

数学解析 第13回

～ 積分 (1) Riemann 積分の定義, 閉区間上の連続関数の積分可能性 ～

桂田 祐史

2021年7月12日

目次

1 本日の内容&連絡事項

2 積分

- イントロ
 - 大学の数学で学ぶこと
 - 高校での定積分の定義の復習から
 - 大学での積分の定義に向けて
- 積分の定義
- 閉区間上の連続関数の積分の存在
- 積分の性質, 微積分の基本定理
- 多次元への一般化

3 参考文献

本日の内容&連絡事項

- 前回の授業で、期末試験に代わる「期末レポート課題」について説明しました。見逃している人はチェックしておいて下さい。
- 今回と次回(最終回)、積分の話をしてします。積分もある種の極限として定義されます。その定義と、どういう場合に存在が保証されるのかが重要なところです。

8 積分

8.1 イントロ

8.1.1 大学の数学で学ぶこと

積分は、計算の方法に関する話も色々あるが、その他にも論ずべきことは多い。

8 積分

8.1 イントロ

8.1.1 大学の数学で学ぶこと

積分は、計算の方法に関する話も色々あるが、その他にも論ずべきことは多い。

① リーマン Riemann 積分の基礎

積分は、計算の方法に関する話も色々あるが、その他にも論ずべきことは多い。

① リーマン Riemann 積分の基礎

- ① 有界閉区間 $[a, b]$ 上の有界関数の定積分 $\int_a^b f(x) dx$ の定義 (Riemann 和の極限)

定理 「 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ が連続ならば $\int_a^b f(x) dx$ は (必ず) 存在する。」

積分は、計算の方法に関する話も色々あるが、その他にも論ずべきことは多い。

① リーマン Riemann 積分の基礎

- ① 有界閉区間 $[a, b]$ 上の有界関数の定積分 $\int_a^b f(x) dx$ の定義 (Riemann 和の極限)

定理「 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ が連続ならば $\int_a^b f(x) dx$ は (必ず) 存在する。」

- ② 多次元の場合 (有界 Jordan 可測 (面積, 体積確定) 集合上の積分)

積分は、計算の方法に関する話も色々あるが、その他にも論ずべきことは多い。

① リーマン積分の基礎

① 有界閉区間 $[a, b]$ 上の有界関数の定積分 $\int_a^b f(x) dx$ の定義 (Riemann 和の極限)

定理「 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ が連続ならば $\int_a^b f(x) dx$ は (必ず) 存在する。」

② 多次元の場合 (有界 Jordan 可測 (面積, 体積確定) 集合上の積分)

② 広義積分 $\int_{-\infty}^{\infty} \dots dx$ とか。非有界なもの、不連続なものの現れる積分。

積分は、計算の方法に関する話も色々あるが、その他にも論ずべきことは多い。

① リーマン積分の基礎

① 有界閉区間 $[a, b]$ 上の有界関数の定積分 $\int_a^b f(x) dx$ の定義 (Riemann 和の極限)

定理「 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ が連続ならば $\int_a^b f(x) dx$ は (必ず) 存在する。」

② 多次元の場合 (有界 Jordan 可測 (面積, 体積確定) 集合上の積分)

② 広義積分 $\int_{-\infty}^{\infty} \dots dx$ とか。非有界なもの、不連続なものの現れる積分。

あちこちでばりばり使われる (確率論の正規分布とか、Laplace 変換とか、「数学とメディア」や「信号処理とフーリエ変換」の Fourier 変換とか)。

8 積分

8.1 イントロ

8.1.1 大学の数学で学ぶこと

積分は、計算の方法に関する話も色々あるが、その他にも論ずべきことは多い。

① リーマン積分の基礎

① 有界閉区間 $[a, b]$ 上の有界関数の定積分 $\int_a^b f(x) dx$ の定義 (Riemann 和の極限)

定理「 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ が連続ならば $\int_a^b f(x) dx$ は (必ず) 存在する。」

② 多次元の場合 (有界 Jordan 可測 (面積, 体積確定) 集合上の積分)

② 広義積分 $\int_{-\infty}^{\infty} \dots dx$ とか。非有界なもの、不連続なものの現れる積分。

あちこちでばりばり使われる (確率論の正規分布とか、Laplace 変換とか、「数学とメディア」や「信号処理とフーリエ変換」の Fourier 変換とか)。

③ ルベーグ積分 — 現代数学の常識、完備な関数空間を構成するために必要。「応用測度論」でさわり。

8.1.2 高校での定積分の定義の復習から

被積分関数 f の原始関数 F ($F' = f$ を満たす F) を用いて、次のように定義

$$\int_a^b f(x) dx := [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

8.1.2 高校での定積分の定義の復習から

被積分関数 f の原始関数 F ($F' = f$ を満たす F) を用いて、次のように定義

$$\int_a^b f(x) dx := [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

批判「原始関数はいつでも存在するのか？」すぐ分かるときだけ考えた。

8.1.2 高校での定積分の定義の復習から

被積分関数 f の原始関数 F ($F' = f$ を満たす F) を用いて、次のように定義

$$\int_a^b f(x) dx := [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

批判「原始関数はいつでも存在するのか？」すぐ分かるときだけ考えた。

分からないことは多い

$$\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx \quad (\alpha, \beta > 0; \text{特に非整数}),$$

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt,$$

$$\int_0^x e^{-t^2} dt,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-kx^2)}}$$

などなど。どれも切実に必要である。

新しい関数が必要になる。むしろこれらの積分によって新しい関数が定義出来る、と前向きに考えるのがよい。

8.1.3 大学での積分の定義に向けて

どうやって定義するか (高校流とは違って) 原始関数抜きで定義したい。

- アイディアを一口で言うと、 $\int_a^b f(x) dx$ は、 f のグラフと x 軸、2 直線 $x = a$, $x = b$ で囲まれる部分の面積になるようにする。

8.1.3 大学での積分の定義に向けて

どうやって定義するか (高校流とは違って) 原始関数抜きで定義したい。

- アイディアを一口で言うと、 $\int_a^b f(x) dx$ は、 f のグラフと x 軸、2 直線 $x = a$, $x = b$ で囲まれる部分の面積になるようにする。

でも面積って何だろう？反省が必要。

8.1.3 大学での積分の定義に向けて

どうやって定義するか (高校流とは違って) 原始関数抜きで定義したい。

- アイディアを一口で言うと、 $\int_a^b f(x) dx$ は、 f のグラフと x 軸、2 直線 $x = a$, $x = b$ で囲まれる部分の面積になるようにする。

でも面積って何だろう？反省が必要。

- もともと、微積分以前に面積・体積の計算法が発達していた。ギリシャでは、エウドクソス、アルキメデスが高度な議論をしていた。和算でも。

8.1.3 大学での積分の定義に向けて

どうやって定義するか (高校流とは違って) 原始関数抜きで定義したい。

- アイディアを一口で言うと、 $\int_a^b f(x) dx$ は、 f のグラフと x 軸、2 直線 $x = a$, $x = b$ で囲まれる部分の面積になるようにする。

でも面積って何だろう？ 反省が必要。

- もともと、微積分以前に面積・体積の計算法が発達していた。ギリシャでは、エウドクソス、アルキメデスが高度な議論をしていた。和算でも。

大事なものは「微積分の基本定理」

ニュートン、ライプニッツは「**微積分の基本定理**」を発見した。これは微分と積分は互いに逆の演算である、ということ。具体的には次の (1), (2)。

$$\textcircled{1} \quad \int_a^b F'(x) dx = [F(x)]_a^b.$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x).$$

高校数学における積分の定義は (1) を利用したと言える。

8.2 積分の定義

1 変数関数の積分を定義して、「有界閉区間上の連続関数の積分が存在する」という定理を紹介する。

8.2 積分の定義

1 変数関数の積分を定義して、「有界閉区間上の連続関数の積分が存在する」という定理を紹介する。

それなりに重いけれど、大事なエッセンスが味わえる面もある。積分の話は多変数まで込めると、もっと別の要素も出て来るけれど、ここで学ぶことは多変数にも通用する話である。

8.2 積分の定義

1変数関数の積分を定義して、「有界閉区間上の連続関数の積分が存在する」という定理を紹介する。

それなりに重いけれど、大事なエッセンスが味わえる面もある。積分の話は多変数まで込めると、もっと別の要素も出て来るけれど、ここで学ぶことは多変数にも通用する話である。

定義 13.1 (区間の分割, 分割の小区間, 分割に合う標本点, 分割の幅)

$[a, b]$ を \mathbb{R} の有界閉区間として、 $\Delta = \{x_j\}_{j=0}^n$ を $[a, b]$ の**分割**とする。すなわち

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

各 x_j を Δ の**分点**、 $[x_{j-1}, x_j]$ を**小区間**と呼ぶ。

8.2 積分の定義

1変数関数の積分を定義して、「有界閉区間上の連続関数の積分が存在する」という定理を紹介する。

それなりに重いけれど、大事なエッセンスが味わえる面もある。積分の話は多変数まで込めると、もっと別の要素も出て来るけれど、ここで学ぶことは多変数にも通用する話である。

定義 13.1 (区間の分割, 分割の小区間, 分割に合う標本点, 分割の幅)

$[a, b]$ を \mathbb{R} の有界閉区間として、 $\Delta = \{x_j\}_{j=0}^n$ を $[a, b]$ の**分割**とする。すなわち

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

各 x_j を Δ の**分点**、 $[x_{j-1}, x_j]$ を**小区間**と呼ぶ。

また $\xi = \{\xi_j\}_{j=1}^n$ は、各 j に対して、 $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$ を満たす点列とする。これを(今日は) Δ に**合う標本点**ということにする。

8.2 積分の定義

1変数関数の積分を定義して、「有界閉区間上の連続関数の積分が存在する」という定理を紹介する。

それなりに重いけれど、大事なエッセンスが味わえる面もある。積分の話は多変数まで込めると、もっと別の要素も出て来るけれど、ここで学ぶことは多変数にも通用する話である。

定義 13.1 (区間の分割, 分割の小区間, 分割に合う標本点, 分割の幅)

$[a, b]$ を \mathbb{R} の有界閉区間として、 $\Delta = \{x_j\}_{j=0}^n$ を $[a, b]$ の**分割**とする。すなわち

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

各 x_j を Δ の**分点**、 $[x_{j-1}, x_j]$ を**小区間**と呼ぶ。

また $\xi = \{\xi_j\}_{j=1}^n$ は、各 j に対して、 $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$ を満たす点列とする。これを(今日は) Δ に**合う標本点**ということにする。

$$|\Delta| := \max_{1 \leq j \leq n} (x_j - x_{j-1})$$

とおき、これを分割 Δ の**幅**と呼ぶ。

8.2 積分の定義

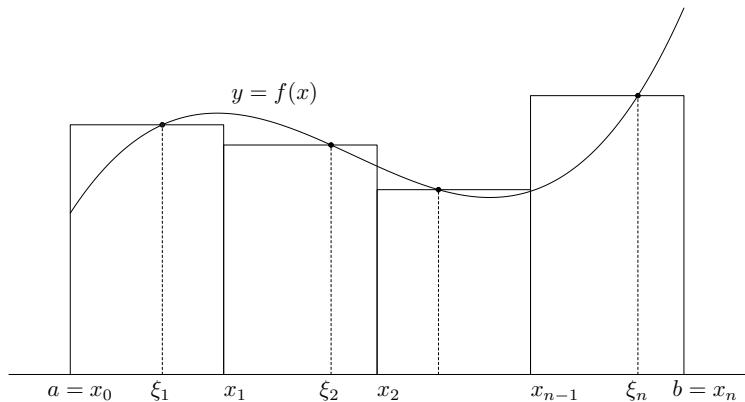


図 1: 長方形の面積の和が $S(\Delta, \xi)$ となる ($n = 4$ の場合)

8.2 積分の定義

定義 13.1 ((続き) Riemann 和, Riemann 積分可能, Riemann 積分)

また、有界な関数 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ に対して

$$S(\Delta, \xi) := \sum_{j=1}^n f(\xi_j)(x_j - x_{j-1})$$

とおき (図 1)、これを f の Δ, ξ に関する **Riemann 和**と呼ぶ。

8.2 積分の定義

定義 13.1 ((続き) Riemann 和, Riemann 積分可能, Riemann 積分)

また、有界な関数 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ に対して

$$S(\Delta, \xi) := \sum_{j=1}^n f(\xi_j) (x_j - x_{j-1})$$

とおき (図 1)、これを f の Δ, ξ に関する **Riemann 和** と呼ぶ。

f が $[a, b]$ で **(Riemann) 積分可能** であるとは、ある実数 S が存在して、次の条件を満たすことをいう。

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)$$

$$(\forall \Delta = \{x_j\}_{j=0}^n : [a, b] \text{ の分割, } |\Delta| < \delta)(\forall \xi = \{\xi_j\}_{j=1}^n : \Delta \text{ に合う標本点})$$

$$|S(\Delta, \xi) - S| < \varepsilon.$$

(この条件を満たす S は存在するならば一つしかない。)

8.2 積分の定義

定義 13.1 ((続き) Riemann 和, Riemann 積分可能, Riemann 積分)

また、有界な関数 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ に対して

$$S(\Delta, \xi) := \sum_{j=1}^n f(\xi_j) (x_j - x_{j-1})$$

とおき (図 1)、これを f の Δ, ξ に関する **Riemann 和** と呼ぶ。

f が $[a, b]$ で **(Riemann) 積分可能** であるとは、ある実数 S が存在して、次の条件を満たすことをいう。

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)$$

$$(\forall \Delta = \{x_j\}_{j=0}^n : [a, b] \text{ の分割, } |\Delta| < \delta)(\forall \xi = \{\xi_j\}_{j=1}^n : \Delta \text{ に合う標本点})$$

$$|S(\Delta, \xi) - S| < \varepsilon.$$

(この条件を満たす S は存在するならば一つしかない。)

このとき、 S を f の $[a, b]$ 上の **(Riemann) 積分** と呼び、 $\int_a^b f(x) dx$ で表す。

8.3 閉区間上の連続関数の積分の存在

積分は、ある種の極限と言える。まず、存在するかどうかが問題となる。

定理 13.2 (有界閉区間上の連続関数の積分の存在)

$[a, b]$ は \mathbb{R} の有界閉区間、 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ は連続とすると、 f は $[a, b]$ で積分可能である。

8.3 閉区間上の連続関数の積分の存在

積分は、ある種の極限と言える。まず、存在するかどうかが問題となる。

定理 13.2 (有界閉区間上の連続関数の積分の存在)

$[a, b]$ は \mathbb{R} の有界閉区間、 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ は連続とするとき、 f は $[a, b]$ で積分可能である。

証明.

証明は3段からなる。(第1段が長くて難関だが、一度は見せたい議論。しかし全体の筋はどこかで見た話…と感じてほしい。)

8.3 閉区間上の連続関数の積分の存在

積分は、ある種の極限と言える。まず、存在するかどうかの問題となる。

定理 13.2 (有界閉区間上の連続関数の積分の存在)

$[a, b]$ は \mathbb{R} の有界閉区間、 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ は連続とすると、 f は $[a, b]$ で積分可能である。

証明.

証明は3段からなる。(第1段が長くて難関だが、一度は見せたい議論。しかし全体の筋はどこかで見た話…と感じてほしい。)

① 次が成り立つ。

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0)$$

$$(\forall \Delta = \{x_j\}_{j=0}^n: [a, b] \text{ の分割, } |\Delta| < \delta)$$

$$(\forall \Delta' = \{x'_j\}_{j=0}^{n'}: [a, b] \text{ の分割, } |\Delta'| < \delta)$$

$$(\forall \xi = \{\xi_j\}_{j=1}^n: \Delta \text{ に合う標本点}) (\forall \xi' = \{\xi'_j\}_{j=1}^{n'}: \Delta' \text{ に合う標本点})$$

$$(\#) \quad |S(\Delta, \xi) - S(\Delta', \xi')| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

8.3 積分の定義, 閉区間上の連続関数の積分の存在

(1) の証明 (式は複雑だが、実はそんなに難しくはない。) ε を任意の正の数とする。 f は $[a, b]$ で一様連続であるから (定理 12.5 による)、ある $\delta > 0$ が存在して

$$(\forall x \in I)(\forall y \in I : |x - y| < \delta) \quad |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{4(b - a)}.$$

8.3 積分の定義, 閉区間上の連続関数の積分の存在

(1) の証明 (式は複雑だが、実はそんなに難しくはない。) ε を任意の正の数とする。 f は $[a, b]$ で一様連続であるから (定理 12.5 による)、ある $\delta > 0$ が存在して

$$(\forall x \in I)(\forall y \in I : |x - y| < \delta) \quad |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}.$$

Δ, Δ' は $|\Delta| < \delta, |\Delta'| < \delta$ を満たす任意の分割とする。 Δ と Δ' の分点を合わせた分割を $\tilde{\Delta} = \{\tilde{x}_i\}_{i=0}^{\tilde{n}}$ とし (これがよく使うテクニック)、 $\tilde{\Delta}$ に合う標本点 $\xi = \{\xi_i\}_{i=0}^{\tilde{n}}$ を (何でも良いので) 1 つ作る。例えば中点を採用して

$$\tilde{\xi}_i := \frac{\tilde{x}_i + \tilde{x}_{i-1}}{2}.$$

このとき実は

$$(b) \quad \left| S(\Delta, \xi) - S(\tilde{\Delta}, \tilde{\xi}) \right| < \frac{\varepsilon}{4}, \quad \left| S(\Delta', \xi) - S(\tilde{\Delta}, \tilde{\xi}) \right| < \frac{\varepsilon}{4}$$

が成り立つ。これが示されれば、三角不等式により (#) はすぐ導かれる。(b) の 2 式の証明はどちらでも同じだから、前者を示す。

8.3 積分の定義, 閉区間上の連続関数の積分の存在

Δ の 1 つの小区間 $[x_{i-1}, x_i]$ が、 $\tilde{\Delta}$ では l 個の小区間

$$[\tilde{x}_{k+j-1}, \tilde{x}_{k+j}] \quad (j = 1, 2, \dots, l)$$

に分割されたとする ($l = 1$ ということもあり得る)。

8.3 積分の定義, 閉区間上の連続関数の積分の存在

Δ の1つの小区間 $[x_{i-1}, x_i]$ が、 $\tilde{\Delta}$ では l 個の小区間

$$[\tilde{x}_{k+j-1}, \tilde{x}_{k+j}] \quad (j = 1, 2, \dots, l)$$

に分割されたとする ($l = 1$ ということもあり得る)。Riemann 和の対応する部分の差は

$$\begin{aligned} \left| f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{j=1}^l f(\tilde{\xi}_{k+j})(\tilde{x}_{k+j} - \tilde{x}_{k+j-1}) \right| &= \left| \sum_{j=1}^l (f(\xi_i) - f(\tilde{\xi}_{k+j})) (\tilde{x}_{k+j} - \tilde{x}_{k+j-1}) \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^l |f(\xi_i) - f(\tilde{\xi}_{k+j})| (\tilde{x}_{k+j} - \tilde{x}_{k+j-1}) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \sum_{j=1}^l (\tilde{x}_{k+j} - \tilde{x}_{k+j-1}) \\ &= \frac{\varepsilon}{4(b-a)} (x_i - x_{i-1}). \end{aligned}$$

8.3 積分の定義, 閉区間上の連続関数の積分の存在

Δ の1つの小区間 $[x_{i-1}, x_i]$ が、 $\tilde{\Delta}$ では ℓ 個の小区間

$$[\tilde{x}_{k+j-1}, \tilde{x}_{k+j}] \quad (j = 1, 2, \dots, \ell)$$

に分割されたとする ($\ell = 1$ ということもあり得る)。Riemann 和の対応する部分の差は

$$\begin{aligned} \left| f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{j=1}^{\ell} f(\tilde{\xi}_{k+j})(\tilde{x}_{k+j} - \tilde{x}_{k+j-1}) \right| &= \left| \sum_{j=1}^{\ell} (f(\xi_i) - f(\tilde{\xi}_{k+j})) (\tilde{x}_{k+j} - \tilde{x}_{k+j-1}) \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^{\ell} |f(\xi_i) - f(\tilde{\xi}_{k+j})| (\tilde{x}_{k+j} - \tilde{x}_{k+j-1}) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \sum_{j=1}^{\ell} (\tilde{x}_{k+j} - \tilde{x}_{k+j-1}) \\ &= \frac{\varepsilon}{4(b-a)} (x_i - x_{i-1}). \end{aligned}$$

これを $i = 1, \dots, n$ について加えると

$$\left| S(\Delta, \xi) - S(\tilde{\Delta}, \tilde{\xi}) \right| \leq \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon}{4(b-a)} (x_i - x_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{4}.$$

8.3 積分の定義, 閉区間上の連続関数の積分の存在

② 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$x_j^{(n)} := \frac{j(b-a)}{n} \quad (j = 0, 1, \dots, n), \quad \Delta^{(n)} := \left\{ x_j^{(n)} \right\}_{j=0}^n,$$

$$\xi_j^{(n)} := \frac{x_{j-1}^{(n)} + x_j^{(n)}}{2}, \quad \xi^{(n)} := \left\{ \xi_j^{(n)} \right\}_{j=0}^n.$$

で $\Delta^{(n)}, \xi^{(n)}$ を定めると (つまり n 等分の分割と真ん中標本点)、数列 $\{S(\Delta^{(n)}, \xi^{(n)})\}_{n \in \mathbb{N}}$ は、収束する。すなわち、ある $S \in \mathbb{R}$ が存在して

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S(\Delta^{(n)}, \xi^{(n)}).$$

証明 Cauchy 列であることを示す。任意の $\varepsilon > 0$ に対して、第 1 段の $\delta > 0$ を取る。 $N > \frac{b-a}{\delta}$ を満たす $N \in \mathbb{N}$ を取ると、 $n, m \geq N$ を満たす任意の $n, m \in \mathbb{N}$ に対して、

$$\left| \Delta^{(n)} \right| = \frac{b-a}{n} \leq \frac{b-a}{N} < \delta, \quad \left| \Delta^{(m)} \right| = \frac{b-a}{m} \leq \frac{b-a}{N} < \delta$$

であるから

$$\left| S(\Delta^{(n)}, \xi^{(n)}) - S(\Delta^{(m)}, \xi^{(m)}) \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

ゆえに $\{S(\Delta^{(n)}, \xi^{(n)})\}_{n \in \mathbb{N}}$ は Cauchy 列であるから、極限 S が存在する。 □

8.3 積分の定義, 閉区間上の連続関数の積分の存在

③ 第2段の S を取る。

任意の $\varepsilon > 0$ に対して、第1段の $\delta > 0$ を取る。

このとき $|\Delta| < \delta$ を満たす任意の分割 Δ と、 Δ に合う標本点 ξ に対して、 $|S(\Delta, \xi) - S| < \varepsilon$ が成り立つ。

実際、 $\frac{b-a}{n} < \delta$ となる任意の $n \in \mathbb{N}$ を取り、 n 等分の分割 $\Delta^{(n)}$ と真ん中標本点 $\{\xi_j^{(n)}\}_{j=0}^n$ の Riemann 和を仲立ちに用いて

$$|S(\Delta, \xi) - S| \leq |S(\Delta, \xi) - S(\Delta^{(n)}, \xi^{(n)})| + |S(\Delta^{(n)}, \xi^{(n)}) - S| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

8.4 積分の性質, 微積分の基本定理

積分は Riemann 和の極限であるから、和 \sum と似た性質を持つ。

8.4 積分の性質, 微積分の基本定理

積分は Riemann 和の極限であるから、和 \sum と似た性質を持つ。

$$(1) \quad \int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx.$$

$$(2) \quad \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

以下では、 $a < b$ とする。

$$(3) \quad f(x) \leq g(x) \quad (x \in [a, b]) \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx,$$

$$(4) \quad \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \leq \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| (b - a).$$

(証明は、Riemann 和の極限を考えれば良い。)

8.4 積分の性質, 微積分の基本定理

定理 13.3 (微積分の基本定理)

① $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ が連続ならば

$$F(x) := \int_a^x f(t) dt \quad (x \in [a, b])$$

は C^1 級で $F' = f$. ゆえに「任意の連続関数 f に対して、 f の原始関数が存在する」。

② $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ が連続ならば、 f の任意の原始関数 G に対して

$$\int_a^b f(x) dx = [G(x)]_a^b.$$

8.4 積分の性質, 微積分の基本定理

証明.

- ① $x \in [a, b]$, $h > 0$, $x + h \in [a, b]$ とするとき

$$\begin{aligned}\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) &= \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt - f(x) \frac{1}{h} \int_x^{x+h} dt \\ &= \frac{1}{h} \int_x^{x+h} (f(t) - f(x)) dt.\end{aligned}$$

ゆえに (f の連続性を用いて)

$$\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| \leq \max_{t \in [x, x+h]} |f(t) - f(x)| \rightarrow 0 \quad (h \rightarrow +0).$$

$h < 0$ のときも同様である。

- ② F を (1) の関数とする。 $(F(x) - G(x))' = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$ であるから、 $F(x) - G(x)$ は定数である。それと $F(a) = 0$ を用いて

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) = F(b) - F(a) = G(b) - G(a). \quad \square$$

8.5 多次元への一般化

(ここはお話だけで済ませる。詳しいことは、例えば桂田 [1] を見よ。)

\mathbb{R}^n の閉区間

$$\begin{aligned} I &= [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \\ &= \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1 \leq x_1 \leq b_1 \wedge \cdots \wedge a_n \leq x_n \leq b_n\} \end{aligned}$$

で定義された有界な関数 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ の (Riemann) 積分

$$\int_I f(x) dx = \int \cdots \int_I f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n$$

が同様に定義され、連続関数の (Riemann) 積分可能性が証明できる。

8.5 多次元への一般化

(ここはお話だけで済ませる。詳しいことは、例えば桂田 [1] を見よ。)

\mathbb{R}^n の閉区間

$$I = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$
$$= \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1 \leq x_1 \leq b_1 \wedge \cdots \wedge a_n \leq x_n \leq b_n\}$$

で定義された有界な関数 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ の (Riemann) 積分

$$\int_I f(x) dx = \int \cdots \int_I f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n$$

が同様に定義され、連続関数の (Riemann) 積分可能性が証明できる。

しかし、それだけでは不十分である。区間でない集合 $\Omega (\subset \mathbb{R}^n)$ の上で積分したい。どうするか。 Ω は有界として、 $\Omega \subset I$ となる区間 I を取り、

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & (x \in \Omega) \\ 0 & (x \in I \setminus \Omega) \end{cases}$$

で \tilde{f} を定めて

$$\int_{\Omega} f(x) dx := \int_I \tilde{f}(x) dx$$

と定義する。

8.5 多次元への一般化

1つ大きな問題がある。 f が連続でも \tilde{f} は連続とは限らない、多くの場合、 \tilde{f} のグラフは、 $\partial\Omega$ のところに断崖絶壁がある。不連続性に取り組む必要がある。

8.5 多次元への一般化

1つ大きな問題がある。 f が連続でも \tilde{f} は連続とは限らない、多くの場合、 \tilde{f} のグラフは、 $\partial\Omega$ のところに断崖絶壁がある。不連続性に取り組む必要がある。

特に $f = 1$ の場合

$$\int_{\Omega} 1 \, dx = \int_I \chi_{\Omega}(x) \, dx, \quad \chi_{\Omega}(x) := \begin{cases} 1 & (x \in \Omega) \\ 0 & (x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega). \end{cases}$$

χ_{Ω} は Ω の特性関数である。この積分は存在するとは限らない (例えば $\Omega = B(0; 1) \cap \mathbb{Q}^n$)。

8.5 多次元への一般化

1つ大きな問題がある。 f が連続でも \tilde{f} は連続とは限らない、多くの場合、 \tilde{f} のグラフは、 $\partial\Omega$ のところに断崖絶壁がある。不連続性に取り組む必要がある。

特に $f = 1$ の場合

$$\int_{\Omega} 1 \, dx = \int_I \chi_{\Omega}(x) \, dx, \quad \chi_{\Omega}(x) := \begin{cases} 1 & (x \in \Omega) \\ 0 & (x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega). \end{cases}$$

χ_{Ω} は Ω の特性関数である。この積分は存在するとは限らない (例えば $\Omega = B(0; 1) \cap \mathbb{Q}^n$)。

この積分が存在するとき、 Ω は ジョルダンかそく **Jordan可測集合** (Jordan measurable set) であるという ($n = 2$ のときは面積確定集合, $n = 3$ のときは体積確定集合ともいう)。

8.5 多次元への一般化

1つ大きな問題がある。 f が連続でも \tilde{f} は連続とは限らない、多くの場合、 \tilde{f} のグラフは、 $\partial\Omega$ のところに断崖絶壁がある。不連続性に取り組む必要がある。

特に $f = 1$ の場合

$$\int_{\Omega} 1 \, dx = \int_I \chi_{\Omega}(x) \, dx, \quad \chi_{\Omega}(x) := \begin{cases} 1 & (x \in \Omega) \\ 0 & (x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega). \end{cases}$$

χ_{Ω} は Ω の特性関数である。この積分は存在するとは限らない (例えば $\Omega = B(0; 1) \cap \mathbb{Q}^n$)。

この積分が存在するとき、 Ω は ジョルダンがそく **Jordan可測集合** (Jordan measurable set) であるという ($n = 2$ のときは面積確定集合, $n = 3$ のときは体積確定集合ともいう)。

この積分は、 $n = 2$ の場合は “ Ω の面積” を意味する。一般には、 Ω の **n 次元 Jordan そくと 測度** と呼び、 $\mu(\Omega)$ や $\mu_n(\Omega)$ のような記号で表す。

$\int_{\Omega} f(x) \, dx$ は、 Ω が Jordan 可測集合である場合にのみ考える。

8.5 多次元への一般化

Jordan 可測集合 Ω で定義された有界な関数 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ の積分 $\int_{\Omega} f(x) dx$ が存在するための条件が問題になるが、幸いなことに、究極とも言える解答が用意されている。

8.5 多次元への一般化

Jordan 可測集合 Ω で定義された有界な関数 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ の積分 $\int_{\Omega} f(x) dx$ が存在するための条件が問題になるが、幸いなことに、究極とも言える解答が用意されている。

定理 13.4 (Lebesgue 1902, Riemann 積分の積分可能条件)

Ω は \mathbb{R}^n の有界な Jordan 可測集合、 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ は有界とするとき、次の 2 条件は互いに同値である。

- ❶ f は Ω で Riemann 積分可能である。
- ❷ f の不連続点全体の集合は、Lebesgue 零集合である。

(この定理の証明は省略する。Lebesgue 零集合の定義は次のスライドで紹介する。)

8.5 多次元への一般化

定義 13.5 (Lebesgue 零集合)

$N \subset \mathbb{R}^n$ とする。 N が **Lebesgue 零集合** であるとは、任意の正の数 ε に対して、ある $\{B_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ が存在して、以下の3条件を満たすことをいう。

(a) 各 B_j は閉区間または空集合である。 (b) $N \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j$. (c) $\sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j) < \varepsilon$.

例 13.6 (Lebesgue 零集合の例)

- 1点 $a \in \mathbb{R}^n$ からなる集合 $\{a\}$ は \mathbb{R}^n の Lebesgue 零集合
- \mathbb{R}^n の有限個の点 からなる集合 $\{a_j\}_{j=1}^{\ell}$ は \mathbb{R}^n の Lebesgue 零集合
- \mathbb{R}^n 内の線分。 $a, b \in \mathbb{R}^n$ に対して、 $\{(1-t)a + tb \mid t \in [0, 1]\}$ は \mathbb{R}^n の Lebesgue 零集合
- 有界閉集合 K で定義された連続関数 $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ のグラフ $\{(x, f(x)) \mid x \in K\}$ は \mathbb{R}^{n+1} の Lebesgue 零集合

参考文献

- [1] 桂田祐史：多変数の微分積分学 2 講義ノート 第 1 部, <http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/tahensuu2/tahensuu2-p1.pdf> (2008).