数学解析 練習 No. 1　(2021 年 4 月 12 日, 提出の必要はない。裏面に答えがある。)

__年__ 組____番　氏名_____________

問 1A　$\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ の右側を埋めよ。

(1) $A \subset \mathbb{R}$, $U \in \mathbb{R}$ とする。U が A の上界 $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$

(2) $A \subset \mathbb{R}$ とする。A が上に有界 $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$

(3) $A \subset \mathbb{R}$, $S \in \mathbb{R}$ とする。S が A の上限 $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \text{(i)} \\ \text{(ii)} \end{cases}$

(4) $A \subset \mathbb{R}$, $M \in \mathbb{R}$ とする。M が A の最大値 $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \text{(i)} \\ \text{(ii)} \end{cases}$

問 1B　Weierstrass の上限公理を書け。

問 1C　$\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ の右側を埋めよ。

(1) $A \subset \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}$ とする。L が A の下界 $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$

(2) $A \subset \mathbb{R}$ とする。A が下に有界 $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$

(3) $A \subset \mathbb{R}$, $I \in \mathbb{R}$ とする。I が A の下限 $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \text{(i)} \\ \text{(ii)} \end{cases}$

(4) $A \subset \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{R}$ とする。m が A の最小値 $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \text{(i)} \\ \text{(ii)} \end{cases}$

問 1D　(Weierstrass の上限公理を認めて)「$A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ とする。A は下に有界ならば、A の下限が存在する。」を証明せよ。

以下の解答例で、(i), (ii) の順番は問わない。

問 1A $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ の右側を埋めよ。

(1) $A \subset \mathbb{R}, U \in \mathbb{R}$ とする。U が A の上界 $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} (\forall x \in A)\ x \leq U$

(2) $A \subset \mathbb{R}$ とする。A が上に有界 $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} (\exists U \in \mathbb{R})(\forall x \in A)\ x \leq U$
(「A の上界が存在する」でも良い。)

(3) $A \subset \mathbb{R}, S \in \mathbb{R}$ とする。S が A の上限 $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \text{(i)} & (\forall x \in A)\ x \leq S \\ \text{(ii)} & (\forall \varepsilon > 0)\ (\exists x \in A)\ S - \varepsilon < x \end{cases}$

((ii) は「S を少しでも小さくすると、A の上界ではなくなる」)

(4) $A \subset \mathbb{R}, M \in \mathbb{R}$ とする。M が A の最大値 $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \text{(i)} & (\forall x \in A)\ x \leq M \\ \text{(ii)} & M \in A \end{cases}$

問 1B $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$ とする。A が上に有界ならば、A の上限が存在する。

問 1C $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ の右側を埋めよ。

(1) $A \subset \mathbb{R}, L \in \mathbb{R}$ とする。L が A の下界 $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} (\forall x \in A)\ x \geq L$

(2) $A \subset \mathbb{R}$ とする。A が下に有界 $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} (\exists L \in \mathbb{R})\ (\forall x \in A)\ x \geq L$
(「A の下界が存在する」でも良い)

(3) $A \subset \mathbb{R}, I \in \mathbb{R}$ とする。I が A の下限 $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \text{(i)} & (\forall x \in A)\ x \geq I \\ \text{(ii)} & (\forall \varepsilon > 0)\ (\exists x \in A)\ I + \varepsilon > x \end{cases}$

((ii) は「I を少しでも大きくすると、A の下界ではなくなる」)

(4) $A \subset \mathbb{R}, m \in \mathbb{R}$ とする。m が A の最小値 $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \text{(i)} & (\forall x \in A)\ x \geq m \\ \text{(ii)} & m \in A \end{cases}$

問 1D 略 (講義ノートには書いてあります。)