解析概論II演習問題　No.4

桂田 祐史

2005年10月31日

1　補足

(時間的余裕がないので、体積の問題の演習はカットとすることになるかもしれないが、自習する学生が苦労しそうなので、次の事実を紹介しておく。結局は「断面積を積分すると体積になる」という、最初の頃に確認した「高校数学の常識」なのだけれど、命題として示しておかなかったので。)

命題 1.1 D は $\mathbf{R}^{n+1}$ の有界 Jordan 可測集合で、任意の $\eta \in \mathbf{R}$ に対して、

$$D_\eta := \{x \in \mathbf{R}^n; (x,\eta) \in D\}$$

が $\mathbf{R}^n$ の Jordan 可測集合であるならば、任意の有界連続関数 $f\colon D \to \mathbf{R}$ に対して、

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{D_y} f(x,y)\,dx\right) dy$$

が成り立つ。ただし $a := \inf_{(x,y)\in D} y$, $b := \sup_{(x,y)\in D} y$ であり、$D_y = \emptyset$ となる y に対しては $\int_{D_y} f(x,y)\,dx = 0$ とする。特に

$$\mu_{n+1}(D) = \int_a^b \left(\int_{D_y} dx\right) dy = \int_a^b \mu_n(D_y)\,dy.$$

証明　$\mathbf{R}^n$ の十分大きい閉方体 A を取ると $D \subset A \times [a,b]$ となる。$\forall y \in \mathbf{R}$ に対して、

$$\chi_{D_y} = \chi_D(\cdot, y)$$

が成り立つことに注意すると、

$$\begin{aligned}\iint_D f(x,y)\,dx\,dy &= \iint_{A\times[a,b]} \widetilde{f}(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_A \widetilde{f}(x,y)\,dx\right) dy \\ &= \int_a^b \left(\int_{D_y} f(x,y)\,dx\right) dy\end{aligned}$$

例 1.1 (カヴァリエリの原理) $\mathbf{R}^{n+1}$ の有界 Jordan 可測集合 D, E が、

$$\forall y \in \mathbf{R} \quad \mu_n(D_y) = \mu_n(E_y)$$

を満たすならば $\mu_{n+1}(D) = \mu_{n+1}(E)$. ■

2　微積分の応用の問題

11. (体積)　つぎの図形の体積を求めよ。a, b, c は正の定数とする。

(1) $\Omega = \{(x,y,z); x^2+y^2 \le 1,\ x \le z \le 2x+1\}$

(2) $\Omega = \{(x,y,z); x^2+y^2 \le z^2,\ 0 \le z \le a\}$

(3) $\Omega = \{(x,y,z); 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le x+y\}$

(4) $\Omega = \{(x,y,z); \dfrac{1}{4} \le \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \le 1,\ x \le z \le a\}$

(5) $\Omega = \{(x,y,z); \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \le 1-z,\ 0 \le z \le 1\}$

(6) $\Omega = \{(x,y,z); \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} \le 1,\ z \ge \dfrac{c}{2}\}$

解答 (結果のみ)　(1) π　(2) $\dfrac{\pi}{3}a^3$　(3) 1　(4) $\dfrac{3}{4}\pi a^2 b$　(5) $\dfrac{\pi}{2}ab$　(6) $\dfrac{5}{24}\pi abc$

12. (重心)　次の各物体が密度一様としたときの、その物体の重心を求めよ。

(1) 半球 $\{(x,y,z); x^2+y^2+z^2 \le a^2,\ z \ge 0\}$

(2) 1/8 球 $\{(x,y,z); x^2+y^2+z^2 \le a^2,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0\}$

(3) 半円板 $\{(x,y); x^2+y^2 \le a^2,\ x \ge 0\}$

(4) 1/4 円板 $\{(x,y); x^2+y^2 \le a^2,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$

(5) 3 点 $(-a,0)$, $(a,0)$, (b,c) を頂点とする三角形 (ただし a, b, $c > 0$)

解答（結果のみ）　(1) $(\overline{x},\overline{y},\overline{z}) = \left(0, 0, \dfrac{3a}{8}\right)$　(2) $(\overline{x},\overline{y},\overline{z}) = \left(\dfrac{3a}{8}, \dfrac{3a}{8}, \dfrac{3a}{8}\right)$　(3) $(\overline{x},\overline{y}) = \left(0, \dfrac{4a}{3\pi}\right)$　(4) $(\overline{x},\overline{y}) = \left(\dfrac{4a}{3\pi}, \dfrac{4a}{3\pi}\right)$　(5) $(\overline{x},\overline{y}) = \left(\dfrac{b}{3}, \dfrac{c}{3}\right)$

3　広義積分の問題

13. (広義積分)　積分せよ。

(1) $\displaystyle \iint_\Omega \log(x^2+y^2)\,dx\,dy, \quad \Omega=\{(x,y);x^2+y^2\le 1\}.$

(2) $\displaystyle \iint_\Omega \frac{1}{x^2y^3}\,dx\,dy, \quad \Omega=\{(x,y);x\ge 1,\ y\ge 1\}.$

(3) $\displaystyle \iint_\Omega \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy, \quad \Omega=\left\{(x,y);0\le x\le 2,\ x\le y\le \sqrt{2}x\right\}.$

(4) $\displaystyle \iint_\Omega e^{-x}\cos xy\,dx\,dy, \quad \Omega=\{(x,y);x\ge 0,\ 0\le y\le 1\}.$

(5) $\displaystyle \iint_\Omega \frac{\log(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy, \quad \Omega=\{(x,y);x^2+y^2\le 1,\ x\ge 0,\ y\ge 0\}.$

(6) $\displaystyle \iint_\Omega \frac{\log(x^2+y^2)}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3}\,dx\,dy, \quad \Omega=\{(x,y);x^2+y^2\ge 1\}.$

解答 (結果のみ)　(1) $-\pi$　(2) $\dfrac{1}{2}$　(3) $2\left[\log\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)-\log\left(\sqrt{2}+1\right)\right]$　(4) $\pi/4$　(5) $-\pi$　(6) 4π

14. (広義積分)　つぎの広義積分の収束、発散を調べよ。

(1) $\displaystyle \iint_\Omega \frac{dx\,dy}{\log(1+x^2+y^2)}, \quad \Omega=\{(x,y);x^2+y^2\le 1\}.$

(2) $\displaystyle \iint_\Omega \frac{\sin x}{y^2}dx\,dy, \quad \Omega=\{(x,y);0\le x\le y\le \pi\}.$

(3) $\displaystyle \iint_\Omega x^2e^{-xy}\,dx\,dy, \quad \Omega=\{(x,y);0\le x\le 1,\ y\ge x\}.$

(4) $\displaystyle \iint_\Omega \frac{1}{x^2+y^2}dx\,dy, \quad \Omega=\{(x,y);x\ge 0,\ y\ge 0\}.$

(5) $\displaystyle \iint_\Omega e^{-(x+y)}dx\,dy, \quad \Omega=\{(x,y);x\le 0,\ y\ge 0\}.$

(6) $\displaystyle \iint_\Omega e^{-(x^2+y^2)}dx\,dy, \quad \Omega=\{(x,y);x+y\ge 0,\ y\ge 0\}.$

解答 (結果のみ)　(1) 発散　(2) 収束　(3) 収束　(4) 発散　(5) 発散　(6) 収束

番外　$m \in \mathbf{R}$, $\sigma > 0$ を与えられた定数とするとき、

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (x \in \mathbf{R})$$

で $f \colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ を定義すれば、

$$\int_{\mathbf{R}} f(x)\,dx = 1, \quad \int_{\mathbf{R}} x f(x)\,dx = m, \quad \int_{\mathbf{R}} (x-m)^2 f(x)\,dx = \sigma^2$$

が成り立つことを示せ。