2021 年度数学解析期末レポート課題

2021 年 7 月 29 日 (木) 12:00 公開, 担当 桂田 祐史
katurada あっと meiji ドット ac どっと jp

問題は 2 ページ目以降にある。このページを読み飛ばさずにきちんと読むこと。

- 問題の内容について、提出〆切の時間までは、自分以外の人に質問・相談しないこと。問題文の意味が分からない場合に、私 (桂田) に質問するのを遠慮する必要はない。
- この課題 PDF はなるべく早く保存し、もし可能ならば印刷することを勧める。
- 〆切は 8 月 1 日 (日) 12:00、Oh-o! Meiji で提出する。〆切後の提出は認めない。
- なるべく 7 月 31 日までに提出すること (それ以降 8 月 1 日 12:00 まではトラブルに対処するための時間と考えている)。8 月 1 日にずれ込む場合は、7 月 31 日までに一度提出し、8 月 1 日に追加提出する。事情があって 7 月 31 日までに提出できない場合は、その日のうちにメールで連絡して指示をあおぐこと。
- 解答は A4 サイズの PDF で提出する。ファイル名に「数学解析期末レポート」という文字列を含めること (間違いを避けるため)。サイズが 30MB を超える場合は、(30MB 未満になるように) 複数のファイルに分割して追加提出すること。複数ファイルを提出する場合、ファイル名に part1, part2 のような文字列をつけること。提出内容に間違いのないように自分で確認すること (〆切後の訂正は理由を問わず認めない)。
- 数式が正しく表記される限り、PDF の作成方法は問わない (手書きしたものをスキャン、TeX またはワープロソフトを使う、何でも可)。TeX やワープロソフトで数式を正しく入力する方法が分からない場合は、無理をせず手書きしたものをスキャンすること。スキャンする仕方が分からない場合は、写真データの PDF 化でも構わない (読みにくい場合、後から追加提出してもらう可能性がある)。
- 最初のページの一番上に学年・組・番号 (学生番号ではない 1〜2 桁の数) ・氏名を記入すること。ページ抜け (落丁) を防ぐため、ページ番号をつけ、最初のページに全部で何ページか記すこと。複数ファイルを提出する場合、ページ番号は通し番号とする (part 1 が全 10 ページだったら、 part 2 は 11 ページからページ番号をつける)。
- 解答の順番は自由。ただし小問をバラバラの位置に解答するのは避ける。例えば 問 1 の場合、(1),(2) の解答を 1 箇所にまとめて書くこと。
- 講義資料、参考書、ネットの情報など、何を参考にしても構わない。計算結果の確認にコンピューターを使っても良い。たまたま同じ問題の解答が見つかり、それが理解出来た場合はそれを書いても構わないが、出典を書くこと。無断で写すと著作権侵害になるし、自分で書き直した場合それが正しいかどうかは自己責任である (もちろん本に書いてあった場合も、それが正しいとは限らず、判断するのは自分の責任である)。
- 記号等は授業で説明したものであれば、断りなく用いて構わない。授業で説明していない記号を用いる場合は、その定義を記すこと。
- 質問・相談があれば、なるべく早くメールで連絡すること。13:00 までに届いたものは、14:00 までに回答する。20:00 までに届いたものは、22:00 までに回答する。7 月 31 日の 21:00〜24:00 は出来る限り早く回答する。主な質問とそれに対する回答は授業 WWW サイト http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/kaiseki/ で公開する。

次のうちから 5 問選択して解答せよ。ただし問 6 は必修問題である (必ず解答すること)。

問 1.

(1) 自分の学生番号 (10 桁) を下の位から見ていって、最初に見つかる 0 以外の数を ℓ, 次に見つかる 0 以外の数を m とする。

> 自分の学生番号が 2610190098 ならば $\ell = 8$, $m = 9$. 2610190031 ならば $\ell = 1$, $m = 3$. 2610190001 ならば $\ell = 1$, $m = 9$.

$a := \min\{\ell, m\}$, $b := \ell + m$, $I := [a, a+b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < a+b\}$ とおく。

(a) I の上限を求めよ。　(b) I の下限を求めよ。

(2) 0 が $A = \left\{ -\frac{1}{\sqrt{n}} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$ の上限であることを示せ。

問 2. $a > 1$ に対して

$$x_1 = a, \quad x_{n+1} = \frac{1}{3}\left(2x_n + \frac{a}{x_n^2}\right) \quad (n \in \mathbb{N})$$

で数列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を定めるとき、以下の問に答えよ。

(1) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $x_n > \sqrt[3]{a}$ が成り立つことを示せ。

(2) $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は収束することを示し (定理を使う場合、その定理を書くこと)、極限を求めよ。

注. (i) 「相加平均 $\ge$ 相乗平均」の類似「$p, q \ge 0 \Rightarrow \frac{1}{3}(2p+q) \ge \sqrt[3]{p^2 q}$, 等号成立 $\Leftrightarrow p = q$.」を証明なしに用いてよい。 (ii) 実は $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は、ある方程式に対する Newton 法の反復列である。Newton 法の収束に関する定理 (色々ある) を適用して、$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の収束を示すこともできる。(1), (2) を解く代わりに、そのような収束定理の証明をレポートしても良い。

問 3.

(1) 実数 x が $(\forall \varepsilon > 0)\ |x| < \varepsilon$ を満たすならば $x = 0$ であることを示せ。

(2) 「I は $\mathbb{R}$ の区間, $f\colon I \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{I}$, $A_1 \in \mathbb{R}$, $A_2 \in \mathbb{R}$ とする。$x \to a$ のとき $f(x) \to A_1$、かつ $x \to a$ のとき $f(x) \to A_2$ が成り立つならば、$A_1 = A_2$.」を証明せよ。

問 4. $f(x) = \sqrt{x}$ により、$f\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ を定めるとき、ε-δ 論法により、次の (1) と (2) を証明せよ。

(1) f は 0 で連続である。　(2) $a > 0$ とするとき、f は a で連続である。

注. 講義で $a \ge 0$ に対して $\sqrt{a}$ を定義したが、関数としての連続性は証明抜きで認めた。

問 5. $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & ((x,y) \ne (0,0) \text{ のとき}) \\ 0 & ((x,y) = (0,0) \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定める。

(1) f が $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ で C^1 級であることを示せ。

(2) f が $(0,0)$ で微分可能であることを示せ。

(3) f は $\mathbb{R}^2$ で C^1 級であるかどうか証明付きで答えよ。

問 6. $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を

$$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & ((x,y) \neq (0,0)) \\ 0 & ((x,y) = (0,0)) \end{cases}$$

で定め、$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2-xy = 1 \wedge x \geq 0\}$ とおくとき、以下の問に答えよ。定理を根拠として用いる場合、その定理を省略なしに書くこと。

(1) K は $\mathbb{R}^2$ の閉集合であることを示せ。

(2) K は $\mathbb{R}^2$ の有界集合であることを示せ。

(3) f は K で最大値を持つことを示せ。

問 7. 次の命題の真偽を述べ、真ならば証明し、偽ならば反例を述べよ。(1) 平面内の 2 つの楕円 E_1, E_2 が共通部分を持たないならば、E_1 上の点と E_2 上の点の距離はある正の数より大きい。(2) 平面内の楕円 E と双曲線 H が共通部分を持たないならば、E 上の点と H 上の点の距離はある正の数より大きい。(3) 平面内の直線 L と双曲線 H が共通部分を持たないならば、L 上の点と H 上の点の距離はある正の数より大きい。

問 8. $n \in \mathbb{N}$ とする。(1)〜(4) を (ロピタルの定理を使わずに) 証明せよ

(1) $(\forall x > 0)\ e^x \geq \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$ (3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{(\log x)^n}{x} = 0$ (4) $\displaystyle\lim_{x\to+0} x(\log x)^n = 0$

問 9.

(1) 任意の実数 a, b に対して、$|a+b| \geq \big||a|-|b|\big|$ が成り立つことを示せ。

(2) a, b, $c \in \mathbb{R}$ が $a \leq b \leq c$ を満たすとする。このとき $|b| \leq R$ を満たす R を 1 つ求めよ。$|b| \leq R$ の証明も書くこと。

(3) $p \geq 0,\ q \geq 0 \Rightarrow \frac{2p+q}{3} \geq \sqrt[3]{p^2 q}$, 等号成立 $\Leftrightarrow p = q$ を示せ。

注. (2) で、条件 $|b| \leq R$ を満たす R はたくさんある。どれか 1 つ求めれば良い。