解析概論II演習問題　No.3

桂田 祐史

mk@math.meiji.ac.jp

2005年10月17日

1　変数変換

7. (変数変換のヤコビアン)　つぎの変換のヤコビアンを求めよ。また与えられた xy 平面上の図形 Ω に対して、領域 D をどう取れば[1] D の像が Ω になるか。(a, b は正定数とする。)

(1) $x = u + v$, $y = u - v$; $\Omega = (0, 1)$, $(-1, 0)$, $(0, -1)$, $(1, 0)$ を頂点とする四辺形の内部。

(2) $x = a + r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$; $\Omega = \{(x, y); (x-a)^2 + y^2 < a^2, y > 0\}$.

(3) $x = ar\cos\theta$, $y = br\sin\theta$; $\Omega = \left\{(x, y); \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} < 1, x > 0, y > 0\right\}$.

8. (重積分)　次の二重積分の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\iint_\Omega \frac{x-y}{(x+y)^3}\,dxdy, \quad \Omega = \{(x, y); 1 < x < 3, 1 < y < 3\}$.

(2) $\displaystyle\iint_\Omega \frac{x-2y}{(2x+y)^3}\,dxdy$,　Ω は $(0, 2)$, $(1, 0)$, $(3, 1)$, $(2, 3)$ を頂点とする四辺形。

(3) $\displaystyle\iint_\Omega y(x+y)\,dxdy, \quad \Omega = \{(x, y); x^2 + y^2 < a^2\}$.

(4) $\displaystyle\iint_\Omega x\,dxdy, \quad \Omega = \{(x, y); x^2 + y^2 < a^2, x > 0, y > 0\}$.

(5) $\displaystyle\iint_\Omega xy^2\,dxdy, \quad \Omega = \{(x, y); x^2 + y^2 < 1, x > 0, y > 0\}$.

(6) $\displaystyle\iint_\Omega e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy, \quad \Omega = \{(x, y); x^2 + y^2 < a^2\}$.

(7) $\displaystyle\iint_\Omega y\,dxdy, \quad \Omega = \{(x, y); \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1, x > 0, y > 0\}$.

(8) $\displaystyle\iint_\Omega (x^2 + y^2)\,dxdy, \quad \Omega = \{(x, y); \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1\}$.

[1]答は一通りとは限らない。とにかく一つ選べ。

答 (結果のみ) (1) 0 (2) $-\dfrac{3^3\cdot 5}{2^4\cdot 7^2}=-\dfrac{135}{784}$ (3) $\dfrac{\pi}{4}a^4$ (4) $\dfrac{a^3}{3}$ (5) $\dfrac{1}{15}$ (6) $\pi(1-e^{-a^2})$
(7) $\dfrac{ab^2}{3}$ (8) $\dfrac{\pi}{4}ab(a^2+b^2)$

9. (重積分) つぎの三重積分の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\iiint_\Omega x\,dxdydz$, $\Omega=\{(x,y,z);x^2+y^2+z^2<1,x>0,y>0,z>0\}$.

(2) $\displaystyle\iiint_\Omega (1-x^2-y^2-z^2)\,dxdydz$, $\Omega=\{(x,y,z);x^2+y^2+z^2<1\}$.

(3) $\displaystyle\iiint_\Omega \frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}}\,dxdydz$, $\Omega=\{(x,y,z);x^2+y^2+z^2<1,x>0,y>0,z>0\}$.

(4) $\displaystyle\iiint_\Omega dxdydz$, Ω は平面 $y=0$, $x\sin\beta-y\cos\beta=0$ $(y>0)$ および球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ で囲まれる櫛形の領域。

解答 (結果のみ) (1) $\dfrac{\pi}{16}$ (2) $\dfrac{8}{15}\pi$ (3) $\dfrac{\pi}{6}$ (4) $\dfrac{2}{3}\beta a^3$

10. (体積)

(1) 柱面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ および $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ によって切りとられる第 1 象限 ($x>0$, $y>0$, $z>0$ の範囲のこととする) の体積を求めよ。

(2) 柱面 $x^2+y^2=4$ と二平面 $z=y+1$, $z=0$ とで囲まれる立体の体積を求めよ。

(3) 曲面 $z=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$ および $z=k-\dfrac{x^2}{b^2}-\dfrac{y^2}{a^2}$ で囲まれる立体の体積を求めよ。ただし, $k>0$.

(4) 曲面 $kz=x^2+y^2$ と平面 $x+z=1$ とで囲まれる立体の体積を求めよ。ただし, $k>0$.

(5) 2 つの曲面 $kz=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$, $x^2+y^2=c^2$, および平面 $z=0$ によって囲まれる立体の体積を求めよ。ただし, a, b, c, $k>0$.

(6) 曲面 $z=xye^{-(x^2+y^2)}$ $(x>0,\ y>0)$, 柱面 $x^2+y^2=1$ および $z=0$ で囲まれる立体の体積を求めよ。

解答 (結果のみ) (1) $\dfrac{2}{3}abc$ (2) $6\sqrt{3}+\dfrac{4}{3}\pi$ (3) $\dfrac{\pi}{2}k^2\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}$ (4) $\dfrac{\pi}{2}k\left(1+\dfrac{k}{4}\right)^2$ (5) $\dfrac{\pi c^4}{4k}\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\right)$
(6) $\dfrac{1}{4}\left(1-\dfrac{2}{e}\right)$