# 解析概論II演習問題　No.7

桂田 祐史

2006年1月10日

(曲面積、面積分の定義を理解することを目標とする。具体的には曲面のパラメーター表示を使って、面積分を普通の重積分に直せればよしとする。面積分の具体的な計算はしばしば初等関数の範囲では不可能で、たとえ可能でも非常に面倒になることが珍しくない。計算練習をこなして身に付けることがそろそろ限界なのかも。)

## 曲面積の問題

**25.**　(1) 螺旋面 $S$: $x = u\cos\omega v$, $y = u\sin\omega v$, $z = av$ $(0 \le u \le 1,\ 0 \le v \le t)$ の面積を求めよ。ただし $a$, $\omega$, $t$ は正定数であるとする。
(2) $S$: $(x^2+y^2)^{1/3} + z^{2/3} = a^{2/3}$ ($a$ は正定数) の全表面積を求めよ。

**解答**　(1) $\dfrac{a^2 t}{2\omega}\left[\dfrac{\omega}{a}\sqrt{1+\dfrac{\omega^2}{a^2}} + \log\left|\dfrac{\omega}{a} + \sqrt{1+\dfrac{\omega^2}{a^2}}\right|\right]$　(2) $\dfrac{12}{5}\pi a^2$

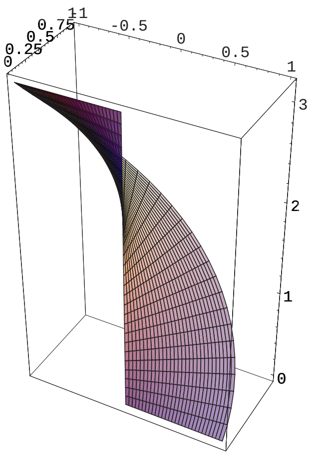


図 1: 螺旋面 $a=1$, $\omega=1$, $t=\pi$

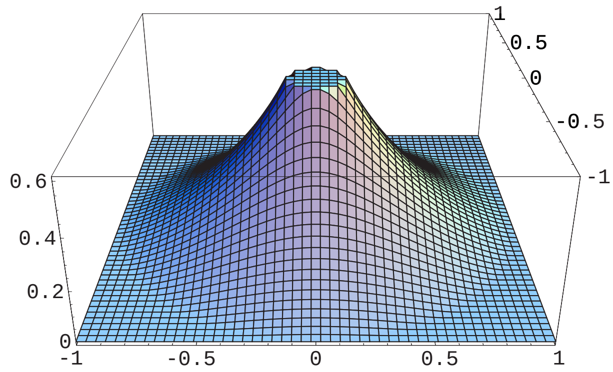


図 2: $(x^2+y^2)^{1/3} + z^{2/3} = 1$

**26.**　つぎの図形の全表面積を求めよ。

(1) $\Omega = \{(x,y,z); 0 \le z \le 1-x-y,\ x \le 0,\ y \le 0\}$

(2) $\Omega = \{(x,y,z); x^2+y^2+z^2 \le 1,\ z \ge \dfrac{1}{2},\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$

(3) $\Omega = \{(x, y, z); x^2 + y^2 \leq z^2,\ 0 \leq z \leq a\}$

(4) $\Omega = \{(x, y, z); x^2 + y^2 \leq 1 - z,\ 0 \leq z \leq 1\}$

**解答 (結果のみ)** (1) $\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$ (2) $\dfrac{37}{48}\pi - \dfrac{\sqrt{3}}{4}$ (3) $\left(1+\sqrt{2}\right)\pi a^2$ (4) $\dfrac{5\left(\sqrt{5}+1\right)}{6}\pi$

**27.**

(1) 曲面 $x = u + v$, $y = u - v$, $z = uv$ $(u^2 + v^2 \leq 1)$ の面積を求めよ。

(2) 球面 $r = a$ が錐面 $\theta = \alpha$ によって切り取られる部分の面積を求めよ。

(3) 錐体 $z^2 = a(x^2 + y^2)$, $a > 0$ の中にある球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 2bz$ の面積を求めよ。

(4) 円錐面 $z^2 = 2xy$ の、平面 $x = 0$, $y = 0$, $x + y = a$ によって限られた部分の面積を求めよ。ただし、$a > 0$.

(5) 半径 $a$ の球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ のうちで平面 $x = x_0$ および $x = x_0 + h$, $h > 0$ の間にある部分の面積を求めよ。

(6) 輪環面 $z^2 + \left(\sqrt{x^2 + y^2} - b\right)^2 = a^2$, $0 < a < b$ の全表面積を求めよ。

**解答 (結果のみ)** (1) $\dfrac{2}{3}\pi\left(3\sqrt{3}-1\right)$ (2) $2\pi a^2(1-\cos\alpha)$ (3) $4\pi ab^2/(1+a)$ (4) $\pi a^2/\sqrt{2}$ (5) $2\pi ah$ (6) $4\pi^2 ab$

**28.** つぎの曲線を $x$ 軸のまわりに回転して生ずる曲面の面積を求めよ。
(1) $z = 0,\ y = x^2$ $(0 \leq x \leq 1)$ (2) $z = 0,\ y = \sin x$ $(0 \leq x \leq \pi)$ (3) $z = 0,\ y = \sqrt{x}$ $(0 \leq x \leq 1)$

**解答 (結果のみ)** (1) $\dfrac{\pi}{27}\left(10\sqrt{10}-1\right)$ (2) $2\pi\left[\sqrt{2}+\log\left(1+\sqrt{2}\right)\right]$ (3) $\dfrac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5}-1\right)$

# 面積分

**29.**

(1) $S$ は原点中心、半径 1 の球面 (外側が表) とする。面積分 $\displaystyle\int_S x\, dy \wedge dz$ を求めよ。($\boldsymbol{f} = (x, 0, 0)^T$ とするとき $\displaystyle\int_S \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{n}\, dS$ を求めよ、ということ。)

(2) 曲面 $S$ を

$$S\colon \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,\ x > 0$$

とし (ただし $a$, $b$, $c$ は正の定数)、$z$ 軸の正の側を $S$ の表とする。このとき $\displaystyle\int_S z\, dx \wedge dy$ を求めよ。($\boldsymbol{f} = (0, 0, z)^T$ とするとき $\displaystyle\int_S \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{n}\, dS$ を求めよ、ということ。)

(3) 曲面 $S$ を

$$S\colon y^2+z^2=a^2,\ z>0,\ 0<x<a$$

とするとき (ただし $a$ は正の定数)、$\displaystyle\int_S z\,dS$ を求めよ。

**解答 (結果のみ)**　(1) $\dfrac{4}{3}\pi$　(2) $\dfrac{2}{3}\pi abc$　(3) $2a^3$

**30.**　面積分を求めよ。ただし $S$ の正の向きの単位法線ベクトルを $\boldsymbol{n}=(n_1,n_2,n_3)^T$ とする。

(1) $S$: $z=1-x-y$, $x>0$, $y>0$, $z>0$; $n_1>0$ とするとき $\displaystyle\int_S x\,dy\wedge dz$, $\displaystyle\int_S x\,dS.$

(2) $S$: $x^2+y^2=z^2$, $0<z<a$; $n_3>0$ とするとき、$\displaystyle\int_S (x^2+y^2)dx\wedge dy$, $\displaystyle\int_S (x^2+y^2)dS.$

(3) $S$: $x^2+y^2+z^2=1$, $y>0$; $n_2>0$ とするとき、$\displaystyle\int_S (x^2+y^2)dz\wedge dx$, $\displaystyle\int_S (x^2+y^2)dS.$

(4) $S$: $x^2+y^2=1-z$, $0<z<1$; $n_3>0$ とするとき、$\displaystyle\int_S z\,dx\wedge dy$, $\displaystyle\int_S z\,dS.$

**31.**　曲面 $S$ は円錐 $(z-a)^2\ge x^2+y^2$, $0\le z\le a$ の全表面 (ただし外側が表) とする。このとき、つぎの面積分を求めよ。
(1) $\displaystyle\int_S dx\wedge dy$　(2) $\displaystyle\int_S dy\wedge dz$　(3) $\displaystyle\int_S x\,dy\wedge dz$　(4) $\displaystyle\int_S z\,dx\wedge dy$　(5) $\displaystyle\int_S x\,dS$　(6) $\displaystyle\int_S z\,dS$
(1)〜 (4) はそれぞれ $\boldsymbol{f}=(0,0,1)^T$, $\boldsymbol{f}=(1,0,0)^T$, $\boldsymbol{f}=(x,0,0)^T$, $\boldsymbol{f}=(0,0,z)^T$ に対する $\displaystyle\int_S \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$ である。

**解答 (結果のみ)**　(1) 0　(2) 0　(3) $\dfrac{\pi}{3}a^3$　(4) $\dfrac{\pi}{3}a^3$　(5) 0　(6) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}\pi a^3$

**32.**　$S$ は球面 $x^2+y^2+z^2=r^2, r>0$ とするとき、次の各場合に面積分 $\displaystyle\int_S \frac{dS}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}}$ を求めよ。　(1) $0\le a\le r$ のとき　(2) $a>r$ のとき

**解答 (結果のみ)**　(1) $4\pi r$　(2) $4\pi r^2/a$

**33.**　曲面 $S$ は

$$S\colon x=u\cos v,\quad y=u\sin v,\quad z=u^2\quad ((u,v)\in[0,a]\times[0,\pi])$$

で与えられる (ただし $z$ 軸の正の向きの法線方向を $S$ の表とする)。このとき

$$\int_S (y^2+z^2)dy\wedge dz+(z^2+x^2)dz\wedge dx+(x^2+y^2)dx\wedge dy$$

を求めよ。($\boldsymbol{f}=(y^2+z^2,z^2+x^2,x^2+y^2)^T$ に対して $\displaystyle\int_S \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$ を求めよ、ということ。)

**解答 (結果のみ)** $\dfrac{\pi}{4}a^4 - \dfrac{4}{15}a^5 - \dfrac{4}{7}a^7$

**34.** 次の各曲面 $S$ に対して次の面積分を求めよ (ただし $S$ の外側を表とする)。また、$S$ が囲む図形の体積 $V$ と $I$ との関係を求めよ。

$$I = \int_S x\,dy \wedge dz + y\,dz \wedge dx + z\,dx \wedge dy.$$

(1) $S$: $x = a + R\sin v\cos u$, $y = b + R\sin v\sin u$, $z = c + R\cos v$ $\quad((u,v) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi])$.
(2) 輪環面$S$: $x = (a+b\cos v)\cos u$, $y = (a+b\cos v)\sin u$, $z = b\sin v$ $\quad((u,v) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$, ただし $a > b > 0)$.

**解答 (結果のみ)** (1) $I = 4\pi R^3$, $I = 3V$ (2) $I = 6\pi^2 ab^2$, $I = 3V$

# 積分定理

**35.** (1) $S$ は半球面 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, $z > 0$, 上側を表とする。このとき $\int_S dy \wedge dz + dz \wedge dx + dx \wedge dy$ を求めよ。
(2) $S$: $z = x^2 + y^2$, $0 \leq x^2 + y^2 \leq a^2$ は内側を表とする。このとき $\int_S (y^2 + z^2) dy \wedge dz + (z^2 + x^2) dz \wedge dx + (x^2 + y^2) dx \wedge dy$ を求めよ。

**解答 (結果のみ)** (1) $\pi a^2$ (2) $\dfrac{\pi}{2}a^4$

**36.** $S$ は半径 $a$, 長さ $h$ の円柱の境界で、外側が表とする。つぎの積分を計算せよ。
(1) $\int_S x\,dy \wedge dz + y\,dx \wedge dx + z\,dx \wedge dy$ (2) $\int_S x^2 y^3\,dx \wedge dy$

**解答 (結果のみ)** (1) $3\pi a^2 h$ (2) 0

**37.** $C^1$-級の閉曲面 $S$ によって囲まれる領域を $\Omega$ とし、$S$ の面積を $\mu_2(S)$, $\Omega$ の体積を $\mu_3(\Omega)$ とする。$S$ の外向き単位法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$, 位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$ とすれば次の (1), (2) が成り立つことを示せ。

(1) $\int_S \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n}\,dS = 3\mu_3(\Omega)$ (2) $\iiint_\Omega \operatorname{div} \boldsymbol{n}\,dS = \mu_2(S)$.

**38.** 楕円面 $S$: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ 上の点における接平面に、原点から下ろした垂線の長さを $p$ とするとき、$\int_S \dfrac{1}{p}\,dS$ を求めよ。(ヒント: $S$ のパラメーター表示 $x = a\sin\theta\cos\phi$, $y = b\sin\theta\sin\phi$, $z = c\cos\theta$ $(0 \leq \theta \leq \pi,\ 0 \leq \phi \leq 2\pi)$ を使う。)

**解答 (結果のみ)** $\dfrac{4}{3}\pi abc\left(\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}\right)$