数学解析 宿題 No. 4 (2021 年 5 月 24 日出題, 29 日 (土)18:00 までに Oh-o! Meiji に PDF 形式で提出)

__年__ 組____番 氏名______________ (解答は何ページでも可. 1 つの PDF にして提出。)

問 4 (どちらかというと、前回の範囲の問題が主)

(1) I は $\mathbb{R}$ の区間, $f\colon I \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{I}$, $A \in \mathbb{R}$ とする。$x \to a$ のとき $f(x)$ が A に収束するとはどういうことか (定義の条件を書け)。

(2) $f(x) = -\dfrac{5}{2}x + 4$ $(x \in \mathbb{R})$ とするとき、f が $\mathbb{R}$ で連続であることを ε-δ 論法で証明せよ。

(3) (1) が成り立つとき、a の十分近くで、f が有界である、すなわち

$$(\exists \delta > 0)(\exists M \in \mathbb{R})(\forall x \in I : |x-a| < \delta) \quad |f(x)| \le M$$

が成り立つことを示せ。(ヒント: 収束する数列は有界、という定理の証明と良く似ている。)

(4) 多項式関数、多項式関数でない有理関数、有理関数でない関数の例をそれぞれあげよ (ただし授業中にあげた例とは異なるものを書くこと)。

問 4 解説

(1)

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in I\colon |x-a| < \delta) \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

(別解) $(\forall \varepsilon > 0)$ $(\exists \delta > 0)$ $(\forall x \in I)$ $(|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon)$.

(講評) うっかり $|f(x) - A|$ を $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ と書いた人がちらほら。連続性と近いので間違えないように気をつけて下さい。

(2) (示すべきことを論理式で書くと、$(\forall a \in \mathbb{R})$ $(\forall \varepsilon > 0)$ $(\exists \delta > 0)$ $(\forall x \in \mathbb{R}\colon |x-a| < \delta)$ $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.)

a を任意の実数とする。任意の正の数 ε に対して、$\delta := \frac{2\varepsilon}{5}$ とおくと、$\delta > 0$. さらに、$|x-a| < \delta$ を満たす任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$|f(x) - f(a)| = \left|\left(-\frac{5}{2}x + 4\right) - \left(-\frac{5}{2}a + 4\right)\right| = \left|-\frac{5}{2}(x-a)\right| = \frac{5}{2}|x-a| < \frac{5}{2} \cdot \delta = \frac{5}{2} \cdot \frac{2}{5}\varepsilon = \varepsilon.$$

ゆえに $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. (したがって f は a で連続である。) ゆえに f は $\mathbb{R}$ で連続である。

(講評) 示すことを論理式で書くことを問題文で求めていないけれど、そうすると良いと思う。どういうことを書くべきか、明確になる。

(非常に重要) δ について言及するより先に「任意の正の数 a に対して、」とか「ε を任意の正数とする。」と書けない人が少なくない。いきなり「$\delta = \frac{2}{5}\varepsilon$」で始めたりするのは非常にまずい。試験でそういうことをしたら、中間点なしの一発アウトと考えて下さい。(これは授業でも口やかましく言っているのだけれど、いざやってもらうと、大勢ができない。今はそういうものだと半分くらいあきらめています。)

「$\delta < \frac{2}{5}\varepsilon$ を満たす正数 δ を取る」と書くのはまあまあだけれど、条件を満たす δ の存在を示すことが求められているので、たとえば「$\delta := \frac{1}{5}\varepsilon$ とすると」とすることを勧める。

(3) $\lim_{x\to a} f(x) = A$ という仮定から、ある正の数 δ が存在して

$$(\forall x \in I\colon |x-a| < \delta) \quad |f(x) - A| < 1.$$

(収束の定義の条件を $\varepsilon = 1$ として用いた。)

$M := 1 + |A|$ とおくと、$M \in \mathbb{R}$ であり、$|x-a| < \delta$ を満たす任意の $x \in I$ に対して

$$|f(x)| = |f(x) - A + A| \le |f(x) - A| + |A| < 1 + |A| = M.$$

ゆえに

$$|f(x)| < M.$$

(講評) 「任意の ε」を M に残した人がいた。$M = \varepsilon + |f(a)|$ とか。M の存在を示さねばならないので、それはダメ。ε は、上の模範解のように 1 である必要はなくて、2 でも 100 でも良い。とにかく自分で決めてしまうことが大事です。

これで解けなくなるわけではないけれど、$|f(x) - A| < 1$ の絶対値を外して、$A - 1 < f(x) < A + 1$ と変形してから困ってしまった人がちらほらいた。確かにかえって難しくなったのかも。

収束する数列が有界であることの証明でも、$|a_n| = |a_n - a + a| \le |a_n - a| + |a| = 1 + |a|$ という変形をしてあって、それと同じことです。そのヒントを有効に使った人は少なかった (ちょっと残念です)。

ちなみに、$\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ の証明でもっと難しいことをやってあります。

(4) 多項式関数

$$2x^2 + 2x + 1, \quad 3x^2 + 2x + 1,$$

多項式関数でない有理関数

$$\frac{2x+1}{x+1}, \quad \frac{x^2+2x}{x+1}, \quad \frac{x^2+2x+1}{5x}$$

有理関数でない関数

$$\cos x, \quad \tan x, \quad e^x \sin x$$