数学解析 宿題 No. 3　(2021 年 5 月 10 日出題, 15 日 (土)18:00 までに Oh-o! Meiji に PDF 形式で提出)

__年__ 組____番　氏名______________　(解答は裏面も使用可. 表裏を 1 つの PDF にして提出。)

問 3　(2021 年 5 月 10 日出題, 裏面利用可能)

(1) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を実数列, $a \in \mathbb{R}$ とするとき、次の条件 (a), (b), (c) を論理式で表せ。

(a) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は a に収束する。　(b) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は a に収束しない。(否定記号 $\neg$ を用いずに表すこと。)

(c) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は有界な数列である。

(2) 実数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が、$n \to \infty$ のとき、それぞれ $a, b \in \mathbb{R}$ に収束するならば、$\left\{\sqrt{5}\, a_n - \sqrt{10}\, b_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ は $\sqrt{5}\, a - \sqrt{10}\, b$ に収束することを (数列の収束の定義に基づいて) 証明せよ。
(第 3 回に命題 3.9 を紹介して、和, 積の場合をそれぞれ第 3, 4 回に証明したのを参考にすると良い。)

(3) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は実数列、$L \in \mathbb{R}$ とする。$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ と $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が L に収束し、かつ

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad a_n \le b_n \le c_n$$

が成り立つならば、$\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ も L に収束することを証明せよ。

問 3 解答と解説

(1) (a) $(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists N \in \mathbb{N})\ (\forall n \in \mathbb{N}\colon n \geq N)\ |a_n - a| < \varepsilon.$

(別解) $(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists N \in \mathbb{N})\ (\forall n \in \mathbb{N})\ (n \geq N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon).$

(b) $(\exists \varepsilon > 0)\ (\forall N \in \mathbb{N})\ (\exists n \in \mathbb{N}\colon n \geq N)\ |a_n - a| \geq \varepsilon.$

(別解) $(\exists \varepsilon > 0)\ (\forall N \in \mathbb{N})\ (\exists n \in \mathbb{N})\ (n \geq N \wedge |a_n - a| \geq \varepsilon).$

(c) $(\exists M \in \mathbb{R})\ (\forall n \in \mathbb{N})\ |a_n| \leq M.$

(2) ε を任意の正の数とする。(次はさすがに明らかだから書かなくても良いけれど、$\frac{\varepsilon}{2\sqrt{5}} > 0$, $\frac{\varepsilon}{2\sqrt{10}}$ である。) $\{a_n\}$ が a に収束することから、ある自然数 N_1 が存在して

(a)
$$(\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N_1) \quad |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{5}}.$$

同様にして、ある自然数 N_2 が存在して

(b)
$$(\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N_2) \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{10}}$$

が成り立つ。$N := \max\{N_1, N_2\}$ とおくと、N は自然数であり、$n \geq N$ を満たす任意の自然数 n に対して、$n \geq N_1$, $n \geq N_2$ が成り立つので

$$\begin{aligned}
\left|(\sqrt{5}a_n - \sqrt{10}b_n) - (\sqrt{5}a - \sqrt{10}b)\right| &= \left|\sqrt{5}(a_n - a) - \sqrt{10}(b_n - b)\right| \\
&\leq \left|\sqrt{5}(a_n - a)\right| + \left|-\sqrt{10}(b_n - b)\right| \\
&= \left|\sqrt{5}\right| |a_n - a| + \left|-\sqrt{10}\right| |b_n - b| \\
&= \sqrt{5}\, |a_n - a| + \sqrt{10}\, |b_n - b| \\
&< \sqrt{5} \cdot \frac{\varepsilon}{2\sqrt{5}} + \sqrt{10} \cdot \frac{\varepsilon}{2\sqrt{10}} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

ゆえに

$$\left|(\sqrt{5f}a_n - \sqrt{10}b_n) - (\sqrt{5}a - \sqrt{10}b)\right| < \varepsilon.$$

ゆえに $\{\sqrt{5}a_n - \sqrt{10}b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が $\sqrt{5}a - \sqrt{10}b$ に収束する。 ■

(**講評**)

(A) ε の紹介を忘れる人が (今年は) 少なかった。しかし次のように書くパターンが少しあった。

> $(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists N_1 \in \mathbb{N})\ (\forall n \in \mathbb{N}\colon n \geq N_1)\ |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{5}}$
> $(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists N_2 \in \mathbb{N})\ (\forall n \in \mathbb{N}\colon n \geq N_2)\ |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{10}}$

共通の ε に対しての N_1, N_2 を使って議論をしなくてはいけないのに、$\forall \varepsilon > 0$ を複数回書いたら話がぶち壊しになってしまう (そもそも日本語に直したとすると、どう読んで欲しいのだろう？)。ε は証明の文章中に最初に登場するときは、任意の正の数であるけれど、一度登場した後は、固定されたものであること (「ターゲット・ロック・オン」というか) を理解して欲しい。

(B) まちがった不等式変形をしている人が結構いた。

$$\left|(\sqrt{5}a_n - \sqrt{10}b_n) - (\sqrt{5}a - \sqrt{10}b)\right| \leq \left|\sqrt{5}a_n - \sqrt{10}b_n\right| - \left|\sqrt{5}a - \sqrt{10}b\right| \quad \text{(これは間違い)}.$$

有名な $|a+b| \leq |a| + |b|$ はもちろん正しいが、$|a-b| \leq |a| - |b|$ は一般には成り立たない。模範解のように $|a+b| \leq |a| + |b|$ を使うか、あるいは (頭の中で $|a-b| \leq |a| + |-b| = |a| + |b|$ としてスキップして) $|a-b| \leq |a| + |b|$ を使うか、どちらかが必要である。

(**脱線**) 有名なのは $|a+b| \leq |a|+|b|$, $|a-b| \geq |a|-|b|$ だけれど、$|a-b| \leq |a|+|b|$, $|a+b| \geq |a|-|b|$ も成り立つ。

(3) ε を任意の正の数とする。$\{a_n\}$ と $\{c_n\}$ は L に収束するので、ある自然数 N_1, N_2 が存在して

$$(\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N_1) \quad |a_n - L| < \varepsilon,$$

$$(\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N_2) \quad |c_n - L| < \varepsilon.$$

$N := \max\{N_1, N_2\}$ とおくと、N は自然数である。$n \geq N$ を満たす任意の自然数 n に対して、$n \geq N_1$, $n \geq N_2$ が成り立つので、

$$|a_n - L| < \varepsilon \quad \text{かつ} \quad |c_n - L| < \varepsilon.$$

すなわち

$$-\varepsilon < a_n - L < \varepsilon \quad \text{かつ} \quad -\varepsilon < c_n - L < \varepsilon.$$

ゆえに

$$L - \varepsilon < a_n \quad \text{かつ} \quad c_n < L + \varepsilon.$$

仮定 $a_n \leq b_n \leq c_n$ を用いると

$$L - \varepsilon < b_n < L + \varepsilon.$$

これから $|b_n - L| < \varepsilon$. ゆえに $\{b_n\}$ は L に収束する。■

(**余談 1**) これは減点する気はない細かいことだけれど、

> が成り立つので
>
> $$\begin{aligned} & |a_n - L| < \varepsilon \quad \text{かつ} \quad |c_n - L| < \varepsilon \\ & \Leftrightarrow -\varepsilon < a_n - L < \varepsilon \quad \text{かつ} \quad -\varepsilon < c_n - L < \varepsilon \\ & \Rightarrow L - \varepsilon < a_n \quad \text{かつ} \quad c_n < L + \varepsilon. \end{aligned}$$

のように書いた人が多かった。このように $\Leftrightarrow$, $\Rightarrow$ を使うのは、昔から黒板での記述スタイルとして、授業の中で何度か見かけた覚えがある (本の中で見たことはない)。しかし、文章にしようとして、どのように式を読むか考えると悩ましい。

元々は「成り立つので」というのは、その前に書いたことを使って、「$|a_n - L| < \varepsilon$ かつ $|c_n - L| < \varepsilon$」が成り立つことを主張したいわけである。きちんとした文章にする場合、そこで文が終わっている。その主張「$|a_n - L| < \varepsilon$ かつ $|c_n - L| < \varepsilon$」の言い換えとして、「$-\varepsilon < a_n - L < \varepsilon$ かつ $-\varepsilon < c_n - L < \varepsilon$」があり、それからの帰結として「$L - \varepsilon < a_n$ かつ $c_n < L + \varepsilon$」がある。普通、改行に大きな意味はないので、上のように書くと

> が成り立つので
>
> $|a_n - L| < \varepsilon$ かつ $|c_n - L| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < a_n - L < \varepsilon$ かつ $-\varepsilon < c_n - L < \varepsilon \Rightarrow L - \varepsilon < a_n$ かつ $c_n < L + \varepsilon$.

となり、「成り立つので」言えることが

$$|a_n - L| < \varepsilon \text{ かつ } |c_n - L| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < a_n - L < \varepsilon \quad \text{かつ} \quad -\varepsilon < c_n - L < \varepsilon \Rightarrow L - \varepsilon < a_n \text{ かつ } c_n < L + \varepsilon.$$

のようにも解釈可能である。これは書く人の意図するところとはずれているだろう。文章を書くときは、$\Leftrightarrow$ や $\Rightarrow$ でなく、「すなわち」、「ゆえに」、「したがって」などを使うことを勧めます。

(**余談 2**) これも減点する気はない細かいことだけれど、「といえる」と書く人がいる。私も学生時代に使ったことがある。しかし、普通の数学的議論をしているときは、事実を積み上げていくものなので、違和感を感じるようになって使わなくなった (普通に断定します)。「いえる」の主語は誰だろう？

「$1+1=2$」というのは英語であれば “one plus one equals two” または “one plus one is equal to two” であるから、ピリオドをつければ、完結した文である。日本語の場合は「$1+1=2$ である」というのは、「いちたすいちはにである」と自然に読めるのでおかしくない。しかし「$1+1=2$ といえる」というのは、何か気持ちが悪いと私は感じるけれど、どうですか。「といえる」というのは、事実と断定できないような場合に使う言葉であると言う人もいる。言うだけならば、冗談でも、まちがったことでも言ったりするし。確かに「私は神である」は冗談とか間違いとかだろうけれど、「私は神であるといえる」は間違いとは言えないですよね (お芝居のセリフなら「私は神である」はありそうで、役者は言えないと困るでしょう)。— 要するに「である」と「であるといえる」はかなり違っていて、数学の証明中に使うのは、前者がより適当である、と言いたいわけです。