解析概論II演習問題 No.2

桂田 祐史

2005年10月4日

1　問題

5.　次の二重積分を計算せよ。

(1) $\displaystyle\iint_D (2+x-y)\,dxdy$, D は 3 直線 $y=2-x$, $y=0$, $x=0$ で囲まれる三角形。

(2) $\displaystyle\iint_D y^2\sqrt{y-x}\,dxdy$, D は 3 直線 $y=x$, $y=1$, $x=0$ で囲まれる三角形。

(3) $\displaystyle\iint_D x^3\,dxdy$, $D=\{(x,y); x^2+y^2<a^2\}$. ただし a は正定数。

(4) $\displaystyle\iint_D e^{x+y}\,dxdy$, D は 3 曲線 $y=0$, $y=\log x$, $x=2$ で囲まれる領域。

(5) $\displaystyle\iint_D xy^2\,dxdy$, D は 2 曲線 $x=y^2$, $y=x^2$ で囲まれる領域。

(6) $\displaystyle\iint_D \sqrt{ax-y^2}\,dxdy$, $D=\{(x,y); y^2<ax, x<b, y>0\}$. ただし a, b は正定数。

(7) $\displaystyle\iint_D \sqrt{xy}\,dxdy$, $D=\{(x,y); x>0, y>0, \sqrt{x}+\sqrt{y}<1\}$.

(8) $\displaystyle\iint_D (x+y)\,dxdy$, D は 3 直線 $y=2x$, $y=\dfrac{x}{2}$, $x+y=2$ で囲まれる三角形。

(9) $\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)\,dxdy$, D は 3 曲線 $y=0$, $x=2a$, $2ay=x^2$ で囲まれる領域。 ただし a は正定数。

答 (結果のみ)　(1) 4　(2) $\dfrac{4}{27}$　(3) 0　(4) e　(5) $\dfrac{3}{56}$　(6) $\dfrac{\pi}{8}ab^2$　(7) $\dfrac{1}{45}$　(8) $\dfrac{8}{9}$　(9) $\dfrac{416}{105}a^4$

6.

(1) 柱面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ および $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ によって切りとられる第 1 象限 ($x>0, y>0, z>0$ の範囲のこととする) の体積を求めよ。

(2) 柱面 $x^2+y^2=4$ と二平面 $z=y+1$, $z=0$ とで囲まれる立体の体積を求めよ。

(3) 曲面 $z=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$ および $z=k-\dfrac{x^2}{b^2}-\dfrac{y^2}{a^2}$ で囲まれる立体の体積を求めよ。ただし, $k>0$.

(4) 曲面 $kz=x^2+y^2$ と平面 $x+z=1$ とで囲まれる立体の体積を求めよ。ただし, $k>0$.

答 (結果のみ) (1) $\dfrac{2}{3}abc$ (2) $6\sqrt{3}+\dfrac{4}{3}\pi$ (3) $\dfrac{\pi}{2}k^2\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}$ (4) $\dfrac{\pi}{2}k\left(1+\dfrac{k}{4}\right)^2$

2 問 2 の解答

問 2 はすぐに 1 変数の積分の問題に直るので、各自計算練習して答合せして下さい。

ちょっと便利な公式

$$(\bigstar)\qquad \iint_{(a,b)\times(c,d)} F(x)G(y)\,dx\,dy = \left(\int_a^b F(x)\,dx\right)\left(\int_c^d G(y)\,dy\right).$$

$\sqrt{x^2+k}$, $1/\sqrt{x^2+k}$ の積分 (基礎数学 III の復習)

k を実定数とするとき、部分積分により容易に

$$\int \sqrt{x^2+k}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+k}+k\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+k}}\right).$$

この右辺の第 2 項に関しては

$$(\sharp)\qquad \int\frac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = \log\left|x+\sqrt{x^2+k}\right| = \begin{cases} \sinh^{-1}\left(\dfrac{x}{\sqrt{k}}\right) & (k>0 \text{ のとき}) \\ \cosh^{-1}\left(\dfrac{x}{\sqrt{k}}\right) & (k<0 \text{ のとき}). \end{cases}$$

(1) 与式 $=\displaystyle\int_0^1 x\,dx\int_0^{\pi/2}\cos y\,dy=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}.$

(2) 与式 $=\displaystyle\int_0^1 xe^x\,dx\int_0^2 ye^y\,dy\int_0^3 e^z\,dz$ で、$\displaystyle\int_0^1 xe^x\,dx=\int_0^1 x\cdot(e^x)'\,dx=[xe^x]_0^1-\int_0^1(x)'\cdot e^x\,dx=(1\cdot e^1-0)-\int_0^1 e^x\,dx=e-(e-1)=1.$ 同様に $\displaystyle\int_0^2 ye^y\,dy=e^2+1.$ また $\int_0^3 e^z\,dz=e^3-1.$ ゆえに 与式 $=1\cdot(e^2+1)(e^3-1)=e^5+e^3-e^2-1.$

(3) 与式 $=\displaystyle\int_{-1}^1 x^3\,dx\int_0^2\frac{dy}{1+y^2}=0\cdot\tan^{-1}2=0.$ 公式 $\displaystyle\int\frac{dx}{1+x^2}=\tan^{-1}x$ は忘れずに (この問題を解くだけならば結果の 0 を得るのに必要ないけれど)。

(4) 積分の線形性から 与式 $= \iint_{(0,a)\times(0,b)} x^2\,dxdy + \iint_{(0,a)\times(0,b)} y^3\,dxdy = \int_0^a x^2\,dx \int_0^b dy + \int_0^a dx \int_0^b y^3\,dy = \frac{a^3}{3}b + a\frac{b^3}{4}.$

(5) 与式 $= \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{\pi} \sin(y+x)\,dy \right) dx = \int_0^{\pi/2} \left[-\cos(y+x)\right]_{y=0}^{y=\pi} dx = \int_0^{\pi/2} (-\cos(\pi+x)+\cos x)\,dx = 2\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx = 2\left[\sin x\right]_0^{\pi/2} = 2.$

(6) 与式 $= \int_0^a \left(\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{y+x^2}} \right) dx = \int_0^a \left[2(y+x^2)^{1/2}\right]_{y=0}^{y=1} dx = 2\int_0^a \left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2}\right) dx = 2\left(\int_0^a \sqrt{x^2+1}\,dx - \int_0^a x\,dx \right) = (中略) = a\sqrt{a^2+1} + \log\left(a+\sqrt{a^2+1}\right) - a^2.$ 右辺の第2項は $\sinh^{-1} a$ とも書ける。

(7) 与式 $= \int_0^{\pi} x\,dx \int_0^{\pi/2} \sin(x+y) dy = \int_0^{\pi} x\left[-(\cos(y+x)\right]_{y=0}^{y=\pi/2} dx = \int_0^{\pi} x\left(\cos x - \cos(x+\pi/2)\right) dx = \int_0^{\pi} x(\cos x+\sin x) dx = \int_0^{\pi} x(\sin x - \cos x)' dx = \left[x(\sin x - \cos x)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (\sin x - \cos x) dx = \pi(0-(-1)) - 2 = \pi - 2.$ 余談だけど $\int_0^{\pi} \sin x\,dx = 2,$ $\int_0^{\pi} \cos x\,dx = 0$ はすぐ分かるかな？(頭にグラフが浮かんで所要時間 3 秒という類いの計算)

(8) 与式 $= \int_0^{\pi/2} x^2\,dx \int_0^2 y\sin(xy^2)\,dy.$ y に関する積分を計算するため $xy^2 = u$ と置換すると $y\,dy = \frac{du}{2x}$ となるので、$\int_0^2 y\sin(xy^2) dy = \int_0^{4x} \sin u \frac{du}{2x} = \frac{1}{2x}\left[-\cos u\right]_0^{4x} = \frac{1-\cos 4x}{2x}.$ ゆえに

$$与式 = \int_0^{\pi/2} \frac{x}{2} dx - \int_0^{\pi/2} \frac{x\cos 4x}{2} dx = \left[\frac{x^2}{4}\right]_0^{\pi/2} - \left(\left[\frac{x\sin 4x}{8}\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 4x}{8} dx \right) = \frac{\pi^2}{16}.$$

ちなみに $\int_0^{\pi/2} \sin 4x\,dx = 0$ も頭にグラフを浮かべて即答できると良いですね。■

付録 2: Mathematica で検算

こういう時代ですから、なるべくコンピューターで検算するようにしています。情報処理教室で使える Mathematica で計算してみた結果を紹介します。

```
In[1]:= Integrate[x Cos[y],{x,0,1},{y,0,Pi/2}]


        1
Out[1]= -
        2
```

```
In[2]:= Integrate[x y Exp[x+y+z],{x,0,1},{y,0,2}, {z,0,3}]

                2    3    5
Out[2]= -1 - E  + E  + E

In[3]:= Integrate[x^3/(1+y^2),{x,-1,1},{y,0,2}]

Out[3]= 0

In[4]:= Integrate[x^2+y^3,{x,0,a},{y,0,b}]

         3        4
        a  b   a b
Out[4]= ---- + ----
         3      4

In[5]:= Integrate[Sin[x+y],{x,0,Pi/2},{y,0,Pi}]

Out[5]= 2

In[6]:= Integrate[1/Sqrt[y+x^2],{x,0,a},{y,0,1}]

                    2               2
Out[6]= a (-Sqrt[a ] + Sqrt[1 + a ]) + ArcSinh[a]

In[7]:= Integrate[x Sin[x+y],{x,0,Pi},{y,0,Pi/2}]

Out[7]= -2 + Pi

In[8]:= Integrate[x^2 y Sin[x y^2],{x,0,Pi/2},{y,0,2}]

          2
        Pi
Out[8]= ---
        16

In[9]:=
```