2004年度解析概論II期末試験

桂田 祐史

2005年2月18日

- 途中経過を書こう (中間点をもらいやすい)
- どこか省略するとしても、見晴らしの良いところはきちんと残すように

1A　(1) A を $\mathbf{R}^n$ の閉方体, $f\colon A\to\mathbf{R}$ を有界な関数とするとき、f が A で積分可能であるとは、$U(f,A)=L(f,A)$ が成り立つことをいい、このときその共通値を f の A 上の積分といい、$\int_A f(x)\,dx$ で表す。ここで $U(f,A)$, $L(f,A)$ は、それぞれ f の A 上の上積分、下積分である:

$$U(f,A)=\inf\{U(f,A,\Delta);\Delta\text{ は }A\text{ の閉方体への分割 }\},$$

$$L(f,A)=\sup\{L(f,A,\Delta);\Delta\text{ は }A\text{ の閉方体への分割 }\}.$$

(ただし $U(f,A,\Delta)$, $L(f,A,\Delta)$ はそれぞれ A の閉方体への分割 Δ に関する上限和、下限和を表すとする。)

(2) $x_j:=2j/N$ $(j=0,1,\dots,N)$, $A_j:=[x_{j-1},x_j]$ $(j=1,2,\dots,N)$ とおく。f は $[0,1/2]$ で単調減少、$[1/2,1]$ で単調増加だから、

$$\max_{x\in A_j}f(x)=\begin{cases}f(x_{j-1}) & (j=1,2,\dots,\dfrac{N}{2})\\ f(x_j) & (j=\dfrac{N}{2}+1,\dots,N),\end{cases}\qquad \min_{x\in A_j}f(x)=\begin{cases}f(x_j) & (j=1,2,\dots,\dfrac{N}{2})\\ f(x_{j-1}) & (j=\dfrac{N}{2}+1,\dots,N)\end{cases}$$

が成り立つ。ゆえに

$$\begin{aligned}U(f,A,\Delta)&=\sum_{j=1}^{N}\max_{x\in A_j}f(x)\mu(A_j)=\sum_{j=1}^{N/2}f(x_{j-1})(x_j-x_{j-1})+\sum_{j=N/2+1}^{N}f(x_j)(x_j-x_{j-1})\\&=2\sum_{j=1}^{N/2}f(x_{j-1})(x_j-x_{j-1})=2\sum_{j=1}^{N/2}\left(\frac{2(j-1)}{N}-1\right)^2\frac{2}{N}\\&=\frac{16}{N^3}\sum_{j=1}^{N/2}\left((j-1)-\frac{N}{2}\right)^2=\frac{2}{3}\left(1+\frac{3}{N}+\frac{2}{N^2}\right).\end{aligned}$$

(3) $L(f,A,\Delta)\le L(f,A)\le U(f,A)\le U(f,A,\Delta)$ であるが、$N\to\infty$ とするとき、$L(f,A,\Delta)$, $U(f,A,\Delta)\to 2/3$ なので、$L(f,A)=U(f,A)=\dfrac{2}{3}$. ゆえに f は A 上で積分可能で、$\displaystyle\int_A f(x)\,dx=\frac{2}{3}$.

1B (1) $\mathbf{R}^n$ の有界集合 Ω に対して、Ω が Jordan 可測であるとは、$\overline{\Omega} \subset A^\circ$ となる $\mathbf{R}^n$ の閉方体 A を取ったとき、χ_Ω が A で積分可能であることをいう (ただし χ_Ω は Ω の特性関数である)。このとき $\displaystyle\int_A \chi_\Omega(x)\,dx$ の値を Ω の Jordan 測度という。

(2) $\Omega = [0,1] \cap \mathbf{Q}$ (Q は有理数体) は R の Jordan 可測でない有界部分集合である。実際、任意の分割 Δ に対して、小閉方体全体を A_j $(j = 1, 2, \dots, N)$ とすると、

$$\sup_{x \in A_j} \chi_\Omega(x) = \begin{cases} 1 & (A_j \cap [0,1] \neq \emptyset) \\ 0 & (A_j \cap [0,1] = \emptyset) \end{cases}$$

であるから、

$$U(\chi_\Omega, A, \Delta) = \sum_{j=1}^N \sup_{x \in A_j} \chi_\Omega(x) \mu(A_j) = \sum_{A_j \cap [0,1] \neq \emptyset} \mu(A_j) = \mu\left(\bigcup_{A_j \cap [0,1] \neq \emptyset} A_j\right).$$

ゆえに $U(\chi_\Omega, A) = \mu([0,1]) = 1.$

2 (1) $\displaystyle I = \int_0^\pi \left(\int_0^x \frac{y \sin x}{x}\,dy\right) dx.$

(2)

$$I = \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^x dx = \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{x^2}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi x \sin x\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

3 広義積分であることを理解するのが重要である。$N := \{0\}$ は零集合であり、$K_n := \{(x,y,z); \frac{1}{n^2} \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ $(n \in \mathbf{N})$ は $\Omega \setminus N$ の近似列である。被積分関数 $f(x,y,z) = 1/(x^2+y^2+z^2)^\alpha$ は $\Omega \setminus N$ で定義され、符号は一定であるから

$$\iiint_\Omega \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha}\,dx\,dy\,dz = \lim_{n\to\infty} \iiint_{K_n} f(x,y,z)\,dxdydz.$$

極座標変換

$$x = r \sin\theta \cos\phi, \quad y = r \sin\theta \sin\phi, \quad z = r \cos\theta \cos\phi$$

により $dx\,dy\,dz = r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$ であるから、

$$\begin{aligned}\iiint_{K_n} f(x,y,z) dx\,dy\,dz &= \iiint_{\substack{1/n \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq \phi \leq 2\pi}} \frac{1}{(r^2)^\alpha} \cdot r^2 \sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi \\ &= \int_{1/n}^1 r^{2-2\alpha} dr \int_0^\pi \sin\theta\,d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = 4\pi \int_{1/n}^1 r^{2-2\alpha}\,dr.\end{aligned}$$

($r^{2-2\alpha}$ となるべきところ、$r^{-\alpha}$ とする人が多くて、ちょっとため息。)

$2 - 2\alpha \neq -1$ の場合、$n \to \infty$ のとき

$$\int_{1/n}^1 r^{2-2\alpha}\,dr = \left[\frac{r^{3-2\alpha}}{3-2\alpha}\right]_{1/n}^1 = \frac{1}{3-2\alpha}\left(1 - n^{2\alpha-3}\right) \to \begin{cases} \infty & (3-2\alpha < 0) \\ \dfrac{1}{3-2\alpha} & (3-2\alpha > 0). \end{cases}$$

一方、$2-2\alpha=-1$ の場合

$$\int_{1/n}^{1} r^{2-2\alpha}\,dr = [\log r]_{1/n}^{1} = -\log\frac{1}{n} = \log n \to \infty \quad (n\to\infty).$$

以上をまとめると

$$I = \begin{cases} \dfrac{4\pi}{3-2\alpha} & (\alpha < 3/2) \\ \infty & (\alpha \geq 3/2). \end{cases}$$

(かなり多くの人が $-\infty$ などとしているけれど、正の関数を積分して結果が負になったらおかしいと思わなくてはいけない。あいつはもの凄いかせいだらしいで、負債総額〇兆円みたいな話。記号を操作して計算するだけでなくて、どういう関数か常にイメージを持っているべきである。おかしな例えではない。)

4 (1) 曲線 C のパラメーターづけとして $\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ $(t\in[0,2\pi])$ がとれる。このとき

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}(t)) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \quad \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

であるから、

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}(t))\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = (-\sin t)^2 + (\cos t)^2 = 1.$$

ゆえに

$$\int_C \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^{2\pi} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}(t))\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\,dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

(2) もしも $\boldsymbol{f}$ のポテンシャルが存在すれば、Ω 内の任意の滑らかな閉曲線 γ に対して、$\displaystyle\int_\gamma \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r} = 0$ となるはずだが、(1) より $\displaystyle\int_C \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r} \neq 0$ となるので、ポテンシャルは存在しない。

(3) (この線積分の正体は授業でばらしてあるので、計算しないで「結果はこれだ」と書いた人もいた。うんうん。きちんとやるのは大変かな。以下参考まで[1]。) $\boldsymbol{f} = (f,g)^T$ とおくとき、

$$f_y = g_x$$

が成り立つことが分かる。H は単連結であるから、$\boldsymbol{f}|_H$ はポテンシャルを持つ。H に属する点 $(1,0)$ をとり、C を $(1,0)$ を始点、(x,y) を終点とする H 内の任意の曲線とするとき

$$F(x,y) := \int_C \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r}$$

とおくと、F はポテンシャルとなる。

$(x,y) = (R\cos\theta, R\sin\theta)$ とするとき、C として、$C = C_1 + C_2$ を選ぶ。ただし $(x,y) = (r,0)$ $(r\in[1,R])$ を C_1、$(x,y) = (R\cos t, R\sin t)$ $(t\in[0,\theta])$ を C_2 とする。

[1] 一問くらいは「どうだ解けるか」みたいな問題を出してみたく思うわけで、この (3) はそういう問題です。

C_1 上の線積分は

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}(t)) = \left(\frac{-0}{r^2+0^2}, \frac{r}{r^2+0^2}\right)^T = (0,1)^T, \quad \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = (1,0)^T$$

より $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}(t)) \cdot \dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt} = 0$ となるので、$\displaystyle\int_{C_1} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r} = 0.$

C_2 上の線積分は、

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}(t)) = \left(\frac{-R\sin t}{R^2}, \frac{R\cos t}{R^2}\right)^T = \frac{1}{R}(-\sin t, \cos t)^T, \quad \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = (-R\sin t, R\cos t)^T$$

より $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}(t)) \cdot \dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt} = 1$ となるので、

$$\int_{C_2} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^\theta \boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}(t)) \cdot \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} dt = \int_0^\theta dt = \theta = \arctan\frac{y}{x} \quad (\text{主値}).$$

ゆえに

$$F(x,y) = \int_{C_1} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r} + \int_{C_2} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r} = \arctan\frac{y}{x}.$$

(線積分を重積分で計算したりする人もいて…成績は基本的に点を加点していって、合計点でつけるわけで、そういう間違いをしても単位が取れたりするのだが、線積分を誤解したままでは、とにかくマズイ。本当は学生を呼び出して説明したいところだ。)

5 (これは (2) から解く方が答案書き易いね。) (2)

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} R\cos\theta\cos\phi \\ R\cos\theta\sin\phi \\ -R\sin\theta \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \phi} = \begin{pmatrix} -R\sin\theta\sin\phi \\ R\sin\theta\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

であるから、

$$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \phi} &= \det\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ R\cos\theta\cos\phi & R\cos\theta\sin\phi & -R\sin\theta \\ -R\sin\theta\sin\phi & R\sin\theta\cos\phi & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^2\sin^2\theta\cos\phi \\ R^2\sin^2\theta\sin\phi \\ R^2\sin\theta\cos\theta \end{pmatrix} \\ &= R^2\sin\theta\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

後のために準備しておくと ($0 \le \theta \le \pi$ であるから $\sin\theta \ge 0$ に注意して)

$$\left\|\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \phi}\right\| = R^2\sqrt{\sin^2\theta} = R^2\sin\theta.$$

(1) φ は D で単射であり[2]、(2) から D で $\dfrac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \theta} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \phi} \neq \boldsymbol{0}$ であるので ($0 < \theta < \pi$ であるので $\sin\theta > 0$ となることに注意)、$S = \varphi(D)$ は正則パラメーター曲面である。

[2] これは実際に証明を書かなくても良いことにしたが、書いた人の多くが間違っているのには頭かかえました。$(\theta_1, \phi_1) \neq (\theta_2, \phi_2)$ から $\theta_1 \neq \theta_2$ は出て来ないよ。$\theta_1 \neq \theta_2$ または $\phi_1 \neq \phi_2$ ですね。

(3) S の Jordan 測度を $\mu(S)$ と書くと

$$\mu(S) = \iint_D \left\| \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \phi} \right\| d\theta\, d\phi = R^2 \iint_{\substack{0<\theta<\pi \\ 0<\phi<2\pi}} \sin\theta\, d\theta\, d\phi = R^2 \cdot 2 \cdot 2\pi = 4\pi R^2.$$