# 数学解析 第 10 回

～ 極限の存在 (第 2 回), Weierstrass の最大値定理 ～

桂田 祐史

2021 年 6 月 21 日

# 目次

# 本日の内容

- 本日からレベル1なので、対面授業を再開する。なお、在宅受講配慮者や、体調不良などの理由でやむを得ず欠席した人向けに、オンライン講義資料も引き続き提供する。
- 対面授業では、黒板の代わりにスクリーンを用いる。
- 本日の授業内容
  講義ノート [1] §5「極限の存在」の後半 ($\mathbb{R}$ の完備性と、$\mathbb{R}^N$ の完備性、$\mathbb{R}^N$ における Bolzano-Weierstrass の定理を説明)、§6「Weierstrass の最大値定理 (1 次元版)」(有界閉区間上の連続関数の最大値の存在を証明) を講義する。
- 宿題 5 の解説をする (動画公開は 6/21 13:30 以降)。
- 宿題 6 を出す。

# 出欠・宿題について

**出欠** 対面授業に出席する人と、対面授業をリアル・タイムで視聴する人は、Oh-o! Meiji の出欠管理機能を用いて出席情報を送信すること。授業開始時にワンタイムパスワードを知らせるので、それを用いて出席情報を送信すること。
オンデマンド資料を翌週木曜 13:30 までに視聴した場合も出席として扱う。

**宿題** Oh-o! Meiji のレポート・システムを用いて提出する (原則として A4 サイズの単一の PDF)。
課題文は Oh-o! Meiji にも PDF ファイルを掲載するが、対面授業では、それを印刷したプリントも (手を消毒した上で一人一人に) 配布する。そのプリントに解答を記述したものを、スマホ等で撮影して PDF ファイルを作成することを想定している (スキャンアプリの使用を強く推奨) が、もちろん TeX や Word などで電子的に作成しても構わない。

# オンライン講義資料について

(現時点での予定) 第 10 回 (6/21), 第 11 回 (6/28), 第 12 回 (7/5) の授業については、昨年度の講義資料を流用して作成したものを提供する。今年度の授業は、昨年度の授業と (取り扱う例まで含めて) 極力同じになるように準備しているので、オンライン講義資料で学べる内容と対面授業で学べる内容に、ほとんど差はないはずである。

次のことも試してみる。

> 月曜 *1* 限の対面授業はスライドを使用して行い、動画収録する。

これがうまく行くようならば、次のように変更する。

1. やむを得ず授業を欠席する人向けに対面授業内容を Zoom で配信する。(アクセスの集中を避けるため、対面授業を受けている人は、Zoom ミーティングには参加しないで下さい。)
2. 月曜日の 13:30 を目処に、1 限の授業内容を収録した動画をオンデマンドで提供する (Oh-o! Meiji の授業内容・資料)。
3. 対面授業に出席しなくても、翌週の木曜 13:30 までにオンデマンド資料を視聴すれば出席として扱う。
(オンデマンド資料で勉強する人にとっては、資料公開がこれまでより遅くなるが、期限も長くなる、ということになる。)

**定義 10.1 (Cauchy 列)**

$\{a_n\}$ を数列とする。$\{a_n\}$ が **Cauchy 列** (Cauchy sequence, 基本列) であるとは、

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N)(\forall m \in \mathbb{N} : m \geq N) \quad |a_n - a_m| < \varepsilon$$

が成り立つことをいう。

**定義 10.1 (Cauchy 列)**

$\{a_n\}$ を数列とする。$\{a_n\}$ が **Cauchy 列** (Cauchy sequence, 基本列) であるとは、

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N)(\forall m \in \mathbb{N} : m \geq N) \quad |a_n - a_m| < \varepsilon$$

が成り立つことをいう。

(距離空間という言葉は知らないかもしれないが) 一般の距離空間において、上と同様に Cauchy 列が定義できる。任意の Cauchy 列が収束するような距離空間は**完備** (complete) である、という。

**命題 10.2 (収束列は Cauchy 列)**

任意の収束列は Cauchy 列である。

**命題 10.2 (収束列は Cauchy 列)**

任意の収束列は Cauchy 列である。

**証明.**

$\{a_n\}$ が $A$ に収束すると仮定する。$\varepsilon$ を任意の正の数とするとき、$\lim_{n\to\infty} a_n = A$ であるから、ある自然数 $N$ が存在して

$$(\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N) \quad |a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

### 命題 10.2 (収束列は Cauchy 列)

任意の収束列は Cauchy 列である。

### 証明.

$\{a_n\}$ が $A$ に収束すると仮定する。$\varepsilon$ を任意の正の数とするとき、$\lim_{n\to\infty} a_n = A$ であるから、ある自然数 $N$ が存在して

$$(\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N) \quad |a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$n \geq N$, $m \geq N$ を満たす任意の $n, m \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned} |a_n - a_m| &= |a_n - A + A - a_m| \\ &\leq |a_n - A| + |A - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

**命題 10.2 (収束列は Cauchy 列)**

任意の収束列は Cauchy 列である。

**証明.**

$\{a_n\}$ が $A$ に収束すると仮定する。$\varepsilon$ を任意の正の数とするとき、$\lim_{n\to\infty} a_n = A$ であるから、ある自然数 $N$ が存在して

$$(\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N) \quad |a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$n \geq N,\ m \geq N$ を満たす任意の $n, m \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned}|a_n - a_m| &= |a_n - A + A - a_m| \\ &\leq |a_n - A| + |A - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

ゆえに $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

**命題 10.2 (収束列は Cauchy 列)**

任意の収束列は Cauchy 列である。

**証明.**

$\{a_n\}$ が $A$ に収束すると仮定する。$\varepsilon$ を任意の正の数とするとき、$\lim_{n\to\infty} a_n = A$ であるから、ある自然数 $N$ が存在して

$$(\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N) \quad |a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$n \geq N,\ m \geq N$ を満たす任意の $n, m \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned} |a_n - a_m| &= |a_n - A + A - a_m| \\ &\leq |a_n - A| + |A - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

ゆえに $|a_n - a_m| < \varepsilon$. ゆえに $\{a_n\}$ は Cauchy 列である。 □

**定理 10.3 ($\mathbb{R}$ の完備性)**

任意の Cauchy 列は収束列である。すなわち $\mathbb{R}$ は完備である。

**証明**　$\{a_n\}$ は Cauchy 列と仮定する。

**定理 10.3 ($\mathbb{R}$ の完備性)**

任意の Cauchy 列は収束列である。すなわち $\mathbb{R}$ は完備である。

**証明**　$\{a_n\}$ は Cauchy 列と仮定する。

**第 1 段**　$\{a_n\}$ は有界であることを示す。

**定理 10.3 ($\mathbb{R}$ の完備性)**

任意の Cauchy 列は収束列である。すなわち $\mathbb{R}$ は完備である。

**証明**　$\{a_n\}$ は Cauchy 列と仮定する。

**第 1 段**　$\{a_n\}$ は有界であることを示す。まず Cauchy 列であるから、ある自然数 $N$ が存在して

$$(\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N)(\forall m \in \mathbb{N} : m \geq N) \quad |a_n - a_m| < 1$$

が成り立つ。

**定理 10.3 ($\mathbb{R}$ の完備性)**

任意の Cauchy 列は収束列である。すなわち $\mathbb{R}$ は完備である。

**証明**　$\{a_n\}$ は Cauchy 列と仮定する。

**第 1 段**　$\{a_n\}$ は有界であることを示す。まず Cauchy 列であるから、ある自然数 $N$ が存在して

$$(\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N)(\forall m \in \mathbb{N} : m \geq N) \quad |a_n - a_m| < 1$$

が成り立つ。このとき $n \geq N$ を満たす任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$|a_n| = |a_n - a_N + a_N| \leq |a_n - a_N| + |a_N| \leq 1 + |a_N|.$$

**定理 10.3 ($\mathbb{R}$ の完備性)**

任意の Cauchy 列は収束列である。すなわち $\mathbb{R}$ は完備である。

**証明**　$\{a_n\}$ は Cauchy 列と仮定する。

**第 1 段**　$\{a_n\}$ は有界であることを示す。まず Cauchy 列であるから、ある自然数 $N$ が存在して

$$(\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N)(\forall m \in \mathbb{N} : m \geq N) \quad |a_n - a_m| < 1$$

が成り立つ。このとき $n \geq N$ を満たす任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$|a_n| = |a_n - a_N + a_N| \leq |a_n - a_N| + |a_N| \leq 1 + |a_N|.$$

そこで

$$R := \max\{|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_{N-1}|, 1 + |a_N|\}$$

とおくと、$R$ は実数であり、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、$|a_n| \leq R$ が成り立つ。

**第 2 段**　$\{a_n\}$ は有界であるから、Bolzano-Weierstrass の定理により、$\{a_n\}$ は収束部分列を持つ。すなわち、ある部分列 $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ と実数 $A$ が存在して

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A.$$

**第 2 段**　$\{a_n\}$ は有界であるから、Bolzano-Weierstrass の定理により、$\{a_n\}$ は収束部分列を持つ。すなわち、ある部分列 $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ と実数 $A$ が存在して

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A.$$

**第 3 段**　$\{a_n\}$ は $A$ に収束することを示す。

**第 2 段**　$\{a_n\}$ は有界であるから、Bolzano-Weierstrass の定理により、$\{a_n\}$ は収束部分列を持つ。すなわち、ある部分列 $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ と実数 $A$ が存在して

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A.$$

**第 3 段**　$\{a_n\}$ は $A$ に収束することを示す。

　$\varepsilon$ を任意の正の数とする。$\{a_n\}$ は Cauchy 列であるから、ある自然数 $N$ が存在して

$$(\forall n\in\mathbb{N}: n\geq N)(\forall m\in\mathbb{N}: m\geq N)\quad |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

**第 2 段**　$\{a_n\}$ は有界であるから、Bolzano-Weierstrass の定理により、$\{a_n\}$ は収束部分列を持つ。すなわち、ある部分列 $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ と実数 $A$ が存在して

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A.$$

**第 3 段**　$\{a_n\}$ は $A$ に収束することを示す。

　$\varepsilon$ を任意の正の数とする。$\{a_n\}$ は Cauchy 列であるから、ある自然数 $N$ が存在して

$$(\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N)(\forall m \in \mathbb{N} : m \geq N) \quad |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

　$n \geq N$, $k \geq N$ を満たす任意の $n$, $k \in \mathbb{N}$ に対して、$n_k \geq k \geq N$ が成り立つから

$$|a_n - a_{n_k}| < \varepsilon.$$

**第 2 段**　$\{a_n\}$ は有界であるから、Bolzano-Weierstrass の定理により、$\{a_n\}$ は収束部分列を持つ。すなわち、ある部分列 $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ と実数 $A$ が存在して

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A.$$

**第 3 段**　$\{a_n\}$ は $A$ に収束することを示す。

$\varepsilon$ を任意の正の数とする。$\{a_n\}$ は Cauchy 列であるから、ある自然数 $N$ が存在して

$$(\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N)(\forall m \in \mathbb{N} : m \geq N) \quad |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

$n \geq N$, $k \geq N$ を満たす任意の $n$, $k \in \mathbb{N}$ に対して、$n_k \geq k \geq N$ が成り立つから

$$|a_n - a_{n_k}| < \varepsilon.$$

(この左辺を番号 $k$ についての数列とみなすと) $k \to \infty$ のとき

$$|a_n - A| \leq \varepsilon.$$

**第 2 段**　$\{a_n\}$ は有界であるから、Bolzano-Weierstrass の定理により、$\{a_n\}$ は収束部分列を持つ。すなわち、ある部分列 $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ と実数 $A$ が存在して

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A.$$

**第 3 段**　$\{a_n\}$ は $A$ に収束することを示す。

$\varepsilon$ を任意の正の数とする。$\{a_n\}$ は Cauchy 列であるから、ある自然数 $N$ が存在して

$$(\forall n\in\mathbb{N}: n\ge N)(\forall m\in\mathbb{N}: m\ge N)\quad |a_n-a_m|<\varepsilon.$$

$n\ge N$, $k\ge N$ を満たす任意の $n$, $k\in\mathbb{N}$ に対して、$n_k\ge k\ge N$ が成り立つから

$$|a_n-a_{n_k}|<\varepsilon.$$

(この左辺を番号 $k$ についての数列とみなすと) $k\to\infty$ のとき

$$|a_n-A|\le\varepsilon.$$

これは $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ であることを示している。□

**完備性**は非常に重要である。特にそれを用いて

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| \text{ が収束} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ が収束} \quad \text{(絶対収束級数は収束する)}$$

が証明できる (さらに「優級数が収束すれば収束」, Weierstrass の M-test などが導かれる — これらは、一般に完備ノルム空間 (**Banach 空間**) で成り立つ)。

**完備性**は非常に重要である。特にそれを用いて

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ が収束} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ が収束} \quad \text{(絶対収束級数は収束する)}$$

が証明できる (さらに「優級数が収束すれば収束」, Weierstrass の M-test などが導かれる — これらは、一般に完備ノルム空間 (**Banach 空間**) で成り立つ)。

級数については、この講義では論じる時間の余裕がないが、秋学期の「複素関数」では詳しく説明する。

多次元の場合への一般化を目指す。

多次元の場合への一般化を目指す。

Bolzano-Weierstrass の定理, Cauchy 列の収束性 (空間の完備性) などは、$\mathbb{R}^N$ の点列の場合にも成り立つ。

多次元の場合への一般化を目指す。

Bolzano-Weierstrass の定理, Cauchy 列の収束性 (空間の完備性) などは、$\mathbb{R}^N$ の点列の場合にも成り立つ。

まず、数列の場合と同様に、$\mathbb{R}^N$ の点列の「有界」、「Cauchy 列」を定義する。

1. $\{\boldsymbol{a}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が**有界** $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ $(\exists R\in\mathbb{R})(\forall n\in\mathbb{N})\ |\boldsymbol{a}_n|\le R$.
2. $\{\boldsymbol{a}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が **Cauchy 列** $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ $(\forall\varepsilon>0)(\exists N\in\mathbb{N})\ (\forall n\in\mathbb{N}\colon\ n\ge N)$ $(\forall m\in\mathbb{N}\colon\ m\ge N)\ |\boldsymbol{a}_n-\boldsymbol{a}_m|<\varepsilon$.

# 5.5.2 収束列、有界、Cauchy 列は成分ごとに判定可

多くのことが成分ごとに考えれば良い。記述の簡単化のため $N=2$ で説明する。

**命題 10.4 (収束、有界、Cauchy 列は成分ごとにチェックすれば良い)**

$\{\boldsymbol{a}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が $\mathbb{R}^2$ の点列であるとき、$\boldsymbol{a}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ とおく。

0. $\{\boldsymbol{a}_n\}$ が有界 $\Leftrightarrow$ $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ が有界
1. $\{\boldsymbol{a}_n\}$ が収束列 $\Leftrightarrow$ $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ が収束列 (これは証明済み)
2. $\{\boldsymbol{a}_n\}$ が Cauchy 列 $\Leftrightarrow$ $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ が Cauchy 列

## 5.5.2 収束列、有界、Cauchy 列は成分ごとに判定可

多くのことが成分ごとに考えれば良い。記述の簡単化のため $N=2$ で説明する。

**命題 10.4 (収束、有界、Cauchy 列は成分ごとにチェックすれば良い)**

$\{\boldsymbol{a}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が $\mathbb{R}^2$ の点列であるとき、$\boldsymbol{a}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ とおく。

0. $\{\boldsymbol{a}_n\}$ が有界 $\Leftrightarrow$ $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ が有界
1. $\{\boldsymbol{a}_n\}$ が収束列 $\Leftrightarrow$ $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ が収束列 (これは証明済み)
2. $\{\boldsymbol{a}_n\}$ が Cauchy 列 $\Leftrightarrow$ $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ が Cauchy 列

**証明**　一般に成り立つ以下の不等式からすぐ分かる。

1. $|a_n|, |b_n| \le |\boldsymbol{a}_n| \le \sqrt{2}\max\{|a_n|, |b_n|\}.$
2. $|a_n - a|, |b_n - b| \le |\boldsymbol{a}_n - \boldsymbol{a}| \le \sqrt{2}\max\{|a_n - a|, |b_n - b|\}.$
3. $|a_n - a_m|, |b_n - b_m| \le |\boldsymbol{a}_n - \boldsymbol{a}_m| \le \sqrt{2}\max\{|a_n - a_m|, |b_n - b_m|\}.$

# 5.5.3 $\mathbb{R}^N$ の完備性

**定理 10.5 ($\mathbb{R}^N$ の完備性)**

$\mathbb{R}^N$ の点列 $\{\boldsymbol{a}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が Cauchy 列ならば、$\{\boldsymbol{a}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は収束する。

**定理 10.5 ($\mathbb{R}^N$ の完備性)**

$\mathbb{R}^N$ の点列 $\{\boldsymbol{a}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が Cauchy 列ならば、$\{\boldsymbol{a}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は収束する。

**証明**　(やはり $N=2$ の場合に示す。)

$\{\boldsymbol{a}_n\}$ が Cauchy 列であれば、$\boldsymbol{a}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ で定まる $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ は Cauchy 列である。

# 5.5.3 $\mathbb{R}^N$ の完備性

**定理 10.5 ($\mathbb{R}^N$ の完備性)**

$\mathbb{R}^N$ の点列 $\{\boldsymbol{a}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が Cauchy 列ならば、$\{\boldsymbol{a}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は収束する。

**証明**　(やはり $N=2$ の場合に示す。)

$\{\boldsymbol{a}_n\}$ が Cauchy 列であれば、$\boldsymbol{a}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ で定まる $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ は Cauchy 列である。

$\mathbb{R}$ の完備性から、$\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ はどちらも収束する。

**定理 10.5 ($\mathbb{R}^N$ の完備性)**

$\mathbb{R}^N$ の点列 $\{\boldsymbol{a}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が Cauchy 列ならば、$\{\boldsymbol{a}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は収束する。

**証明**　(やはり $N=2$ の場合に示す。)

$\{\boldsymbol{a}_n\}$ が Cauchy 列であれば、$\boldsymbol{a}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ で定まる $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ は Cauchy 列である。

$\mathbb{R}$ の完備性から、$\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ はどちらも収束する。

ゆえに $\{\boldsymbol{a}_n\}$ は収束する。 $\square$

# 5.5.4 点列版 Bolzano-Weierstrass の定理

**定理 10.6 ($\mathbb{R}^N$ における Bolzano-Weierstrass の定理)**

$\mathbb{R}^N$ の点列 $\{\boldsymbol{a}_n\}$ が有界ならば、$\{\boldsymbol{a}_n\}$ のある部分列 $\{\boldsymbol{a}_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ が存在して、収束する。

**定理 10.6 ($\mathbb{R}^N$ における Bolzano-Weierstrass の定理)**

$\mathbb{R}^N$ の点列 $\{\boldsymbol{a}_n\}$ が有界ならば、$\{\boldsymbol{a}_n\}$ のある部分列 $\{\boldsymbol{a}_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ が存在して、収束する。

**証明** $\{\boldsymbol{a}_n\}$ を $\mathbb{R}^2$ の有界な点列として、$\boldsymbol{a}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ とおく。

$\{a_n\}$, $\{b_n\}$ は有界である ($|a_n|, |b_n| \le |\boldsymbol{a}_n| \le R$)。
$\mathbb{R}$ における Bolzano-Weierstrass の定理より

$$(\exists\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} : \{a_n\} \text{ の部分列})\,(\exists A \in \mathbb{R}) \quad \lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A.$$

### 定理 10.6 ($\mathbb{R}^N$ における Bolzano-Weierstrass の定理)

$\mathbb{R}^N$ の点列 $\{\boldsymbol{a}_n\}$ が有界ならば、$\{\boldsymbol{a}_n\}$ のある部分列 $\{\boldsymbol{a}_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ が存在して、収束する。

**証明**　$\{\boldsymbol{a}_n\}$ を $\mathbb{R}^2$ の有界な点列として、$\boldsymbol{a}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ とおく。

$\{a_n\}$, $\{b_n\}$ は有界である ($|a_n|, |b_n| \le |\boldsymbol{a}_n| \le R$)。
$\mathbb{R}$ における Bolzano-Weierstrass の定理より

$$(\exists \{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} : \{a_n\} \text{ の部分列})\,(\exists A \in \mathbb{R}) \quad \lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A.$$

$\{b_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ は有界であるから、やはり Bolzano-Weierstrass の定理によって

$$\left(\exists \{b_{n_{k_j}}\}_{j\in\mathbb{N}} : \{b_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \text{ の部分列}\right)(\exists B \in \mathbb{R}) \quad \lim_{j\to\infty} b_{n_{k_j}} = B.$$

**定理 10.6 ($\mathbb{R}^N$ における Bolzano-Weierstrass の定理)**

$\mathbb{R}^N$ の点列 $\{\boldsymbol{a}_n\}$ が有界ならば、$\{\boldsymbol{a}_n\}$ のある部分列 $\{\boldsymbol{a}_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ が存在して、収束する。

**証明** $\{\boldsymbol{a}_n\}$ を $\mathbb{R}^2$ の有界な点列として、$\boldsymbol{a}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ とおく。

$\{a_n\}, \{b_n\}$ は有界である ($|a_n|, |b_n| \le |\boldsymbol{a}_n| \le R$)。
$\mathbb{R}$ における Bolzano-Weierstrass の定理より

$$(\exists\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} : \{a_n\} \text{ の部分列})\,(\exists A \in \mathbb{R}) \quad \lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A.$$

$\{b_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ は有界であるから、やはり Bolzano-Weierstrass の定理によって

$$\left(\exists\{b_{n_{k_j}}\}_{j\in\mathbb{N}} : \{b_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \text{ の部分列}\right)(\exists B \in \mathbb{R}) \quad \lim_{j\to\infty} b_{n_{k_j}} = B.$$

$\left\{a_{n_{k_j}}\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ は $\{a_{n_k}\}_k$ の部分列であるから、$\displaystyle\lim_{j\to\infty} a_{n_{k_j}} = A$.

# 5.5.4 点列版 Bolzano-Weierstrass の定理

## 定理 10.6 ($\mathbb{R}^N$ における Bolzano-Weierstrass の定理)

$\mathbb{R}^N$ の点列 $\{\boldsymbol{a}_n\}$ が有界ならば、$\{\boldsymbol{a}_n\}$ のある部分列 $\{\boldsymbol{a}_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ が存在して、収束する。

**証明** $\{\boldsymbol{a}_n\}$ を $\mathbb{R}^2$ の有界な点列として、$\boldsymbol{a}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ とおく。
$\{a_n\}$, $\{b_n\}$ は有界である ($|a_n|, |b_n| \le |\boldsymbol{a}_n| \le R$)。
$\mathbb{R}$ における Bolzano-Weierstrass の定理より

$$(\exists \{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} : \{a_n\} \text{ の部分列})\,(\exists A \in \mathbb{R}) \quad \lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A.$$

$\{b_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ は有界であるから、やはり Bolzano-Weierstrass の定理によって

$$\left(\exists \{b_{n_{k_j}}\}_{j\in\mathbb{N}} : \{b_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \text{ の部分列}\right)(\exists B \in \mathbb{R}) \quad \lim_{j\to\infty} b_{n_{k_j}} = B.$$

$\left\{a_{n_{k_j}}\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ は $\{a_{n_k}\}_k$ の部分列であるから、$\lim_{j\to\infty} a_{n_{k_j}} = A$.
ゆえに

$$\lim_{j\to\infty} \boldsymbol{a}_{n_{k_j}} = \lim_{j\to\infty} \begin{pmatrix} a_{n_{k_j}} \\ b_{n_{k_j}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}. \quad \square$$

この証明は 2 次元の場合に行ったが、同じやり方で、任意の $N \in \mathbb{N}$ に対して、$\mathbb{R}^N$ で「同様に」出来ることは分かるであろう。

## 例 10.7 ((定理を使わず) 具体的に収束部分列が作れる例)

$$\boldsymbol{a}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^n + \frac{1}{n} \\ \sin \dfrac{2n\pi}{3} + \dfrac{1}{n^2} \end{pmatrix}$$

とする。

**例 10.7 ((定理を使わず) 具体的に収束部分列が作れる例)**

$$\boldsymbol{a}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^n + \frac{1}{n} \\ \sin\dfrac{2n\pi}{3} + \dfrac{1}{n^2} \end{pmatrix}$$

とする。$n_k = 2k$ とすると

$$a_{n_k} = a_{2k} = 1 + \frac{1}{2k} \to 1 \quad (k \to \infty),$$

$$b_{n_k} = b_{2k} = \sin\frac{4k\pi}{3} + \frac{1}{4k^2} \quad (\text{収束しない}).$$

## 例 10.7 ((定理を使わず) 具体的に収束部分列が作れる例)

$$\boldsymbol{a}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^n + \frac{1}{n} \\ \sin\dfrac{2n\pi}{3} + \dfrac{1}{n^2} \end{pmatrix}$$

とする。$n_k = 2k$ とすると

$$a_{n_k} = a_{2k} = 1 + \frac{1}{2k} \to 1 \quad (k \to \infty),$$
$$b_{n_k} = b_{2k} = \sin\frac{4k\pi}{3} + \frac{1}{4k^2} \quad (\text{収束しない}).$$

$\sin\frac{4k\pi}{3}$ は ($k$ について) 周期 3 である。そこで $k_j = 3j$, つまり $n_{k_j} = 6j$ とすると

$$b_{n_{k_j}} = b_{6j} = \frac{1}{36j^2} \to 0 \quad (j \to \infty).$$

## 例 10.7 ((定理を使わず) 具体的に収束部分列が作れる例)

$$\boldsymbol{a}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^n + \frac{1}{n} \\ \sin\dfrac{2n\pi}{3} + \dfrac{1}{n^2} \end{pmatrix}$$

とする。$n_k = 2k$ とすると

$$a_{n_k} = a_{2k} = 1 + \frac{1}{2k} \to 1 \quad (k \to \infty),$$
$$b_{n_k} = b_{2k} = \sin\frac{4k\pi}{3} + \frac{1}{4k^2} \quad (\text{収束しない}).$$

$\sin\frac{4k\pi}{3}$ は ($k$ について) 周期 3 である。そこで $k_j = 3j$, つまり $n_{k_j} = 6j$ とすると

$$b_{n_{k_j}} = b_{6j} = \frac{1}{36j^2} \to 0 \quad (j \to \infty).$$

ゆえに

$$\boldsymbol{a}_{n_{k_j}} = \begin{pmatrix} a_{6j} \\ b_{6j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \dfrac{1}{6j} \\ \dfrac{1}{36j^2} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

以下の定理 (とその多次元版) が、「数学解析」の中で一番重要な結果である (と私は考えている)。名前をつけないテキストが少なくないが、この講義では、「**Weierstrass の最大値定理**」と呼ぶことにする。

以下の定理 (とその多次元版) が、「数学解析」の中で一番重要な結果である (と私は考えている)。名前をつけないテキストが少なくないが、この講義では、「**Weierstrass の最大値定理**」と呼ぶことにする。

関数の最大値の**存在を主張**している定理である。関数の最大値の存在を示すとき、90% 以上がこの定理を使うのではないだろうか。

以下の定理 (とその多次元版) が、「数学解析」の中で一番重要な結果である (と私は考えている)。名前をつけないテキストが少なくないが、この講義では、「**Weierstrass の最大値定理**」と呼ぶことにする。

関数の最大値の**存在を主張**している定理である。関数の最大値の存在を示すとき、90% 以上がこの定理を使うのではないだろうか。
(ゼミでそう言うんだけど、学生はなかなか覚えてくれないのだ…)

以下の定理 (とその多次元版) が、「数学解析」の中で一番重要な結果である (と私は考えている)。名前をつけないテキストが少なくないが、この講義では、「**Weierstrass の最大値定理**」と呼ぶことにする。

関数の最大値の**存在を主張**している定理である。関数の最大値の存在を示すとき、90% 以上がこの定理を使うのではないだろうか。
(ゼミでそう言うんだけど、学生はなかなか覚えてくれないのだ…)

**定理 10.8 ((1 次元版) Weierstrass の最大値定理)**

$a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $K = [a, b]$ とする。$f \colon K \to \mathbb{R}$ は連続とするとき、$f$ の $K$ における最大値が存在する。すなわち

$$(\exists c \in K)(\forall x \in K) \quad f(c) \geq f(x).$$

$f$ の $K$ における最大値とは、$f$ の値域 $f(K) = \{f(x) \mid x \in K\}$ の最大値のことをいう。

同じ仮定から、$f$ の $K$ における最小値の存在も成立する。

**証明**　まず次が成り立つことを示す。

$$(\exists \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} : K \text{ 内の数列}) \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \sup f(K).$$

**証明**　まず次が成り立つことを示す。

$$(\exists \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} : K \text{ 内の数列}) \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \sup f(K).$$

実際、$S := \sup f(K)$ とおくとき、

**証明**　まず次が成り立つことを示す。

$$(\exists \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} : K \text{ 内の数列}) \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \sup f(K).$$

実際、$S := \sup f(K)$ とおくとき、

1. $f(K)$ が上に有界の場合は、$S$ は $f(K)$ の上限であるから、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して
$$(\exists x_n \in K) \quad S - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq S.$$

**証明**　まず次が成り立つことを示す。

$$(\exists\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} : K \text{ 内の数列}) \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \sup f(K).$$

実際、$S := \sup f(K)$ とおくとき、

(i) $f(K)$ が上に有界の場合は、$S$ は $f(K)$ の上限であるから、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$(\exists x_n \in K) \quad S - \frac{1}{n} < f(x_n) \le S.$$

(ii) $f(K)$ が上に有界でない場合は、$S = \infty$ であり、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$(\exists x_n \in K) \quad f(x_n) > n.$$

**証明**　まず次が成り立つことを示す。

$$(\exists\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}: K \text{ 内の数列})\ \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \sup f(K).$$

実際、$S := \sup f(K)$ とおくとき、

(i) $f(K)$ が上に有界の場合は、$S$ は $f(K)$ の上限であるから、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$(\exists x_n \in K) \quad S - \frac{1}{n} < f(x_n) \le S.$$

(ii) $f(K)$ が上に有界でない場合は、$S = \infty$ であり、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$(\exists x_n \in K) \quad f(x_n) > n.$$

このように $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を作ると、(i), (ii) いずれの場合も

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = S$$

が成り立つ。

$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は $[a,b]$ に含まれるので有界である。Bolzano-Weierstrass の定理から、$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ のある部分列 $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ が存在して収束する。すなわち

$$(\exists c\in\mathbb{R})\quad \lim_{k\to\infty} x_{n_k}=c.$$

$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は $[a,b]$ に含まれるので有界である。Bolzano-Weierstrass の定理から、$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ のある部分列 $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ が存在して収束する。すなわち

$$(\exists c\in\mathbb{R})\quad \lim_{k\to\infty} x_{n_k}=c.$$

実は $c\in K$ である。実際、$x_{n_k}\in K$ より $a\le x_{n_k}\le b$ であるから、$k\to\infty$ とすると、(順序の保存 (命題 4.4) によって) $a\le c\le b$. ゆえに $c\in[a,b]=K$.

$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は $[a,b]$ に含まれるので有界である。Bolzano-Weierstrass の定理から、$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ のある部分列 $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ が存在して収束する。すなわち

$$(\exists c\in\mathbb{R})\quad \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = c.$$

実は $c\in K$ である。実際、$x_{n_k}\in K$ より $a\le x_{n_k}\le b$ であるから、$k\to\infty$ とすると、(順序の保存 (命題 4.4) によって) $a\le c\le b$. ゆえに $c\in[a,b]=K$.

$f$ は $c$ で連続であること、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} f(x_n)=S$ であることから

$$f(c)=\lim_{k\to\infty} f\left(x_{n_k}\right)=S.$$

$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は $[a,b]$ に含まれるので有界である。Bolzano-Weierstrass の定理から、$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ のある部分列 $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ が存在して収束する。すなわち

$$(\exists c\in\mathbb{R})\quad \lim_{k\to\infty} x_{n_k}=c.$$

実は $c\in K$ である。実際、$x_{n_k}\in K$ より $a\le x_{n_k}\le b$ であるから、$k\to\infty$ とすると、(順序の保存 (命題 4.4) によって) $a\le c\le b$. ゆえに $c\in[a,b]=K$.

$f$ は $c$ で連続であること、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} f(x_n)=S$ であることから

$$f(c)=\lim_{k\to\infty} f\left(x_{n_k}\right)=S.$$

ゆえに $S$ は ($\infty$ ではなく) 実数であり、$f(K)$ の上限であることが分かる。$S=f(c)\in f(K)$ であるから、それは $f$ の最大値である。 $\square$

$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は $[a,b]$ に含まれるので有界である。Bolzano-Weierstrass の定理から、$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ のある部分列 $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ が存在して収束する。すなわち

$$(\exists c\in\mathbb{R})\quad \lim_{k\to\infty} x_{n_k}=c.$$

実は $c\in K$ である。実際、$x_{n_k}\in K$ より $a\le x_{n_k}\le b$ であるから、$k\to\infty$ とすると、(順序の保存 (命題 4.4) によって) $a\le c\le b$. ゆえに $c\in[a,b]=K$.

$f$ は $c$ で連続であること、$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=S$ であることから

$$f(c)=\lim_{k\to\infty} f\left(x_{n_k}\right)=S.$$

ゆえに $S$ は ($\infty$ ではなく) 実数であり、$f(K)$ の上限であることが分かる。$S=f(c)\in f(K)$ であるから、それは $f$ の最大値である。 $\square$

(証明中に $c\in K$ を示したが、多次元化するときその部分が問題になる。)

# 6 Weierstrass の最大値定理 (1 次元版)　例

**$K$ が有界閉区間、$f$ が連続という 2 条件を満さないと、最大値が存在しないことがある。**

$K$ が有界閉区間、$f$ が連続という 2 条件を満さないと、最大値が存在しないことがある。

## 例 10.9

(i) $K=[0,1]$, $f(x)=\begin{cases} x & (0\le x<1) \\ 0 & (x=1) \end{cases}$

$K$ が有界閉区間、$f$ が連続という 2 条件を満さないと、最大値が存在しないことがある。

## 例 10.9

(i) $K=[0,1],\ f(x)=\begin{cases} x & (0\le x<1) \\ 0 & (x=1)\end{cases}$

(ii) $K=(0,1),\ f(x)=x\ (x\in K)$

$K$ が有界閉区間、$f$ が連続という 2 条件を満さないと、最大値が存在しないことがある。

## 例 10.9

1. $K = [0,1],\ f(x) = \begin{cases} x & (0 \le x < 1) \\ 0 & (x = 1) \end{cases}$
2. $K = (0,1),\ f(x) = x\ (x \in K)$
3. $K = (0,1),\ f(x) = \frac{1}{x}\ (x \in K)$

$K$ が有界閉区間、$f$ が連続という 2 条件を満さないと、最大値が存在しないことがある。

## 例 10.9

1. $K=[0,1]$, $f(x)=\begin{cases} x & (0\le x<1) \\ 0 & (x=1) \end{cases}$
2. $K=(0,1)$, $f(x)=x$ $(x\in K)$
3. $K=(0,1)$, $f(x)=\frac{1}{x}$ $(x\in K)$
4. $K=[0,\infty)$, $f(x)=\tan^{-1}x$

$K$ が有界閉区間、$f$ が連続という 2 条件を満さないと、最大値が存在しないことがある。

### 例 10.9

(i) $K=[0,1]$, $f(x)=\begin{cases} x & (0\le x<1) \\ 0 & (x=1) \end{cases}$

(ii) $K=(0,1)$, $f(x)=x$ $(x\in K)$

(iii) $K=(0,1)$, $f(x)=\frac{1}{x}$ $(x\in K)$

(iv) $K=[0,\infty)$, $f(x)=\tan^{-1}x$

(v) $K=[0,\infty)$, $f(x)=x$

**$K$ が有界閉区間、$f$ が連続という 2 条件を満さないと、最大値が存在しないことがある。**

## 例 10.9

(i) $K=[0,1]$, $f(x)=\begin{cases} x & (0\le x<1) \\ 0 & (x=1)\end{cases}$

(ii) $K=(0,1)$, $f(x)=x$ $(x\in K)$

(iii) $K=(0,1)$, $f(x)=\frac{1}{x}$ $(x\in K)$

(iv) $K=[0,\infty)$, $f(x)=\tan^{-1}x$

(v) $K=[0,\infty)$, $f(x)=x$

| 例 | $K$ は有界閉区間？ | $f$ は連続？ | $\sup f(K)$ | $\max f(K)$ |
|---|---|---|---|---|
| (i) | ○ | × | 1 | 存在しない |
| (ii) | × | ○ | 1 | 存在しない |
| (iii) | × | ○ | $\infty$ | 存在しない |
| (iv) | × | ○ | $\pi/2$ | 存在しない |
| (v) | × | ○ | $\infty$ | 存在しない |

有界閉区間と連続、2 条件揃えば最大値が存在する、という定理は本質をついていると思われる。

# 6 Weierstrass の最大値定理 (1 次元版) 使いみち

# 6 Weierstrass の最大値定理 (1次元版) 使いみち

解析学、幾何学で、多くのものが関数の最大値 (または最小値) として特徴づけられ、その存在がこの Weierstrass の最大値定理を使うことで示される。それはある程度数学を学ぶと、空気のように当たり前のことと納得できるが、初学者にはこの定理のありがたみはなかなか分かりにくいかもしれない。

# 6 Weierstrass の最大値定理 (1 次元版) 使いみち

解析学、幾何学で、多くのものが関数の最大値 (または最小値) として特徴づけられ、その存在がこの Weierstrass の最大値定理を使うことで示される。それはある程度数学を学ぶと、空気のように当たり前のことと納得できるが、初学者にはこの定理のありがたみはなかなか分かりにくいかもしれない。

微積分では、Rolle の定理の証明に用いられ、それを使って平均値の定理、Taylor の定理が証明される。

例えば高校で微分法を学んで以来当たり前のように使っている「ある区間で $f' > 0$ ならば、$f$ は増加関数 $(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2))$ である」という定理は、ふつう平均値の定理を用いて証明される。したがって、Weierstrass の最大値定理が基礎になっていると言えるだろう。

# 6 Weierstrass の最大値定理 (1次元版) 使いみち

解析学、幾何学で、多くのものが関数の最大値 (または最小値) として特徴づけられ、その存在がこの Weierstrass の最大値定理を使うことで示される。それはある程度数学を学ぶと、空気のように当たり前のことと納得できるが、初学者にはこの定理のありがたみはなかなか分かりにくいかもしれない。

微積分では、Rolle の定理の証明に用いられ、それを使って平均値の定理、Taylor の定理が証明される。

例えば高校で微分法を学んで以来当たり前のように使っている「ある区間で $f' > 0$ ならば、$f$ は増加関数 $(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2))$ である」という定理は、ふつう平均値の定理を用いて証明される。したがって、Weierstrass の最大値定理が基礎になっていると言えるだろう。

(意欲のある人は、この辺のことを、自分で色々考えてみよう。)

# 問 6 の紹介

内容的には「多変数関数の極限についての注意」で、前回の続きのような問題である。

課題文と TEX ソース

http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/kaiseki/toi6.pdf
http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/kaiseki/toi6.tex

## 参考情報

- 多変数関数の極限の問題は次の文書に問として載っている (p. 57 (付近). 少し雑だが解答も pp. 138–142 にある)。

講義ノート
http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/kaiseki/kaiseki-2021.pdf

# 参考文献

[1] 桂田祐史：数学解析, http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/kaiseki-2021/kaiseki-2021.pdf (2014 年〜).