解析概論II演習問題　No.5

桂田 祐史

2005年11月29日

15.　f, g をスカラー場とするとき

$$\nabla(fg) = g(\nabla f) + f(\nabla g)$$

であることを示せ。

16.　次の 3 次元ベクトル場 $\boldsymbol{v}$ の、指定された点における発散 $\nabla \cdot \boldsymbol{v}$ を計算せよ。

(1) $\boldsymbol{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2 z \\ -2y^2 z \\ xy^2 z \end{pmatrix}$, $(1,-1,0)$.

(2) $\boldsymbol{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x\sin y \\ y\sin z \\ z\sin x \end{pmatrix}$, $(\pi/2,\pi/2,\pi/2)$.

(3) $\boldsymbol{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \log(x^2+y^2+z^2) \\ y\log(x^2+y^2+z^2) \\ z\log(x^2+y^2+z^2) \end{pmatrix}$, $(1,1,1)$.

解答　(1) 1　(2) 3　(3) $2 + 2\log 3$

17.　次の関数 f に対して、∇f, $\triangle f$ を計算せよ。

(1) $f(x,y,z) = x^2 y^3 z^5$.

(2) $f(\boldsymbol{r}) = r^2 e^{-r}$. ただし $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $r = \|\boldsymbol{r}\|$.

解答　(1) $\nabla f = (3x^2y^2z^5, 2x^3yz^5, 5x^3y^2z^4)^T$, $\triangle f = 2xz^3(10x^2y^2 + 3y^2z^2 + z^2x^2)$　(2) $\nabla f = (2-r)e^{-r}\boldsymbol{r}$, $\triangle f = (r^2 - 6r + 6)e^{-r}$

18.　次の定理の (1), (2), (3), (4) を証明せよ。((5) は (4) を移項しただけ。)

定理 0.1 (1) $\nabla \cdot \nabla f = \triangle f$. すなわち $\mathrm{div}(\mathrm{grad}\, f) = \triangle f$.

(2) $\nabla \times \nabla f = \mathbf{0}$. すなわち $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\, f) = \mathbf{0}$.

(3) $\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{v}) = \mathbf{0}$. すなわち $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\, \boldsymbol{v}) = 0$.

(4) $\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{v}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{v}) - \triangle \boldsymbol{v}$. すなわち $\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\, \boldsymbol{v}) = \mathrm{grad}(\mathrm{div}\, \boldsymbol{v}) - \triangle \boldsymbol{v}$.

(5) $\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{v}) = \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{v}) + \triangle \boldsymbol{v}$. すなわち $\mathrm{grad}(\mathrm{div}\, \boldsymbol{v}) = \mathrm{rot}(\mathrm{rot}\, \boldsymbol{v}) + \triangle \boldsymbol{v}$.

19.　次のベクトル場 $\boldsymbol{v}$ に対して、回転 $\mathrm{rot}\, \boldsymbol{v}$ を計算せよ。

(1) $\boldsymbol{v}(x, y, z) = (x^2 y, -2xz^2, y^2 z)^T$.

(2) $\boldsymbol{v}(x, y, z) = (\sin xy, \cos yz, xyz)^T$.

解答　(1) $\mathrm{rot}\, \boldsymbol{v} = (2yz + 4xz, 0, -x^2 - 2z^2)^T$　(2) $\mathrm{rot}\, \boldsymbol{v} = (xz + y \sin yz, -yz, -x \cos xy)^T$

20.　次の関係式を示せ。

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{f} \times \boldsymbol{g}) = (\nabla \times \boldsymbol{f}) \cdot \boldsymbol{g} - (\nabla \times \boldsymbol{g}) \cdot \boldsymbol{f}$$

21.　曲線 C が次のそれぞれの場合について、次の線積分を求めよ。

$$\int_C xy\, dx - y^2\, dy.$$

(1) $x = \sqrt{t},\ y = t^2 \quad (0 \leq t \leq 1)$　(2) $x = 2t,\ y = 4t \quad (0 \leq t \leq 1)$　(3) $y = 2x,\ x = x$ $(0 \leq x \leq 2)$

22.　次のベクトル場 $\boldsymbol{f}$ と曲線 C に対して、線積分 $\displaystyle\int_C \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{s}$ を計算せよ。

(1) $\boldsymbol{f} = (x^2 - xy, y^2 - xy)^T$, $C\colon y = x^2$, $-1 \leq x \leq 1$.

(2) $\boldsymbol{f} = (y^2, x + y)^T$, $C\colon y = x^3$, $0 \leq x \leq 1$.

(3) $\boldsymbol{f} = (x^2 + 2y, -x + \cos y)^T$, $C\colon$ $(0,0)$, $(2,0)$, $(3,1)$, $(1,1)$ を頂点とする平行四辺形の周囲。

(4) $\boldsymbol{f}(x, y, z) = (x^2 + y, -yz, z^2 x)^T$, $C\colon (t, t^2, t^3)$, $0 \leq t \leq 1$.

(5) $\boldsymbol{f}(x, y, z) = (xy, -z, 3x)^T$, $C\colon (t^2 + 1, t^2, t)$, $0 \leq t \leq 2$.

解答 (結果のみ)　(1) $-\dfrac{2}{15}$　(2) $\dfrac{39}{28}$　(3) -6　(4) $\dfrac{143}{210}$　(5) 38

配布したプリントで、(2) の解答になぜか $-$ を付けるという誤植があった。