数学解析 宿題 No. 2　(2021 年 4 月 19 日出題, 24 日 18:00 までに Oh-o! Meiji に PDF 形式で提出)

__年__ 組____番　氏名____________　(解答は裏面も使用可, A4 レポート用紙に書いても可)

問 2

(1) $B \subset \mathbb{R}$ であり、また $J, K \in \mathbb{R}$ とする。

(a) J が B の上限であるための条件を記せ。　(b) K が B の下限であるための条件を記せ。

(2) $A = (4, 19] = \{x \in \mathbb{R} \mid 4 < x \leq 19\}$ とするとき、以下の問に答えよ。

(a) A の上限を求め、上限である根拠を述べよ。(b) A の下限を求め、下限である根拠を述べよ。

(3) $B \subset \mathbb{R}$, $B \neq \emptyset$, B は下に有界とする。$A := \{x \in \mathbb{R} \mid -x \in B\}$ とおく。このとき以下の問に答えよ。

(a) A が上に有界であることを示せ。　(b) $A \neq \emptyset$ であることを示せ。

(c) A の上限を S とすると、$-S$ は B の下限であることを示せ。

問 2 解説

(1) (a) 次の (i), (ii) を満たすこと。(i) $(\forall x \in B)\ x \le J$. (ii) $(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists x \in B)\ J - \varepsilon < x$.
(b) 次の (I), (II) を満たすこと。(I) $(\forall x \in B)\ x \ge K$. (II) $(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists x \in B)\ K + \varepsilon > x$.

(2) (a) 19 が A の上限である。
証明 A は 19 を最大値に持つ。($\because$ $M = 19$ とおく。(ア) A の任意の要素 x は $4 < x \le 19$ を満たすので、$x \le M$. (イ) $4 < M \le 19$ であるから $M \in A$. 以上 (ア), (イ) から、M は A の最大値である。) 一般に「最大値は上限である」から、19 は A の上限である。 ■
別証明 $J = 19$ とおく。(i) A の任意の要素 x は $4 < x \le 19$ を満たすので、$x \le J$.
(ii) 任意の正の数 ε に対して、$x := 19$ とおくと、$4 < x \le 19$ であるから $x \in A$. または $J - \varepsilon < x$.
以上 (i) と (ii) から、J は A の上限である。 ■

(b) 4 が A の下限である。
証明 $I = 4$ とおく。(I) A の任意の要素 x は $4 < x \le 19$ を満たすので、$x \ge I$. (II) 任意の正の数 ε に対して、$x := \min\{4 + \varepsilon/2, 19\}$ とおくと、$4 < x \le 19$ であるから、$x \in A$. また $I + \varepsilon > x$. 以上 (I) と (II) から、I は A の下限である。 ■

(**注**) 宿題答案によくあった間違いは、(2) (a) で $x = \max\{4, J - \varepsilon/2\}$ とするもの。ε が大きいとき $x = 4$ となり、$x \in A$ を満たさない。$x = \max\{5, J - \varepsilon/2\}$ とすれば大丈夫だが、よく考えてみると ε が何であっても、$x = J$ で条件が満たされる (「最大値は上限」という定理の証明のエッセンスである)。

(3) (a) B が下に有界であるから、ある実数 L が存在して

$$(\forall b \in B) \quad b \ge L.$$

任意の $a \in A$ に対して、$-a \in B$ であるから $-a \ge L$. ゆえに $a \le -L$. ゆえに $-L$ は A の上界であり、A は上に有界である。

(b) $B \ne \emptyset$ であるから、ある $b \in B$ が存在する。$a := -b$ とおくと、$-a = -(-b) = b \in B$ であるから、$a \in A$. ゆえに $A \ne \emptyset$.

(c) (a) により A は上に有界で、(b) により $A \ne \emptyset$ であるから、Weierstrass の上限公理によって、A の上限が存在する。それを S と書くと、次の (i) と (ii) が成り立つ。

(i) $(\forall a \in A)\ a \le S$.
(ii) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists a \in A)\ S - \varepsilon < a$.

これから

(I) 任意の $b \in B$ に対して、$a := -b$ とおくと、 $-a = -(-b) = b \in B$ であるから、$a \in A$. A の上限は S であるから、$a \le S$. すなわち $-b \le S$. ゆえに $b \ge -S$.
(II) 任意の正の数 ε に対して、ある $a \in A$ が存在して $S - \varepsilon < a$. ゆえに $-S + \varepsilon > -a$. $b := -a$ とおくと、$a \in A$ と A の定義から、$b = -a \in B$. また $-S + \varepsilon > b$. ゆえに $-S$ は B の下限である。 ■

(**注**) 宿題答案で多かったのは、(a, b のような) 二つのものを用意せず、1 つ (x とか) で書こうとして、$(\forall(-x) \in A) \cdots$ のような無理な式を書いたケース (x に依存しているように見える $-x$ が任意とはどういうことだろう。そもそも x が任意ということ？意味がはっきりしない。)。$\forall$ や $\exists$ の後には、名前 (普通は文字 1 つ x とか、x' や x_0 とか) が続く。$-x$ のような名前でない式は続かない。他にも「x を $-x$ で置き換えると」のような無理なことを書いた人が多い。授業中に見せた模範解答では、x と y という文字を使いましたが、分かりやすいように a, b という文字を用いるように書き直しました。