(K) \subset \varphi(D\setminus K)$$

であるから、

$$\mu(\Omega\setminus\varphi(K)) \le \mu(\varphi(D\setminus K)) \le \left(\sqrt{n}L\right)^n \mu(D\setminus K) \le \frac{\varepsilon}{4M}.$$

ゆえに

$$|R| \le \int_{\Omega\setminus\varphi(K)} |f(x)|\,dx \le M\mu(\Omega\setminus\varphi(K)) \le \frac{\varepsilon}{4}.$$

仮定 (iii) より φ は D' で 1 対 1 であり、$D'\supset K$ だから φ は K でも 1 対 1 となる。ゆえに

$$\varphi(W_j)\cap\varphi(W_k) = \varphi(W_j\cap W_k).$$

ゆえに

$$0 \le \mu(\varphi(W_j)\cap\varphi(W_k)) = \mu(\varphi(W_j\cap W_k)) \le \left(\sqrt{n}L\right)^n \mu(W_j\cap W_k) = 0 \quad (j\ne k).$$

そこで

$$P_j := \int_{W_j} f(\varphi(u))\,|\det\varphi'(u)|\,du - \int_{\varphi(W_j)} f(x)\,dx \quad (j=1,2,\cdots,m)$$

とおくと

$$P = \sum_{j=1}^m P_j, \quad \mu(\varphi(K)) = \sum_{j=1}^m \mu(\varphi(W_j)).$$

であるが、

$$\begin{aligned}
P_j &= \int_{W_j} f(\varphi(u))\,|\det\varphi'(u)|\,du - \int_{\varphi(W_j)} f(x)\,dx \\
&= \int_{W_j} f(\varphi(u))\,|\det\varphi'(u)| - f(x_j)\,|\det\varphi'(u_j)|\,du + \int_{\varphi(W_j)} (f(x_j) - f(x))dx \\
&\quad + f(x_j)\,(|\det\varphi'(u_j)|\,\mu(W_j) - \mu(\varphi(W_j)))
\end{aligned}$$

と分解できるので

$$|P_j| \le \frac{\varepsilon\mu(W_j)}{6(\mu(D)+1)} + \frac{\varepsilon\mu(\varphi(W_j))}{6(\mu(\Omega)+1)} + \frac{\varepsilon\mu(W_j)}{6(\mu(D)+1)}.$$

$j = 1, 2, \cdots, m$ について和を取って、

$$\begin{aligned}
|P| &\le \sum_{j=1}^{m} |P_j| \\
&\le \frac{\varepsilon}{6(\mu(D)+1)} \cdot \mu(K) + \frac{\varepsilon}{6(\mu(\Omega)+1)} \cdot \mu(\varphi(K)) + \frac{\varepsilon}{6(\mu(D)+1)} \cdot \mu(K) \\
&\le \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} = \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

まとめると

$$\left| \int_D f(\varphi(u))\,|\det\varphi'(u)|\,du - \int_\Omega f(x)\,dx \right| \le |P| + |Q| + |R| \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.$$

$\varepsilon > 0$ は任意だから

$$\int_D f(\varphi(u))\,|\det\varphi'(u)|\,du = \int_\Omega f(x)\,dx. \blacksquare$$

B.2 n 次元極座標とそのヤコビアン

ここに書いてあることは、解析概論 I の講義ノート (`http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/lecture/kaisekigairon-1/pdf/textbook1-2002-full.pdf`) から抜き出した。

$\mathbf{R}^n$ の点 $(x_1, \cdots, x_n)$ の (n 次元) **極座標**とは、次式で定義される $(r, \theta_1, \cdots, \theta_{n-1})$ のことをいう。

(B.5)
$$\begin{cases}
x_1 = r\cos\theta_1 \\
x_2 = r\sin\theta_1\cos\theta_2 \\
\quad\cdots \\
x_i = r\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{i-1}\cos\theta_i \qquad (2 \le i \le n-1) \\
\quad\cdots \\
x_{n-1} = r\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1} \\
x_n = r\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1}
\end{cases}$$

ただし $(r, \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_{n-1})$ は次の条件式で表される $\mathbf{R}^n$ の部分集合 D の上を動くとする:

(B.6)
$$r \ge 0, \quad \theta_i \in [0, \pi] \quad (i = 1, 2, \cdots, n-2), \quad \theta_{n-1} \in [0, 2\pi).$$

注意 B.2.1 $n=3$ のとき、既に紹介した空間極座標

$$\text{(B.7)}\qquad \begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \qquad (r \geq 0,\ \theta \in [0,\pi],\ \phi \in [0,2\pi))$$

とは一致しないが、座標の順番が異なるだけで本質的には同じと考えられる。

定理 B.2.1 (n 次元極座標のヤコビアン) n を 2 以上の自然数とするとき、写像 $\varphi_n \colon D \ni (r,\theta_1,\cdots,\theta_{n-1}) \mapsto (x_1,\cdots,x_n) \in \mathbf{R}^n$ を (B.5), (B.6) で定めるとき、

$$\det\varphi_n'(r,\theta_1,\cdots,\theta_{n-1}) = \frac{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\partial(r,\theta_1,\cdots,\theta_{n-1})} = r^{n-1}\sin^{n-2}\theta_1\sin^{n-3}\theta_2\cdots\sin^2\theta_{n-3}\sin\theta_{n-2}.$$

この証明を与えるかわりに、そのヒントとなる問題を掲げておく。

問題 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4$ に対して、次の式を満たす $\begin{pmatrix} r \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix}$ を 4 次元極座標と呼ぶ:

$$\begin{cases} x &= r\cos\theta_1 \\ y &= r\sin\theta_1\cos\theta_2 \\ z &= r\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3 \\ w &= r\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3 \end{cases}, \qquad \begin{pmatrix} r \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix} \in I \overset{\text{def.}}{=} [0,\infty)\times[0,\pi]\times[0,\pi]\times[0,2\pi).$$

(1) $\begin{cases} X &= r\cos\theta_1 \\ Y &= r\sin\theta_1\cos\theta_2 \\ u &= r\sin\theta_1\sin\theta_2 \\ v &= \theta_3 \end{cases}$ とすると、写像 $\begin{pmatrix} r \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} X \\ Y \\ u \\ v \end{pmatrix}$ のヤコビアンは $r^2\sin\theta_1$ であることを示せ。

(2) $\begin{cases} x &= X \\ y &= Y \\ z &= u\cos v \\ w &= u\sin v \end{cases}$ とするとき、写像 $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ のヤコビアンを求め、$\begin{pmatrix} r \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ のヤコビアンが $r^3\sin^2\theta_1\sin\theta_2$ であることを示せ。

(3) 4 次元単位球 $\{(x,y,z,w); x^2+y^2+z^2+w^2<1\}$ の 4 次元 Jordan 測度を求めよ。

B.3 例の補足 — 面積座標の積分公式

(例が極座標に片寄っているので、有限要素法でよく使われる面積座標の積分公式を紹介)

平面上の三角形 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3$ が与えられたとき、1 次関数 ϕ_i $(i=1,2,3)$ で、

$$\phi_i(\mathrm{P}_j)=\delta_{ij}\quad(i,j=1,2,3)$$

を満たすものが一意に定まる。

$\mathbf{R}^2$ 上の実数値 1 次関数全体の集合は、通常の和とスカラー積に関して $\mathbf{R}$ 上の線型空間となり、その次元は 3 であるが、上の ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 はその基底となる[2]。

以下

$$I_{\ell mn}:=\int_{\triangle\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3}\phi_1(x)^{\ell}\phi_2(x)^m\phi_3(x)^n dx\quad(\ell,\,m,\,n=0,1,\cdots)$$

を求めることを問題とする。

$\mathrm{P}_i=(x_i,y_i)$ $(i=1,2,3)$ とおき、変数変換 φ: $\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ を

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}+A\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}x_2-x_1 & x_3-x_1\\ y_2-y_1 & y_3-y_1\end{pmatrix}$$

で定義する。$\widetilde{\mathrm{P}}_1:=(0,0)$, $\widetilde{\mathrm{P}}_2:=(1,0)$, $\widetilde{\mathrm{P}}_3:=(0,1)$ の φ による像はそれぞれ P_1, P_2, P_3 であるから、$\Delta:=\{(u,v);u\geq 0,\ v\geq 0,\ u+v\leq 1\}$ とおくと、$\varphi(\Delta)=\triangle\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3$ となる。さらに

$$\det\varphi'(u,v)\equiv\det A=(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1)=2\times(\triangle\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3\text{ の面積}).$$

さて、$(\phi_i\circ\varphi)(u,v)$ $(i=1,2,3)$ はいずれも 1 次関数で、

$$(\phi_i\circ\varphi)(\widetilde{\mathrm{P}}_j)=\delta_{ij}$$

であるから、

$$(\phi_1\circ\varphi)(u,v)=1-u-v,\quad(\phi_2\circ\varphi)(u,v)=u,\quad(\phi_3\circ\varphi)(u,v)=v$$

である。ゆえに

$$I_{\ell mn}:=\iint_{\Delta}(1-u-v)^{\ell}u^m v^n\cdot|\det A|\,dudv=|\det A|\int_0^1 u^m\left(\int_0^{1-u}(1-u-v)^{\ell}v^n dv\right)du$$

内側の積分を計算するため、$u\neq 1$ とするとき、$v=(1-u)V$ とおくと、$dv=(1-u)dV$ であり、

$$\begin{aligned}\int_0^{1-u}(1-u-v)^{\ell}v^n dv &= \int_0^1\left[(1-u)(1-V)\right]^{\ell}(1-u)^n V^n\cdot(1-u)dV\\ &= (1-u)^{\ell+n+1}\int_0^1(1-V)^{\ell}V^n\,dV=(1-u)^{\ell+n+1}B(\ell+1,n+1).\end{aligned}$$

ただし $B(\cdot,\cdot)$ は Euler のベータ関数を表す。これから

$$\begin{aligned}I_{\ell mn} &= |\det A|\,B(\ell+1,n+1)\int_0^1(1-u)^{\ell+n+1}u^m\,du\\ &= |\det A|\,B(\ell+1,n+1)\cdot B(\ell+n+2,m+1)\\ &= |\det A|\,\frac{\Gamma(\ell+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(\ell+n+2)}\cdot\frac{\Gamma(\ell+n+2)\Gamma(m+1)}{\Gamma(\ell+m+n+3)}=|\det A|\,\frac{\ell!m!n!}{(\ell+m+n+2)!}.\blacksquare\end{aligned}$$

[2] P_i での値が f_i $(i=1,2,3)$ であるような 1 次関数 f は $f(x)=\sum_{i=1}^{3}f_i\phi_i(x)$ で与えられる。

付 録C　参考にした文献

筆者が学生だった頃の教官の言葉に、「数学の勉強のための読書には精読と濫読の両方が必要である。まず、学生は理論の骨組みを理解するために、しっかりと書かれた教科書をきちんと通読する必要がある (とにかく一つのやり方で、首尾一貫とした話を理解すること、それは数学の勉強に絶対必要なことである)。その上で、その分野におけるさまざまな流儀に触れて、理解をより完全にするためにたくさんの本を読まねばならない」というのがあった。

ここでは、解析概論の講義内容を作るために直接参考にした本を紹介する。解析概論の前身である微分積分学・同演習の担当が決まった際に、微分積分学の本として定評のあるものを見直したのはもちろんであるが、書店で販売されていた本をかたはしから眺めていった。細かな点を参考にした本の数は多くなるが、本質的なところで参考にした本はあまり多くない。

中尾 [16] は最初のうち教科書に指定していた本であるが、次の理由から止めにした。

- 積分のところの記述が重く (難しく)、忠実にたどるのに講義時間が不足しがちになる。また学生が自習する際にも「胃にもたれそうな」感じがした。
- いくつか致命的な誤植があり、講義でそれを指摘しても、間違えたまま暗記した学生が後を絶たなかった (こういうのを理由にあげるのはなさけないが)。

この本が改訂されてこれらの問題が解決された場合は、教科書に返り咲く可能性があるが、現時点では教科書にするつもりはない (色々美点があって惜しい本だが…)。

杉浦 [10], [11] は、非常に有名な本で、微積分のみならず複素関数論の優れた解説書である (大変な力作である)。必要になることは、ほとんどすべて書かれてある。この講義の内容を練る際にこの本を参考にしたところは多い[1]。しかし、平均的な学生の学力を考えると、この本を教科書に指定することは無理があるように思われた (つまみ食いにもそれなりの力が必要で、最初にこの本を読むのは難しそうということ)。一方、辞書として利用するのに和書でこれ以上の本はないと言って過言でない。卒研生[2]や大学院生には大いに勧めたい。

宮島 [24] は最近出版された本で、長年の講義で磨かれてできたものらしく、普通の本でさぼってあるようなことも書かれていて、色々と参考になった。しかしベクトル解析抜きでこの分量は重く、やはり初学者向きではないと思われる。

スピヴァック [14] は、有名な本で、筆者も学生の時に、多変数の微積分の副読本として読んだ。積分の定義や、積分可能条件のところの説明は大いに参考にした。しかし

[1]自分でさんざん推敲した末にこの本を見ると、はるかに要領良く解説されていることが多く、最初から参考にした方が良かったかと思わされたことが何度かあった。

[2]卒研の学生によく言うセリフ「微積分に関して、この本を見ないで『探したけれど見つかりませんでした』という言い訳は通りません。」

- 全体として「幾何学より」の記述であり、解析学の教科書としては抜け落ちたところが大きいこと。
- ベクトル解析部分の記述の仕方が高度に抽象的で、学生の自習書向きでないこと。

の二点から、やはり教科書として指定するのはためらわれた。この本は、幾何学で多様体論を学んだ後に、微分積分学を復習するという目的で読むのが良いであろう。少なくとも最初に学ぶ際に読む本ではないと思う。ただしこの本の演習問題の豊富さ (質量ともに) は特筆に値する。授業では計算問題にもそれなりの比重をおくことになるが、理論的な問題を探している人はぜひ一度目を通すことをお勧めする。

杉浦 [11] の序文にも述べられているように、微分積分学の入門段階に多様体を持ち込むことは、必要性を大いに感じるものの、まだうまいやり方が発見 (開発?) されていないようである。最初に微分積分学を学ぶ際に少し中途半端になってしまうのは仕方がないことなのかも知れない。

以上は固めの本を紹介したが、分かりやすく説明することを目標にした本は色々出ている。大きめの書店に立ち寄って自分と相性が良さそうな本を探してみてはいかが？個人的には、“Analysis by its history” という原題を持つハイラー・ワナー [28] が楽しく読めるので勧めてみたい[3]。

また比較的最近出た本の中で、落合・高橋 [4], 小林 [6] は説明が工夫されていて、なおかつ適度の重たさ (重量の点でも読みやすさの点でも) で、通読に向いていると思われる。

[3]この本はとにかく読むのが楽しい。多変数関数の微積分は、下巻の 100 ページほどの章に収められている。コンパクトながら本質的なところに鋭く切り込んでいる、という印象がある。集中力のある人はのんびりと進む授業を聴く前に、一人で挑戦してみてはどうだろう。

参考図書

[1] 新井 仁之(ひとし), ルベーグ積分講義, 日本評論社 (2003).

[2] 伊藤 清三, ルベーグ積分入門, 裳華房 (1963).

[3] 岩掘 長慶, ベクトル解析 — 力学の理解のために —, 裳華房 (1960).

[4] 落合宅四郎, 高橋勝雄, 多変数の初等解析入門, 東京大学出版会 (2002).

[5] 小平 邦彦, 解析入門, 岩波書店 (1991).

[6] 小林 昭七, 続 微分積分読本 — 多変数 —, 裳華房 (2001).

[7] 小松 彦三郎, ベクトル解析と多様体 I, II, 岩波講座 応用数学, 岩波書店 (1994, 1995).

[8] L. シュヴァルツ, 解析学 1〜7, 東京図書 ().

[9] 志賀 浩二, ベクトル解析 30 講, 朝倉書店 (1990).

[10] 杉浦 光夫, 解析入門 I, 東京大学出版会 (1980).

[11] 杉浦 光夫, 解析入門 II, 東京大学出版会 (1985).

[12] 杉浦 光夫, 清水 英男, 金子 晃, 岡本 和夫, 解析演習, 東京大学出版会 (1989). 特に第 IV 章「積分法 II (多変数)」 (金子).

[13] J. スティルウェル著, 上野 健爾・浪川 幸彦 監訳, 田中 紀子 訳, 数学のあゆみ 上, 朝倉書店 (2005).

[14] マイケル・スピヴァック, 多変数解析学, 東京図書 (1972).

[15] 高木 貞治, 解析概論 (改訂第三版), 岩波書店 (1983).

[16] 中尾 愼宏(みつひろ), 微分積分学, 近代科学社 (1987).

[17] 荷見(はすみ) 守助・堀内 利郎, 現代解析の基礎, 内田老鶴舗.

[18] 一松 信, 解析学序説, 裳華房 ().

[19] 一松(ひとつまつ) 信(しん), 微分積分学入門第一〜四課, 近代科学社 (1989, 1990, 1990, 1991).

[20] ファインマン, レイトン, サンズ著, ファインマン物理学 III 電磁気学, 岩波書店 ().

[21] 俣野 博, 微分と積分 3, 岩波講座 現代数学への入門, 岩波書店 (1996).

[22] 溝畑 茂, 数学解析 (上, 下), 朝倉書店 (1976).

[23] 三村 征雄, 大学演習 微分積分学, 裳華房 ().

[24] 宮島 静雄, 微分積分学 II — 多変数の微分積分 —, 共立出版 (2003).

[25] 森田 茂之, 微分形式の幾何学 1, 岩波講座 現代数学の基礎, 岩波書店 (1996).

[26] 吉田 耕作, 現代解析入門 後篇「測度と積分」, 岩波書店 (1991).

[27] コーシー著, 小堀憲 訳・解説, 微分積分学要論, 現代数学の系譜 1, 共立出版 (1975).
A.L.Cauchy, Résumé des Le?ons sur le Calcul Infinitésimal (1823) の翻訳.

[28] E. ハイラー, G. ワナー, 解析教程 上, 下, シュプリンガーフェアラーク東京 (1997).

[29] ルベーグ著, 吉田耕作・松原稔 訳・解説, 積分・長さおよび面積, 現代数学の系譜 3, 共立出版 (1977).
H. Lebesgue, Intégrale, Longueur, Aire (1902) の翻訳と解説。

[30] 足立恒雄, 杉浦光夫, 長岡亮介 編訳, リーマン論文集, 朝倉書店 (2004).

索 引

付 録D　積分の基本的な性質の証明

大事なところの多くの証明を紹介するという方針で授業しているが、基本的な性質の証明をさぼったところも多い。いくつか補足しておく。

D.1　Darboux の定理の別証

補題 1.1.5 として紹介して、そこで良くある証明を紹介しておいたが、それは少し気に入らないという人がいたので、以下自力で考え直した証明を述べる。

$M = \sup_A f$, $\mu = \inf_A f$ とおく。$M = \mu$ のとき主張は明らかだから、以下 $M > \mu$ とする。
$U(f, A)$ の定義から、任意の $\varepsilon > 0$ に対してある分割 $\Delta_\varepsilon = \{z_1, \cdots, z_\ell\}$ が存在して、

$$U(f, A, \Delta_\varepsilon) \leq U(f, A) + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{D.1}$$

以下

$$\delta = \frac{\varepsilon}{2\ell(M - \mu)}$$

とおくとき、$|\Delta| \leq \delta$ を満たす任意の A の分割 Δ に対して、

$$U(f, A) \leq U(f, A, \Delta) \leq U(f, A) + \varepsilon$$

が成り立つことを示す。

Δ の分点を $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ とおき、Δ と Δ_ε の分点を合せて作った A の分割を Δ' とする。

Δ に属する各小区間 $I_j = [x_{j-1}, x_j]$ の内部に Δ_ε の分点が存在するかどうかで場合分けする。

(i) I_j の内部 I_j° に Δ_ε の分点が存在しない。
このとき I_j は Δ' に属する小区間でもある。ゆえに I_j からの $U(f, A, \Delta)$, $U(f, A, \Delta')$ の、寄与は等しい。

(ii) I_j の内部 I_j° に Δ_ε の分点が存在する。
それらすべてを $z_k < \cdots < z_m$ とする。このとき I_j は Δ' では

$$[x_{j-1}, z_k], [z_{k+1}, z_{k+2}], \cdots, [z_{m-1}, z_m], [z_m, x_j]$$

という小区間に分割される。$U(f, A, \Delta')$ でこれら小区間に対応する部分は、

$$\begin{aligned} A_j \quad := \quad & \sup_{x \in [x_{j-1}, z_k]} f(x)(z_k - x_{j-1}) + \sum_{i=1}^{m-k-1} \sup_{x \in [z_{k+i}, z_{k+i+1}]} f(x)(z_{k+i+1} - z_{k+i}) \\ & + \sup_{x \in [x_{j-1}, z_m]} f(x)(x_j - z_m). \end{aligned}$$

もちろん $f \geq \mu$ であるから、

$$A_j \geq \mu \left[(z_k - x_{j-1}) + \sum_{i=1}^{m-k-1} (z_{k+i+1} - z_{k+i}) + (x_j - z_m) \right] = \mu(x_j - x_{j-1}).$$

一方、$U(f, A, \Delta)$ で I_j に対応する部分は

$$B_j = \sup_{x \in I_j} f(x)(x_j - x_{j-1}) \leq M(x_j - x_{j-1}).$$

これから

$$B_j - A_j \leq (M - \mu)(x_j - x_{j-1}) \leq (M - \mu)|\Delta|.$$

ゆえに

$$U(f, A, \Delta) - U(f, A, \Delta') = \sum_{I_j^\circ \cap \Delta_\varepsilon \neq \emptyset} (B_j - A_j) \leq (M - \mu)|\Delta| \sum_{I_j^\circ \cap \Delta_\varepsilon \neq \emptyset} 1 \leq \ell(M - \mu)|\Delta|.$$

ゆえに $|\Delta| \leq \delta$ ならば

(D.2)
$$U(f, A, \Delta) \leq U(f, A, \Delta') + \frac{\varepsilon}{2}.$$

ところで Δ' は Δ_ε の細分であるから

(D.3)
$$U(f, A, \Delta') \leq U(f, A, \Delta_\varepsilon).$$

(D.1), (D.2), (D.3) から

$$U(f, A, \Delta) \leq U(f, A, \Delta') + \frac{\varepsilon}{2} \leq U(f, A, \Delta_\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{2} \leq U(f, A) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = U(f, A) + \varepsilon.$$

一方で $U(f, A)$ の定義から

$$U(f, A) \leq U(f, A, \Delta)$$

であるから、まとめて

$$U(f, A) \leq U(f, A, \Delta) \leq U(f, A) + \varepsilon. \blacksquare$$

付 録E　がらくた箱

E.1　四面体の体積

四面体

$$T = \{\boldsymbol{p} + t\boldsymbol{a} + s\boldsymbol{b} + r\boldsymbol{c}; t \geq 0,\ s \geq 0,\ r \geq 0,\ t + s + r \leq 1\}$$

の体積は平行六面体

$$\{\boldsymbol{p} + t\boldsymbol{a} + s\boldsymbol{b} + r\boldsymbol{c}; t \in [0, 1],\ s \in [0, 1],\ r \in [0, 1]\}$$

の 1/6 であることは簡単に分かる (「知っている」ことでもあるし、変数変換して計算してもよろしい)。

$$\mu_3(T) = \frac{1}{6} \left|\det A\right|, \quad A = (\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}).$$

ところで四面体があるとき、$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ は分からず、分かっているのは各辺の長さだけということがある。このような場合に役立つ公式を導こう。一般に $\det A = \det A^T$ であることに注意すると

$$|\det A| = \sqrt{\det A^T \det A} = \sqrt{\det(A^T A)} = \sqrt{\det \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c} \end{pmatrix}}.$$

ゆえに $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ の内積が分かれば計算できる。

たとえば

$$\|\boldsymbol{a}\| =: a, \quad \|\boldsymbol{b}\| =: b, \quad \|\boldsymbol{c}\| =: c$$

とおくと、

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = a^2, \quad \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b} = b^2, \quad \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c} = c^2.$$

さらに

$$\|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}\| =: k, \quad \|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}\| =: \ell, \quad \|\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a}\| =: m$$

とおくと、余弦定理から[1]

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = a^2 + b^2 - k^2, \quad \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} = b^2 + c^2 - \ell^2, \quad \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a} = c^2 + a^2 - m^2.$$

これから

$$A^T A = \begin{pmatrix} a^2 & a^2 + b^2 - k^2 & a^2 + c^2 - m^2 \\ b^2 + a^2 - k - 2 & b^2 & b^2 + c^2 - \ell^2 \\ c^2 + a^2 - m^2 & b^2 + c^2 - \ell^2 & c^2 \end{pmatrix}.$$

[1]あるいは内積の性質から、例えば $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \frac{1}{2}\left(\|\boldsymbol{a}\|^2 + \|\boldsymbol{b}\|^2 - \|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}\|^2\right)$.

E.2　Jordan 測度

$$
\begin{gathered}
(\pm\infty) + a = \pm\infty, \quad a + (\pm\infty) + a = \pm\infty, \\
(\pm\infty) - a = \pm\infty, \quad a - (\pm\infty) = \mp\infty, \\
(\pm\infty) + (\pm\infty) = \pm\infty, \quad (\pm\infty) - (\mp\infty) = \pm\infty, \\
a \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot a = \begin{cases} \pm\infty & a > 0 \\ \mp\infty & a < 0 \end{cases} \\
(\pm\infty) \cdot (\pm\infty) = +\infty, \quad (\pm\infty) \cdot (\mp\infty) = -\infty
\end{gathered}
$$

$\mathbf{R}^n$ 上の有限加法族である。

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$
2. $A \in \mathcal{F}$ ならば $A^c \in \mathcal{F}$
3. $A, B \in \mathcal{F}$ ならば $A \cup B \in \mathcal{F}$

またすべての区間を含んでいる。こういうもののうちで最小である。

1. $\forall A \in \mathcal{F}\ 0 \le m(A) \le \infty$. 特に $m(\emptyset) = 0$.
2. $A, B \in \mathcal{F}$, $A \cap B = \emptyset$ ならば $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$.

E.3　その他

- 金子先生は Koch 曲線は正の Jordan 外測度を持つと書いていたが、本当かな？これは Osgood 曲線のことを言っていたつもりらしい。
- Hausdorff 次元、Hausdorff 測度、Hilbert 曲線などなど書きたい。
- 実はこの文書の定義によると絶対収束なのか？証明できるか。
- Ω が Jordan 可測ならば Ω° は近似列を持つが、Ω 自身は近似列を持つかどうか？
- Jordan 領域は Jordan 可測とは限らないような気がするが、具体的な反例は？ — 上の Osgood 曲線を使えば良い。
- ガンマ関数のグラフを入れよう。それからスターリングの公式くらい書くか？
- $\omega_{n+2}/\omega_n = \pi R^2/(n/2+1)$ を直接示してみよう。
- Dirichlet の積分を紹介しよう。そもそも面積座標の積分の公式ってそれでしょ？
- ベルヌーイ数を書こうと思ったんだけど、どうしてだろう？（思い出せない。）