2019 年度 数学解析 期末試験問題

2019 年 7 月 29 日 (月曜) 9:30〜10:30 施行
担当　桂田 祐史
ノート等持ち込み禁止, 解答用紙のみ提出

9 は必ず解答せよ。**1**〜**8** のうちから 4 題選択して解答せよ。

1. (1) Weierstrass の上限公理を記せ。 (2) $\mathbb{R}$ の部分集合が上に有界であることの定義を述べよ。 (3) $\mathbb{R}$ の部分集合の上限の定義を述べよ。 (4) $\mathbb{R}$ の部分集合 A の最大値が存在するとき、それは A の上限であることを示せ。

2. (1) アルキメデスの公理を記せ。 (2) 集合 $A=\left\{-\frac{1}{n} \,\middle|\, n\in\mathbb{N}\right\}$ の上限が 0 であることを示せ。

3. $\{a_n\}$ は数列、$a\in\mathbb{R}$ とする。以下の各条件を論理式で表せ。
(1) $\{a_n\}$ は a に収束する。 (2) $\{a_n\}$ は a に収束しない。 (3) $\{a_n\}$ は ∞ に発散する。
(4) $\{a_n\}$ は Cauchy 列である。 (5) $\{a_n\}$ は有界である。

4. (1) I は $\mathbb{R}$ の区間、$f\colon I\to\mathbb{R}$, $a\in\overline{I}$, $A\in\mathbb{R}$ とする。$\lim_{x\to a} f(x)=A$ であるとはどういうことか、ε-δ 論法による定義を書け。 (2) $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $a,A,B,C\in\mathbb{R}$, $\lim_{x\to a} f(x)=A$, $\lim_{x\to a} g(x)=B$, $\lim_{x\to a} h(x)=C$ であるとき、$\lim_{x\to a}\left(f(x)+2g(x)-3h(x)\right)=A+2B-3C$ であることを定義に基づき証明せよ。

5. (1) (1 変数実係数の) 多項式の定義を述べ、多項式の例をあげよ。 (2) $f(x)$ が x の多項式であるような関数 $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を、この講義では多項式関数と呼んだ。多項式関数は連続であるという定理を授業でどのように証明したか、あらすじを述べよ。

6. (1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^4+y^2}$ が存在しないことを示せ。 (2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2+y^2}{x+y}$ が存在しないことを示せ。

(3) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}} & ((x,y)\neq(0,0)\text{ のとき})\\ 0 & ((x,y)=(0,0)\text{ のとき})\end{cases}$ で定義される関数 $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ は原点で全微分可能であることを示せ。

7. (1) $\mathbb{R}^n$ の開集合、$\mathbb{R}^n$ の閉集合の定義を述べよ。 (2) A と B が $\mathbb{R}^n$ の開集合であるとき、$A\cup B$ と $A\cap B$ も $\mathbb{R}^n$ の開集合であることを、定義に基づき証明せよ。 (3) $f\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ が連続であるとき、$\Omega=\{x\in\mathbb{R}^n \mid f(x)>0\}$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合であることを、定義に基づき証明せよ。

8. 次の (1)〜(6) の中から、1 つを選んで証明せよ。 (1) 上に有界な単調増加数列は収束する。 (2) 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ がそれぞれ A, B に収束し、かつ任意の自然数 n に対して $a_n\le b_n$ を満たすならば、$A\le B$. (3) Bolzano-Weierstrass の定理 (1 次元版) (4) Weierstrass の最大値定理 (1 次元版) (5) K が $\mathbb{R}^n$ の閉集合ならば、K 内の任意の収束点列の極限は K に属する。

9. (1) $\mathbb{R}^n$ の部分集合が有界であるとはどういうことか、定義を述べよ。 (2) 多変数関数に関する Weierstrass の最大値定理を書け。 (3) $K:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+xy+y^2\le 1\}$, $f\colon K\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}$ とするとき、f の K における最大値、最小値が存在することを示せ。

1.

(1) $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, A が上に有界ならば、A の上限が存在する。

(2) $A \subset \mathbb{R}$ とする。A が上に有界とは、$(\exists U \in \mathbb{R})$ $(\forall x \in A)$ $x \leq U$ が成り立つことをいう、

(3) $A \subset \mathbb{R}$, $S \in \mathbb{R}$ とする。S が A の上限であるとは、次の条件 (i), (ii) を満たすことをいう。

(i) $(\forall x \in A)$ $x \leq S$.

(ii) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists x \in A)$ $x > S - \varepsilon$.

(4) $A \subset \mathbb{R}$ とするとき、M が A の最大値であるとは、次の条件 (a), (b) を満たすことをいう。

(a) $(\forall x \in A)$ $x \leq M$.

(b) $M \in A$.

このとき、$S = M$ とすると、(2) (i) が成り立つ。また任意の正の数 ε に対して、$x = M$ とおくと、$x \in A$ かつ $x > M - \varepsilon$ が成り立つ。ゆえに (2) (ii) が成り立つので、M は A の上限である。■

解説　多くの人は (1)–(3) は解答できていた。間違えた人の多くは、主語を書かなかった。つまり (2) では「A が上に有界」、(3) では「S が A の上限」というのを書けなかった、ということである。それが大事なことなのか？という人は、理解度が低い。数学をやっているときは、主語を必ず書くように。また、(2) では $A \subset \mathbb{R}$, (3) では $A \subset \mathbb{R}$, $S \in \mathbb{R}$ のような前提を条件の中に書くとか、そういう人も散見された (例え話をすると、ある人の話をしている途中で、「私の知っている人で、◯◯という人がいますが」とその人のことを持ち出すような感じで、この人は寝ぼけているのだろうか？と思われるかも。)。(4) は (1)–(3) に比べて正解率が少し下がった。多かった間違いは $x := M - \frac{\varepsilon}{2}$ が $x \in A$ であるというものだ。A は区間とは限らないのだし、なぜそんなことが言えるの？(言えないよ) 別の問題の解答をそのまま持って来ているのだと思うけれど、それはダメ。■

2.

(1) $(\forall a > 0)$ $(\forall b > 0)$ $(\exists n \in \mathbb{N})$ $na > b$

(2) (i) 任意の $x \in A$ に対して、ある $n \in \mathbb{N}$ が存在して、$x = -\dfrac{1}{n}$. $n > 0$ であるから $\dfrac{1}{n} > 0$. ゆえに $x = -\dfrac{1}{n} \leq 0$. (ii) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して、アルキメデスの公理から、ある $n \in \mathbb{N}$ が存在して、$n\varepsilon > 1$. 両辺を $n (> 0)$ で割って $\varepsilon > \frac{1}{n}$. ゆえに $0 - \varepsilon < -\frac{1}{n}$. $x := -\frac{1}{n}$ とおくと、$x \in A$ かつ $0 - \varepsilon < x$. (i) と (ii) から 0 は A の上限である。■

解説　割と出来ていた。今年は (1) の間違いはかなり少なかった。(2) で多かった間違いは、「アルキメデスの公理から、ある自然数 N が存在して、$N\varepsilon > 1$. このとき $n \geq N$ を満たす任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、$0 - \varepsilon < -\frac{1}{n}$, $-\frac{1}{n} \in A$. とするのだけれど、これは証明になっていない。$n \geq N$ を満たす n は存在するの？もちろん確かに存在する。例えば $n = N$ とすれば良い。そうするのならば、上の解答にする方がよっぽど良い。■

3.

(1) $(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists N \in \mathbb{N})\ (\forall n \in \mathbb{N}\colon\ n \geq N)\ |a_n - a| < \varepsilon.$

(2) $(\exists \varepsilon > 0)\ (\forall N \in \mathbb{N})\ (\exists n \in \mathbb{N}\colon\ n \geq N)\ |a_n - a| \geq \varepsilon.$

(3) $(\forall U \in \mathbb{R})\ (\exists N \in \mathbb{N})\ (\forall n \in \mathbb{N}\colon\ n \geq N)\ a_n \geq U.$

(4) $(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists N \in \mathbb{N})\ (\forall m \in \mathbb{N} : m \geq N)\ (\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N)\ |a_n - a_m| < \varepsilon.$
あるいは $(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists N \in \mathbb{N})\ (\forall m, n \in \mathbb{N}\colon\ n \geq N \wedge m \geq N)\ |a_n - a_m| < \varepsilon.$

(5) $(\exists M \in \mathbb{R})\ (\forall n \in \mathbb{N})\ |a_n| \leq M.$
少し前まで不等号の向きが逆で、絶対値もつけてませんでした。混乱させてしまったかな。ごめんなさい。指摘してくれてありがとう。

解説　多かった間違いをいくつか紹介する。(3) で

$$(\forall U \in \mathbb{R})(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N) \quad |a_n| \geq U$$

と絶対値をつけてしまった人。複素数でやっているときは、$\to \infty$ は絶対値が限りなく大きくなるということだけれど、実数の場合は絶対値が大きくなることではない。(4) は回答しない人が多かった (Cauchy 列は重要だけれど、この科目としては、あまり出て来なかったから仕方がないのかな？)。それから、これは結局は同値になるので、完全な間違いとは言い切れないけれど (でも完全な誤解と言い切るぞ 笑)、(5) を $(\exists M \in \mathbb{R})\ (\exists N \in \mathbb{N})\ (\forall n \in \mathbb{N}\colon\ n \geq N)\ |a_n| \leq M$ とした人も多い。 ■

4.

(1) $(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta > 0)\ (\forall x \in I\colon\ |x - a| < \delta)\ |f(x) - A| < \varepsilon.$

(2) ε を任意の正の数とする。$\lim_{x \to a} f(x) = A$ であるから、ある $\delta_1 > 0$ が存在して

$$(\forall x \in I : |x - a| < \delta_1) \quad |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

同様に、$\lim_{x \to a} g(x) = B$, $\lim_{x \to a} h(x) = C$ であるから、ある $\delta_2, \delta_3 > 0$ が存在して

$$(\forall x \in I : |x - a| < \delta_2) \quad |g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{6},$$
$$(\forall x \in I : |x - a| < \delta_3) \quad |h(x) - C| < \frac{\varepsilon}{9}$$

が成り立つ。このとき $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ とおくと、$\delta > 0$ であり、$|x - a| < \delta$ を満たす任意の x に対して

$$\begin{aligned}
|(f(x) + 2g(x) - 3h(x)) - (A + 2B - 3C)| &= |f(x) - A + 2(g(x) - B) - 3(h(x) - C)| \\
&\leq |f(x) - A| + 2|g(x) - B| + 3|h(x) - C| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{3} + 2\frac{\varepsilon}{6} + 3\frac{\varepsilon}{9} = \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

ゆえに

$$|(f(x) + 2g(x) - 3h(x)) - (A + 2B - 3C)| < \varepsilon.$$

したがって

$$\lim_{x \to a} (f(x) + 2g(x) - 3h(x)) = A + 2B - 3C. \blacksquare$$

解説 (1) $(\forall a \in \overline{I})$ をつけた人が多かったけれど、a を問題文で与えているのだから、a は任意というのはおかしい。(2) 仮定 $\lim_{x\to a} f(x) = A$, $\lim_{x\to a} g(x) = B$, $\lim_{x\to a} h(x) = C$ を使って、δ_1, δ_2, δ_3 が取れて、それを用いて、$\delta := \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ とするのがポイントである。間違えた答えとして、まず $\delta_1 := \frac{\varepsilon}{3}$ のようにするものがあった。$f(x) = 3x + b$ のような関数の連続性を証明するときはそんな風にするだろうけれど、今の場合は大勘違いである。多分頭の中がこんがらがっているのでしょう。もう一つ多かった間違いは

$$\delta := \max\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\} \quad (\text{これは間違いです})$$

とするもの。数列について $\lim_{n\to\infty}(a_n + 2b_n - 3c_n) = A + 2B - 3C$ が成り立つことの証明では、$N := \max\{N_1, N_2, N_3\}$ としたけれど$\cdots$ (δ は十分小さく取るもの、N は十分大きく取るもので、方向性は反対だよね。) もちろん

$$\delta := \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$$

とすべきです。■

5. ほとんど解いてくれた人がいなかった。省略する。

6.

(1) $k \in \mathbb{R}$ として、$y = kx^2$ に沿って (x, y) を $(0, 0)$ に近づけたときの極限を求める。

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx^2}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cdot (kx^2)}{x^4 + (kx^2)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{k}{1 + k^2} = \frac{k}{1 + k^2}.$$

この結果は k に依存するので、$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ は存在しない。

(2)

(3) まず

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h, 0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{h^2 \cdot 0}{h^4 + 0^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0,$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0, 0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{0^2 \cdot h}{0^4 + h^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0.$$

$f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$ が存在する場合、f が $(0,0)$ で全微分可能であるとは

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f_x(0,0)x - f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

が成り立つことと同値である。

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f_x(0,0)x - f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2 + y^2}} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{x^2 y}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0 - 0\cdot x - 0\cdot y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\
&= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \\
&= \lim_{r\to 0} \frac{(r\cos\theta)^2 \cdot r\sin\theta}{r^2} \\
&= \lim_{r\to 0} r\cos^2\theta \sin\theta = 0.
\end{aligned}$$

が成り立つので、$(0,0)$ で全微分可能である。最後の等号は、$|r\cos^2\theta\sin\theta - 0| = r\,|\cos^2\theta\sin\theta| \le r \to 0$ による。■

解説　(3) で連続性を示して「ゆえに全微分可能」と言った人が多かったのだけど (うわー)…一般に「全微分可能 $\Rightarrow$ 連続」は成り立つけれど、その逆は一般には成り立たない。「全」がついてなければ (1 変数ならば)、高校で習ったことですよね。$y = |x|$ は連続だけれど、原点のところで接線が引けない、微分可能でない、というの。■

7.

(1) $A \subset \mathbb{R}^n$ とする。

- A が $\mathbb{R}^n$ の開集合であるとは、$(\forall x \in A)\ (\exists \varepsilon > 0)\ B(x;\varepsilon) \subset A$ が成り立つことをいう。
- A が $\mathbb{R}^n$ の閉集合であるとは、A^c が $\mathbb{R}^n$ の開集合であることをいう。

(2) (省略, 後回し)

(3) (省略, 後回し)

解説　(1) 主語を書けない人、間違えた人が多い。「A が開 (閉) 集合であるとは」は必ず書くこと。■

9.

(1) $A \subset \mathbb{R}^n$ とするとき、A が有界であるとは、$(\exists R \in \mathbb{R})\ (\forall x \in A)\ |x| \le R$ が成り立つことをいう。

(2) K が $\mathbb{R}^n$ の有界な閉集合、$f\colon K \to \mathbb{R}$ が連続とするとき、f の最大値が存在する。

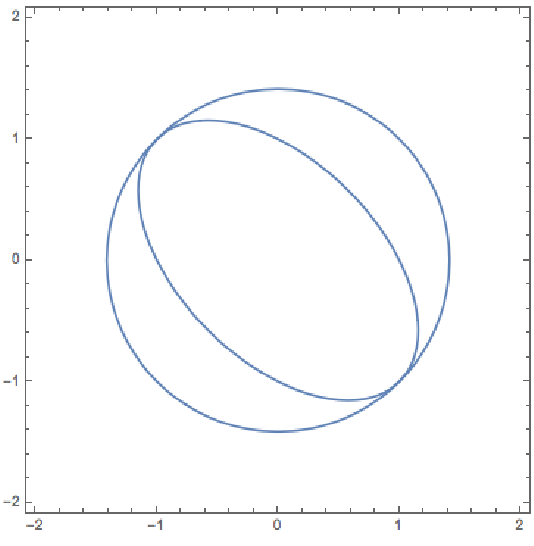

図 1: K の境界 $x^2 + xy + y^2 = 1$ と円 $x^2 + y^2 = 2$

(3) $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x,y) := x^2 + xy + y^2$ は多項式関数であるから、$\mathbb{R}^2$ で連続である。$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x,y) \le 1\}$ であるから、K は $\mathbb{R}^2$ の閉集合である。f も多項式関数を K に制限したものであるから、K で連続である。

$$2(x^2 + xy + y^2) - (x^2 + y^2) = x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2 \ge 0$$

であるから $2(x^2 + xy + y^2) \ge x^2 + y^2$. ゆえに $(x,y) \in K$ とするとき

$$|(x,y)| = \sqrt{x^2 + y^2} \le \sqrt{2(x^2 + xy + y^2)} = \sqrt{2 \cdot 1} = \sqrt{2}.$$

ゆえに K は有界である。Weierstrass の最大値定理によって、f は K で最大値を持つ。■

解説　(1) で多かった間違いとして $(\exists R \in \mathbb{R}^n)\ (\forall x \in A)\ |x| \leq R$ とするもの。R をベクトルにしたら大小関係なんて考えられない。$\mathbb{R}$ と $\mathbb{R}^n$ をごっちゃにしたらダメだ。(2) などで主語がおかしい人が結構多かった。K を連続と言ってみたり。(3) で $\sqrt{x^2+y^2} \leq \sqrt{x^2+xy+y^2} = 1$ とした人も多かった。x, y は正とは限らないのだから、$x^2+y^2 \leq x^2+xy+y^2$ は一般には成り立たない。■