2018 年度 数学解析 期末試験問題

2018 年 7 月 30 日 (月曜) 9:30〜10:30 施行
担当　桂田 祐史
ノート等持ち込み禁止, 解答用紙のみ提出

1 と **8** は必ず解答せよ。**2**〜**7** のうちから 3 題以上選択して解答せよ。(採点して得点の高い方から 3 つの得点を選ぶ。)

1. (1) Weierstrass の上限公理を書け。 (2) $\mathbb{R}$ の部分集合が下に有界であるとはどういうことか、定義を書け。 (3) $\mathbb{R}$ の部分集合の下限の定義を書け。 (4) $\mathbb{R}$ の部分集合 A が空集合ではなく、下に有界であるとするとき、A の下限が存在することを示せ。

2. 数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ がそれぞれ a, b に収束するとする。(1) 数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が有界であることを証明せよ。 (2) 数列 $\{a_nb_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が ab に収束することを証明せよ。

3. 次の (A), (B) のどちらかを選んで解答せよ。

(A) $A = \left\{ \frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$ について、以下の問に答えよ。(1) A の上限を求めよ。上限である理由も書け。 (2) A の下限を求めよ。下限である理由も書け。

(B) (1) 実数列が ∞ に発散するとはどういうことか、定義を述べよ。 (2) アルキメデスの公理を書け。 (3) $\lim_{n\to\infty} n^2 = \infty$ であることを示せ。

4. (1) I は $\mathbb{R}$ の区間、$f\colon I \to \mathbb{R}$ とする。f が I で連続であるとはどういうことか、ε-δ 論法による定義を書け。 (2) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -2x + \log 3$ で定めた f が $\mathbb{R}$ で連続であることを ((1) に書いた) 定義に基づき証明せよ。 (3) $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$ で定めた f が $(0,\infty)$ で連続であることを定義に基づき証明せよ。

5. $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を $f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^3+x^2+xy^2+xy+y^2}{x^2+y^2} & ((x,y) \neq (0,0) \text{ のとき}) \\ 1 & ((x,y) = (0,0) \text{ のとき}) \end{cases}$ で定めるとき、以下の問に答えよ。(1) f が $(0,0)$ で連続であるかどうか調べよ。(2) f が $(0,0)$ で偏微分可能であるかどうか調べよ。(3) f が $(0,0)$ で全微分可能であるかどうか調べよ。

6. (1) $\mathbb{R}^n$ の開集合、$\mathbb{R}^n$ の閉集合の定義を述べよ。 (2) A と B が $\mathbb{R}^n$ の開集合であるとき、$A\cup B$ と $A\cap B$ も $\mathbb{R}^n$ の開集合であることを定義に従い証明せよ。 (3) $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ が連続であるとき、$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) > 0\}$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合であることを、定義に基づき証明せよ。

7. 講義で学んだ定理のうち、極限に関するものを自分で 1 つ選び、その定理を書いた後、証明せよ。その証明の中で別の定理を用いる場合は、その定理を書くこと (その証明はしなくて良い)。

8. (1) $\mathbb{R}^n$ の部分集合が有界であるとはどういうことか、定義を書け。

(2) 多変数関数に関する Weierstrass の最大値定理を書け。

(3) $K := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1\}$, $f\colon K \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = xy - yz + zx$ とするとき、f の K における最大値が存在することを Weierstrass の最大値定理を用いて証明せよ。

(あまり時間がさけないので、ところどころ省略。)
ちなみに 1 と 8 の配点は大きめで、他はみな同じです。

1 解説

(1) A が $\mathbb{R}$ の上に有界かつ空でない部分集合ならば、A の上限が存在する。
(言い換え) $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, A は上に有界 $\Rightarrow$ A の上限が存在する。
(言い換え) 空でない、上に有界な $\mathbb{R}$ の部分集合は上限を持つ。

(2) $A \subset \mathbb{R}$ とする。A が下に有界とは

$$(\exists L \in \mathbb{R})(\forall x \in A) \quad x \geq L$$

が成り立つことをいう。

(3) $A \subset \mathbb{R}$, $I \in \mathbb{R}$ とする。I が A の下限であるとは、次の 2 つの条件を満たすことをいう。

(i) $(\forall x \in A) \quad x \geq I.$

(ii) $(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists x \in A)\ x < I + \varepsilon.$

(4) (略: 2015 年度の期末試験 問 1 が参考になります。)

2 解説

(1) $\{a_n\}$ が a に収束するので、ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して、

$$(\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N) \quad |a_n - a| < 1$$

が成り立つ。このとき (きちんと言うと「$n \geq N$ を満たす $n \in \mathbb{N}$ に対して」)

$$|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a|$$

であるので

$$M := \max\{|a_1|, \cdots, |a_{N-1}|, |a| + 1\}$$

とおくと、

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |a_n| \leq M$$

が成り立つ。ゆえに $\{a_n\}$ は有界である。

(2) (1) で調べたように $|a_n| \leq M$ $(n \in \mathbb{N})$ を満たす M が存在する。
ε を任意の正の数とする。$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ であるから、ある $N_1 \in \mathbb{N}$ が存在して、

$$(\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N_1) \quad |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2(|b| + 1)}.$$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ であるから、ある $N_2 \in \mathbb{N}$ が存在して、

$$(\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N_2) \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2(|M| + 1)}.$$

$N := \max\{N_1, N_2\}$ とおくと、$N \in \mathbb{N}$ であり、$n \geq N$ を満たす任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$\begin{aligned}
|a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| = |a_n(b_n - b) + (a_n - a)b| \\
&\leq |a_n|\,|b_n - b| + |a_n - a|\,|b| < M \cdot \frac{\varepsilon}{2(|M| + 1)} + \frac{\varepsilon}{2(|b| + 1)} \cdot |b| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

ゆえに $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = ab.$ ■

3A 解説　(1) A は最大値 1 を持つ。一般に「最大値は上限である」から、1 は A の上限である。(2) A の下限は 0 である。実際

(i) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、$\dfrac{1}{n} > 0$ であるから、

$$(\forall x \in A) \quad x \geq 0.$$

(ii) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して、アルキメデスの公理から、ある自然数 n が存在して、$n\varepsilon > 1$. ゆえに $\varepsilon > \dfrac{1}{n}$ であるから、

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists x \in A) \quad 0 + \varepsilon > x.$$

($x = 1/n$ とすればよい)。

これは宿題問 2 の類題である。その解答

`http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/kaiseki-2018/toi2-answers.pdf`

も合わせて見ると良いかも。■

3B 解説　(1) $(\forall U \in \mathbb{R})$ $(\exists N \in \mathbb{N})$ $(\forall n \in \mathbb{N}\colon\ n \geq N)$ $a_n > U$.　(2) $(\forall a > 0)$ $(\forall b > 0)$ $(\exists n \in \mathbb{N})$ $na > b$.　(3) 任意の $U \in \mathbb{R}$ に対して、$b := |U| + 1$ とおくと、$b > 0$ であるから、アルキメデスの公理によって、ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して、$N \cdot 1 > b$. ゆえに

$$N > b = |U| + 1 > |U| \geq U.$$

$n \geq N$ を満たす任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$n^2 \geq N^2 \geq N > U.$$

ゆえに $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^2 = \infty$. ■

4 解説

(1) $(\forall a \in I)(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)$ $(\forall x \in I\colon\ |x - a| < \delta)$ $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

(2) a は I の任意の要素とする。任意の $\varepsilon > 0$ に対して、$\delta := \frac{\varepsilon}{2}$ とおくと、$\delta > 0$. そして $|x - a| < \delta$ を満たす任意の $x \in I$ に対して、

$$|f(x) - f(a)| = |(-2x + \log 3) - (-2a + \log 3)| = |-2(x-a)| = |-2| \cdot |x - a| = 2|x - a| < 2\delta = \varepsilon.$$

ゆえに f は I で連続である。

(3) (略)

5 解説

(1) $(x, y) \to (0, 0)$ のとき、$f(x, y) - f(0, 0)$ が 0 に収束するかどうかを調べれば良い。

$(x, y) \neq (0, 0)$ とするとき、

$$f(x, y) - f(0, 0) = \frac{x^3 + x^2 + xy^2 + xy + y^2}{x^2 + y^2} - 1 = \frac{x^3 + xy^2 + xy}{x^2 + y^2}.$$

k を任意の実数として、$y=kx$ に沿った極限を調べてみる。

$$(\heartsuit) \qquad \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}} \frac{x^3+xy^2+xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{k^3x^3+k^2x^3+kx^2}{x^2+k^2x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{k^3x+k^2x+k}{1+k^2} = \frac{k}{1+k^2}.$$

もしも $f(x,y)-f(0,0)\to 0$ であれば、これが 0 になるはずだが、そうではないので、$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}(f(x,y)-f(0,0))$ は 0 ではない。ゆえに f は $(0,0)$ で連続ではない。(証明終)

色々な別解がある。($\heartsuit$) を出した直後に、「この値は k に依存するので、$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}(f(x,y)-f(0,0))$ は存在しない。ゆえに f は $(0,0)$ で連続でない。」というのもある。

(2)

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{h^3+h^2}{h^2}-1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{h^3}{h^2}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} = \lim_{h\to 0}1 = 1$$

であるから $f_x(0,0)=1$.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{h^2}{h^2}-1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = \lim_{h\to 0}0 = 0$$

であるから $f_y(0,0)=0$. $(0,0)$ における偏微分係数が存在することが分かった。ゆえに f は $(0,0)$ で偏微分可能である。

(3) 一般に f が $(0,0)$ で全微分可能であれば連続であるが、f は $(0,0)$ で連続でないことが分かったので、f は $(0,0)$ で全微分可能ではない。■

注意　極座標を使うとどうなるか尋ねられた。この場合は特に分かりやすくなるということもない。

$$\begin{aligned} f(x,y)-f(0,0) &= \frac{(r\cos\theta)^3+(r\cos\theta)(r\sin\theta)^2+r\cos\theta\cdot r\sin\theta}{r^2} = \frac{r^3\cos\theta+r^2\cos\theta\sin\theta}{r^2} \\ &= r\cos\theta+\cos\theta\sin\theta. \end{aligned}$$

この式の $r\to 0$ のときの極限、というと少し意味が曖昧である。少なくともふた通りの解釈が出来る。

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(f(x,y)-f(0,0)) = \lim_{r\to 0}(f(r\cos\theta,r\sin\theta)-1) = \lim_{r\to 0}(r\cos\theta+\cos\theta\sin\theta)$$

とする場合は「θ が何であっても」ということになり、「極限なし」が結論である。

一方で、θ を任意の値に固定しておいて、r のみ、$r\to 0$ とするということであれば (これは k を任意の与えて、$y=kx$ に沿う極限を求めることに近い)

$$\lim_{r\to 0}(r\cos\theta+\cos\theta\sin\theta) = \cos\theta\sin\theta \quad \text{(この式を説明抜きで書いた人も多いが、問題含み)}$$

である。「この値が θ に依存するので、$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}(f(x,y)-f(0,0))$ は存在しない」という説明をすることになるだろう。

つなげて

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(f(x,y)-f(0,0)) = \lim_{r\to 0}(f(r\cos\theta,r\sin\theta)-1) = \cos\theta\sin\theta$$

と書くのは間違いとすべきだろう。■

6 解説

(1) $A \subset \mathbb{R}^n$ とする。A が $\mathbb{R}^n$ の開集合であるとは、

$$(\forall x \in A)(\exists \varepsilon > 0) \quad B(x;\varepsilon) \subset A$$

が成り立つことをいう。ただし、$B(x;\varepsilon) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid |y - x| < \varepsilon\}$.

また、A が $\mathbb{R}^n$ の閉集合であるとは、A の補集合 A^c が $\mathbb{R}^n$ の開集合であることをいう。
(念のため) $A^c = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \notin A\}$.

(2) $A \cup B$ が $\mathbb{R}^n$ の開集合であること。任意の $x \in A \cup B$ に対して、$x \in A$ または $x \in B$.

$x \in A$ のとき、A が $\mathbb{R}^n$ の開集合であることから、ある $\varepsilon > 0$ が存在して $B(x;\varepsilon) \subset A$. ゆえに $B(x;\varepsilon) \subset A \cup B$.

$x \in B$ のとき、B が $\mathbb{R}^n$ の開集合であることから、ある $\varepsilon > 0$ が存在して $B(x;\varepsilon) \subset B$. ゆえに $B(x;\varepsilon) \subset A \cup B$.

いずれの場合も

$$(\exists \varepsilon > 0) \quad B(x;\varepsilon) \subset A \cup B$$

が成り立つ。ゆえに $A \cup B$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合である。

$A \cap B$ が $\mathbb{R}^n$ の開集合であること。これは授業で定理として証明したので省略。

(3) (省略。本質的には授業で定理として証明した。) ■

7 解説　この問題、サービス問題のつもりなんだけれど、今年度は案外選択する人が少なく、選択した人もきちんと得点できた人は少ない (途中で放り出す感じの解答が結構多い)。追試では出題しないかもしれません。

8 解説

(1) $A \subset \mathbb{R}^n$ とする。A が有界とは

$$(\exists R \in \mathbb{R})(\forall x \in A) \quad |x| \leq R$$

が成り立つことをいう。

(2) K が $\mathbb{R}^n$ の有界な閉集合、$f\colon K \to \mathbb{R}$ は連続とするとき、f の K における最大値が存在する。

(3) $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 = 1$ で定まる g は、多項式関数であるから、$\mathbb{R}^3$ で連続である。ゆえに $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid g(x,y,z) = 1\}$ は $\mathbb{R}^3$ の閉集合である。

　また $(x,y,z) \in K$ とするとき、

$$|(x,y,z)| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{1} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad |(x,y,z)| \leq 1$$

であるから、K は有界である。

　一方、$xy - yz + zx$ は多項式であるから、関数として $\mathbb{R}^3$ 全体で連続となるので、(それを K に制限した) f も K で連続である。

　まとめると、K は $\mathbb{R}^3$ の有界閉集合であり、$f\colon K \to \mathbb{R}$ は連続であるから、Weierstrass の最大値定理によって、f の K における最大値が存在することが分かる。 ■