

# 数学解析 第5回

～ 数列の極限 (第3回), 関数の極限 (第1回) ～

桂田 祐史

2021年5月17日

# 目次

- 1 本日の連絡事項&内容
- 2 数列の極限 (定義と簡単な性質)
  - Leibniz の判定基準, Leibniz の級数
  - 数列の無限大への発散, 定義
  - 等比数列がらみの極限
- 3 関数の極限 —  $\epsilon$ - $\delta$  論法と連続関数の基本的な性質
  - 関数の極限の定義と基本的な性質
- 4 参考文献

# 本日の連絡事項&内容

- 5月16日正午過ぎの時点で、宿題3の未提出者が少し残っています。ここで落として欲しくないのだけど…
- 本日の授業内容
  - 数列の極限 (第3回)
  - 関数の極限 (第1回 講義ノート [1] の §3)
- 本日は宿題はありません。

## 2.5 Leibniz の判定基準, Leibniz の級数

前回、素朴な平方根計算手順で  $\sqrt{3}$  が定義できること、級数  $e = \sum_{n=0}^{\infty} 1/n!$  を用いて  $e$  が定義できることを見た。

## 2.5 Leibniz の判定基準, Leibniz の級数

前回、素朴な平方根計算手順で  $\sqrt{3}$  が定義できること、級数  $e = \sum_{n=0}^{\infty} 1/n!$  を用いて  $e$  が定義できることを見た。それでは円周率  $\pi$  について、有名な Madhava-Gregory-Leibniz 級数

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} + \cdots$$

はどうか？

## 2.5 Leibniz の判定基準, Leibniz の級数

前回、素朴な平方根計算手順で  $\sqrt{3}$  が定義できること、級数  $e = \sum_{n=0}^{\infty} 1/n!$  を用いて  $e$  が定義できることを見た。それでは円周率  $\pi$  について、有名な Madhava-Gregory-Leibniz 級数

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} + \cdots$$

はどうか？残念ながら、この級数の部分和の数列  $\{s_n\}$  は単調増加ではない。

$$s_1 > s_2 < s_3 > s_4 < \cdots \quad (\text{実は } s_2 < s_4 < s_6 < \cdots < s_5 < s_3 < s_1)$$

## 2.5 Leibniz の判定基準, Leibniz の級数

前回、素朴な平方根計算手順で  $\sqrt{3}$  が定義できること、級数  $e = \sum_{n=0}^{\infty} 1/n!$  を用いて  $e$  が定義できることを見た。それでは円周率  $\pi$  について、有名な Madhava-Gregory-Leibniz 級数

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} + \cdots$$

はどうか？残念ながら、この級数の部分和の数列  $\{s_n\}$  は単調増加ではない。

$$s_1 > s_2 < s_3 > s_4 < \cdots \quad (\text{実は } s_2 < s_4 < s_6 < \cdots < s_5 < s_3 < s_1)$$

しかし、次の定理を使うと和が存在することが分かる。

**交代級数に関する Leibniz の判定基準 (Leibniz criterion for alternating series)**

$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  が単調減少数列であり、かつ  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  を満たすならば、

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n \text{ は収束する。}$$

Taylor 展開に  $(-1)^n$  という因子はよく現れるので、この命題は結構役に立つ。

## 2.5 Leibniz の判定基準の証明

証明.

$n$  項までの部分和を  $s_n$  とすると (つまり、 $s_n := \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} a_k$ )、

$$s_1 \geq s_3 \geq s_5 \geq \cdots \geq s_{2k-1} \geq s_{2k+1} \geq \cdots,$$

$$s_2 \leq s_4 \leq s_6 \leq \cdots \leq s_{2k} \leq s_{2k+2} \leq \cdots,$$

$$s_2 \leq s_{2k} \leq s_{2k-1} \leq s_1$$

が成り立つ。



## 2.5 Leibniz の判定基準の証明

証明.

$n$  項までの部分和を  $s_n$  とすると (つまり、 $s_n := \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} a_k$ )、

$$s_1 \geq s_3 \geq s_5 \geq \cdots \geq s_{2k-1} \geq s_{2k+1} \geq \cdots,$$

$$s_2 \leq s_4 \leq s_6 \leq \cdots \leq s_{2k} \leq s_{2k+2} \leq \cdots,$$

$$s_2 \leq s_{2k} \leq s_{2k-1} \leq s_1$$

が成り立つ。ゆえに  $b_n := s_{2n-1}$ ,  $c_n := s_{2n}$  としたとき、 $\{b_n\}$  は単調減少数列で  $s_2$  を下界に持ち、 $\{c_n\}$  は単調増加数列  $s_1$  を上界に持つ (これらのことのチェックは自分でやってみよう)。

## 2.5 Leibniz の判定基準の証明

証明.

$n$  項までの部分和を  $s_n$  とすると (つまり、 $s_n := \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} a_k$ )、

$$s_1 \geq s_3 \geq s_5 \geq \cdots \geq s_{2k-1} \geq s_{2k+1} \geq \cdots,$$

$$s_2 \leq s_4 \leq s_6 \leq \cdots \leq s_{2k} \leq s_{2k+2} \leq \cdots,$$

$$s_2 \leq s_{2k} \leq s_{2k-1} \leq s_1$$

が成り立つ。ゆえに  $b_n := s_{2n-1}$ ,  $c_n := s_{2n}$  としたとき、 $\{b_n\}$  は単調減少数列で  $s_2$  を下界に持ち、 $\{c_n\}$  は単調増加数列  $s_1$  を上界に持つ (これらのことのチェックは自分でやってみよう)。

ゆえに  $\{b_n\}$  も  $\{c_n\}$  も極限を持つ。それらをそれぞれ  $b, c$  とおくと、

$$\begin{aligned} b - c &= \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n-1} - \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_{2n-1} - s_{2n}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (-(-1)^{2n-1} a_{2n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = 0. \end{aligned}$$

ゆえに  $b = c$ . これを  $s$  とおくと、 $\{b_n\} = \{s_{2n-1}\}$  も  $\{c_n\} = \{s_{2n}\}$  も  $s$  に収束するので、 $\{s_n\}$  は  $s$  に収束する。 □

## 2.5 Leibniz の判定基準の証明

後始末

「これらのことのチェックは自分でやってみよう」を練習問題3 (<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/kaiseki/ren3.pdf>) とする。

## 2.6 数列の無限大への発散, 定義

$\lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$  を考えよう。

## 2.6 数列の無限大への発散, 定義

$\lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$  を考えよう。「 $n$  を  $\infty$  に近づけると、 $n$  は  $\infty$  に近づく」というと当たり前のようにだけど、そうではない。

## 2.6 数列の無限大への発散, 定義

$\lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$  を考えよう。「 $n$  を  $\infty$  に近づけると、 $n$  は  $\infty$  に近づく」というと当たり前のようにだけど、そうではない。

数列が  $\infty$  に発散するというのを定義する必要がある。

### 定義 5.1 (数列の $\infty$ , $-\infty$ への発散)

$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  を数列とする。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} (\forall U \in \mathbb{R})(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N) \quad a_n > U,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} (\forall L \in \mathbb{R})(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N) \quad a_n < L.$$

それぞれ、 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  は  $\infty$  に発散する、 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  は  $-\infty$  に発散する、という。

## 2.6 数列の無限大への発散

$\lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$  の証明

任意の実数  $U$  に対して、アルキメデスの公理から、 $N > U$  を満たす  $N \in \mathbb{N}$  が存在する。(  $a = 1$ ,  $b = |U| + 1$  とおくと、 $N \cdot 1 > |U| + 1$  を満たす  $N \in \mathbb{N}$  が存在する。  $|U| + 1 > |U| \geq U$  であるから  $N > U$ .)。

このとき  $n \geq N$  を満たす任意の  $n \in \mathbb{N}$  に対し

$$a_n = n \geq N > U.$$

ゆえに  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ . すなわち  $\lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$ . □

## 2.6 数列の無限大への発散

$\infty$  は数？

$\infty$  は数だろうか？



## 2.6 数列の無限大への発散

$\infty$  は数？

### $\infty$ は数だろうか？

まず  $\infty$  は実数ではない。  $\infty \notin \mathbb{R}$ .

## 2.6 数列の無限大への発散

$\infty$  は数？

### $\infty$ は数だろうか？

まず  $\infty$  は実数ではない。  $\infty \notin \mathbb{R}$ .

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$  のとき、「 $\infty$  に収束する」ではなく「 $\infty$  に発散する」。

そもそも発散の定義の条件式の中に  $\infty$  は現れない。モノ (集合の要素) ですらない。

## 2.6 数列の無限大への発散

$\infty$  は数？

### $\infty$ は数だろうか？

まず  $\infty$  は実数ではない。  $\infty \notin \mathbb{R}$ .

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$  のとき、「 $\infty$  に収束する」ではなく「 $\infty$  に発散する」。

そもそも発散の定義の条件式の中に  $\infty$  は現れない。モノ (集合の要素) ですらない。

一方、 $\infty$  や  $-\infty$  を (数ではないが) モノと考えて、 $\mathbb{R}$  と  $\infty$ ,  $-\infty$  を合わせた集合  $\mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$  を考えることもある。

- $\mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$  は**補完実数直線** (the extended real line) とよぶ。
- この場合は  $\infty$  に収束と言うこともある。
- $\mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$  はもはや体ではない。取り扱い注意が必要である。
- $\mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$  を考えるのは、それほど標準的ではない。この講義ではその立場は採らないことにする。

## 2.7 等比数列がらみの極限

$$\textcircled{1} \quad 0 < r < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$$

$$\textcircled{2} \quad 0 < r < 1 \text{ かつ } k \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} n^k r^n = 0$$

## 2.7 等比数列がらみの極限

$$\textcircled{1} \quad 0 < r < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$$

$$\textcircled{2} \quad 0 < r < 1 \text{ かつ } k \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} n^k r^n = 0$$

(1) の証明。  $h = \frac{1}{r} - 1$  とおくと、  $h > 0$ ,  $\frac{1}{r} = 1 + h$  であるから、

$$\frac{1}{r^n} = (1 + h)^n = 1 + nh + \cdots \geq nh. \quad \text{ゆえに} \quad 0 < r^n \leq \frac{1}{nh} \rightarrow 0.$$

はさみ打ちの原理によって、  $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$ .

## 2.7 等比数列がらみの極限

$$\textcircled{1} \quad 0 < r < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$$

$$\textcircled{2} \quad 0 < r < 1 \text{ かつ } k \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} n^k r^n = 0$$

(1) の証明。  $h = \frac{1}{r} - 1$  とおくと、  $h > 0$ ,  $\frac{1}{r} = 1 + h$  であるから、

$$\frac{1}{r^n} = (1 + h)^n = 1 + nh + \dots \geq nh. \quad \text{ゆえに } 0 < r^n \leq \frac{1}{nh} \rightarrow 0.$$

はさみ打ちの原理によって、  $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$ .

(2) も同様に出来る。  $k = 1$  なら

$$\frac{1}{r^n} = (1 + h)^n = 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2 + \dots \geq \frac{n(n-1)}{2}h^2 \sim \frac{h^2}{2}n^2.$$

きちんとやると:  $\frac{1}{r^n} \geq Cn^2$ , すなわち  $r^n \leq \frac{1}{Cn^2}$  を満たす  $C$  が存在する。ゆえに

$$0 < nr^n \leq n \cdot \frac{1}{Cn^2} = \frac{1}{Cn} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

ゆえに  $\lim_{n \rightarrow \infty} nr^n = 0$ .  $k > 1$  の場合も同様 (講義ノート [1] 問 36, 解答 p. 130).

### 3 関数の極限 — $\varepsilon$ - $\delta$ 論法と連続関数の基本的な性質

連続的に変化する変数の関数についての極限について論じよう。

(これまでは  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  で、ここでは  $f(x)$ ,  $x \in I \subset \mathbb{R}$ )

極限の定義も、それにまつわる議論も、 $\varepsilon$ - $\delta$  論法を用いてなされる。

## 3.1 関数の極限の定義と基本的な性質

### 区間の閉包 $\bar{I}$

$\mathbb{R}$  の区間  $I$  に対して、その端点を加えた集合を  $\bar{I}$  と表す。



## 3.1 関数の極限の定義と基本的な性質

### 区間の閉包 $\bar{I}$

$\mathbb{R}$  の区間  $I$  に対して、その端点を加えた集合を  $\bar{I}$  と表す。つまり

- $I = (\alpha, \beta), (\alpha, \beta], [\alpha, \beta), [\alpha, \beta]$  (ここで  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha < \beta$  とする) の場合は  $\bar{I} = [\alpha, \beta]$
- $I = (\alpha, \infty), [\alpha, \infty)$  (ここで  $\alpha \in \mathbb{R}$ ) の場合は  $\bar{I} = [\alpha, \infty)$
- $I = (-\infty, \beta), (-\infty, \beta]$  (ここで  $\beta \in \mathbb{R}$ ) の場合は  $\bar{I} = (-\infty, \beta]$
- $I = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$  の場合は  $\bar{I} = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$  (端の点は存在しないので変わらない)

## 3.1 関数の極限の定義と基本的な性質

### 区間の閉包 $\bar{I}$

$\mathbb{R}$  の区間  $I$  に対して、その端点を加えた集合を  $\bar{I}$  と表す。つまり

- $I = (\alpha, \beta), (\alpha, \beta], [\alpha, \beta), [\alpha, \beta]$  (ここで  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha < \beta$  とする) の場合は  $\bar{I} = [\alpha, \beta]$
- $I = (\alpha, \infty), [\alpha, \infty)$  (ここで  $\alpha \in \mathbb{R}$ ) の場合は  $\bar{I} = [\alpha, \infty)$
- $I = (-\infty, \beta), (-\infty, \beta]$  (ここで  $\beta \in \mathbb{R}$ ) の場合は  $\bar{I} = (-\infty, \beta]$
- $I = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$  の場合は  $\bar{I} = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$  (端の点は存在しないので変わらない)

$\bar{I}$  のようなものを考えるのは、

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \log x = 0$$

のような例を扱いたいからである。

## 3.1 関数の極限の定義と基本的な性質

### 区間の閉包 $\bar{I}$

$\mathbb{R}$  の区間  $I$  に対して、その端点を加えた集合を  $\bar{I}$  と表す。つまり

- $I = (\alpha, \beta), (\alpha, \beta], [\alpha, \beta), [\alpha, \beta]$  (ここで  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha < \beta$  とする) の場合は  $\bar{I} = [\alpha, \beta]$
- $I = (\alpha, \infty), [\alpha, \infty)$  (ここで  $\alpha \in \mathbb{R}$ ) の場合は  $\bar{I} = [\alpha, \infty)$
- $I = (-\infty, \beta), (-\infty, \beta]$  (ここで  $\beta \in \mathbb{R}$ ) の場合は  $\bar{I} = (-\infty, \beta]$
- $I = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$  の場合は  $\bar{I} = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$  (端の点は存在しないので変わらない)

$\bar{I}$  のようなものを考えるのは、

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \log x = 0$$

のような例を扱いたいからである。関数  $x \log x$  の定義域は  $I := (0, \infty)$  であり、 $0$  は  $I$  に含まれないが、 $\bar{I}$  には含まれることに注意しよう。

# 3.1 関数の極限の定義と基本的な性質

## 関数の極限

### 定義 5.2 (関数の極限)

$I$  が  $\mathbb{R}$  の区間、 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in \bar{I}$ ,  $A \in \mathbb{R}$  とする。 $x \rightarrow a$  のとき  $f(x)$  が  $A$  に**収束する** ( $f(x) \rightarrow A$ ) とは、

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in I : |x - a| < \delta) \quad |f(x) - A| < \varepsilon$$

が成り立つことをいう。

# 3.1 関数の極限の定義と基本的な性質

## 関数の極限

### 定義 5.2 (関数の極限)

$I$  が  $\mathbb{R}$  の区間、 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in \bar{I}$ ,  $A \in \mathbb{R}$  とする。 $x \rightarrow a$  のとき  $f(x)$  が  $A$  に**収束する** ( $f(x) \rightarrow A$ ) とは、

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in I : |x - a| < \delta) \quad |f(x) - A| < \varepsilon$$

が成り立つことをいう。

これを満たす  $A$  は存在するならば一つしかないので (これは数列の場合と同様に証明される)、 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  という記号で表し、 $x \rightarrow a$  のときの  $f(x)$  の**極限**と呼ぶ。

(本当は、 $I$  を区間に限るのは良くない。どうすれば良いかは、そのうち自然に分かるので、今はゆるくやっておく。)

## 3.1 関数の極限の定義と基本的な性質

$x \rightarrow \infty$  と  $f(x) \rightarrow \infty$

$f(x) \rightarrow \infty$  は次のように定義される (数列のときと少し似ている)。

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} (\forall U \in \mathbb{R})(\exists \delta > 0)(\forall x \in I : |x - a| < \delta) \quad f(x) > U.$$

## 3.1 関数の極限の定義と基本的な性質

$x \rightarrow \infty$  と  $f(x) \rightarrow \infty$

$f(x) \rightarrow \infty$  は次のように定義される (数列のときと少し似ている)。

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} (\forall U \in \mathbb{R})(\exists \delta > 0)(\forall x \in I : |x - a| < \delta) \quad f(x) > U.$$

$I = (a, \infty)$  や  $I = [a, \infty)$  の場合は、 $x \rightarrow \infty$  というのも考えられる。

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} (\forall \varepsilon > 0)(\exists R \in \mathbb{R})(\forall x \in I : x > R) \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

## 3.1 関数の極限の定義と基本的な性質

$x \rightarrow \infty$  と  $f(x) \rightarrow \infty$

$f(x) \rightarrow \infty$  は次のように定義される (数列のときと少し似ている)。

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} (\forall U \in \mathbb{R})(\exists \delta > 0)(\forall x \in I : |x - a| < \delta) \quad f(x) > U.$$

$I = (a, \infty)$  や  $I = [a, \infty)$  の場合は、 $x \rightarrow \infty$  というのも考えられる。

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} (\forall \varepsilon > 0)(\exists R \in \mathbb{R})(\forall x \in I : x > R) \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

次はどう定義するか、分かりますか？

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$$



## 3.1 関数の極限の定義と基本的な性質

$x \rightarrow \infty$  と  $f(x) \rightarrow \infty$

$f(x) \rightarrow \infty$  は次のように定義される (数列のときと少し似ている)。

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} (\forall U \in \mathbb{R})(\exists \delta > 0)(\forall x \in I : |x - a| < \delta) \quad f(x) > U.$$

$I = (a, \infty)$  や  $I = [a, \infty)$  の場合は、 $x \rightarrow \infty$  というのも考えられる。

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} (\forall \varepsilon > 0)(\exists R \in \mathbb{R})(\forall x \in I : x > R) \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

次はどう定義するか、分かりますか？

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} (\forall U \in \mathbb{R})(\exists R \in \mathbb{R})(\forall x \in I : x > R) \quad f(x) > U.$$

## 3.1 関数の極限の定義と基本的な性質

### 重要な例 (あるいは補題)

- ①  $f(x) = c$  (定数関数) の場合に  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$  となること。

## 3.1 関数の極限の定義と基本的な性質

### 重要な例 (あるいは補題)

- ①  $f(x) = c$  (定数関数) の場合に  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$  となること。

$$|f(x) - c| = |c - c| = |0| = 0 < \varepsilon$$

であるから  $\delta$  はなんでも良い。例えば  $\delta = 1$  で OK.

## 3.1 関数の極限の定義と基本的な性質

### 重要な例 (あるいは補題)

- ①  $f(x) = c$  (定数関数) の場合に  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$  となること。

$$|f(x) - c| = |c - c| = |0| = 0 < \varepsilon$$

であるから  $\delta$  はなんでも良い。例えば  $\delta = 1$  で OK.

ちゃんと証明を書くと、「 $\varepsilon$  を任意の正の数とする。 $\delta := 1$  とおくと、 $\delta > 0$  であり、 $|x - a| < \delta$  を満たす任意の  $x \in \mathbb{R}$  に対して、

$$|f(x) - c| = |c - c| = |0| = 0 < \varepsilon$$

より、 $|f(x) - c| < \varepsilon$ . ゆえに  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$ 。」

## 3.1 関数の極限の定義と基本的な性質

### 重要な例 (あるいは補題)

- ①  $f(x) = c$  (定数関数) の場合に  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$  となること。

$$|f(x) - c| = |c - c| = |0| = 0 < \varepsilon$$

であるから  $\delta$  はなんでも良い。例えば  $\delta = 1$  で OK.

ちゃんと証明を書くと、「 $\varepsilon$  を任意の正の数とする。 $\delta := 1$  とおくと、 $\delta > 0$  であり、 $|x - a| < \delta$  を満たす任意の  $x \in \mathbb{R}$  に対して、

$$|f(x) - c| = |c - c| = |0| = 0 < \varepsilon$$

より、 $|f(x) - c| < \varepsilon$ . ゆえに  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$ .」

- ②  $f(x) = x$  の場合に、任意の実数  $a$  に対して  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a$  となること。

# 3.1 関数の極限の定義と基本的な性質

## 重要な例 (あるいは補題)

- ①  $f(x) = c$  (定数関数) の場合に  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$  となること。

$$|f(x) - c| = |c - c| = |0| = 0 < \varepsilon$$

であるから  $\delta$  はなんでも良い。例えば  $\delta = 1$  で OK.

ちゃんと証明を書くと、「 $\varepsilon$  を任意の正の数とする。 $\delta := 1$  とおくと、 $\delta > 0$  であり、 $|x - a| < \delta$  を満たす任意の  $x \in \mathbb{R}$  に対して、

$$|f(x) - c| = |c - c| = |0| = 0 < \varepsilon$$

より、 $|f(x) - c| < \varepsilon$ . ゆえに  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$ .」

- ②  $f(x) = x$  の場合に、任意の実数  $a$  に対して  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a$  となること。

$$|f(x) - a| = |x - a| < \delta$$

であるから  $\delta = \varepsilon$  とすれば OK.

## 3.1 関数の極限の定義と基本的な性質

### 重要な例 (あるいは補題)

- ①  $f(x) = c$  (定数関数) の場合に  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$  となること。

$$|f(x) - c| = |c - c| = |0| = 0 < \varepsilon$$

であるから  $\delta$  はなんでも良い。例えば  $\delta = 1$  で OK。

ちゃんと証明を書くと、「 $\varepsilon$  を任意の正の数とする。  $\delta := 1$  とおくと、  $\delta > 0$  であり、  $|x - a| < \delta$  を満たす任意の  $x \in \mathbb{R}$  に対して、

$$|f(x) - c| = |c - c| = |0| = 0 < \varepsilon$$

より、  $|f(x) - c| < \varepsilon$ 。ゆえに  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$ 。」

- ②  $f(x) = x$  の場合に、任意の実数  $a$  に対して  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a$  となること。

$$|f(x) - a| = |x - a| < \delta$$

であるから  $\delta = \varepsilon$  とすれば OK。

ちゃんと書くと「 $\varepsilon$  を任意の正の数とする。  $\delta := \varepsilon$  とおくと、  $\delta > 0$  であり、  $|x - a| < \delta$  を満たす任意の  $x \in \mathbb{R}$  に対して、

$$|f(x) - a| = |x - a| < \delta = \varepsilon$$

より、  $|f(x) - a| < \varepsilon$ 。ゆえに  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a$ 。」



## 3.1 関数の極限の定義と基本的な性質

個人的な意見

テキストによっては、ここで練習として色々な関数でやってみるものもある。例えば  $f(x) = x^2$  について、

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \quad (\text{つまり } \lim_{x \rightarrow a} x^2 = a^2)$$

が成り立つことなど。



## 3.1 関数の極限の定義と基本的な性質

### 個人的な意見

テキストによっては、ここで練習として色々な関数でやってみるものもある。例えば  $f(x) = x^2$  について、

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \quad (\text{つまり } \lim_{x \rightarrow a} x^2 = a^2)$$

が成り立つことなど。そういうことは程々にしておいて、次に紹介する定理 (関数の和・差・積・商の極限) を使いこなせるようになることが大事。

### 定理を使った解答

## 3.1 関数の極限の定義と基本的な性質

### 個人的な意見

テキストによっては、ここで練習として色々な関数でやってみるものもある。例えば  $f(x) = x^2$  について、

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \quad (\text{つまり } \lim_{x \rightarrow a} x^2 = a^2)$$

が成り立つことなど。そういうことは程々にしておいて、次に紹介する定理 (関数の和・差・積・商の極限) を使いこなせるようになることが大事。

定理を使った解答  $F(x) = x, g(x) = x$  とおくと、

$$f(x) = x^2 = F(x)g(x)$$

であるから、

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} F(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow a} F(x) \lim_{x \rightarrow a} g(x) = a \cdot a = a^2 = f(a).$$

— これは簡単。具体的な関数で考える方が簡単とは限らない。

# 3.1 関数の極限の定義と基本的な性質

## 関数の和、差、積、商の極限

### 命題 5.3 (関数の和、差、積、商の極限)

$I$  は  $\mathbb{R}$  の区間、 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in \bar{I}$ ,  $A, B \in \mathbb{R}$  とする。

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$  のとき

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = A + B$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = A - B$$

$$\textcircled{3} \quad \lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = AB$$

$$\textcircled{4} \quad B \neq 0 \text{ ならば } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}.$$

# 3.1 関数の極限の定義と基本的な性質

## 関数の和、差、積、商の極限

### 命題 5.3 (関数の和、差、積、商の極限)

$I$  は  $\mathbb{R}$  の区間、 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in \bar{I}$ ,  $A, B \in \mathbb{R}$  とする。

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$  のとき

- ①  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = A + B$
- ②  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = A - B$
- ③  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = AB$
- ④  $B \neq 0$  ならば  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$ .

**細かい注** 関数  $\frac{f}{g}$  の定義域は  $J := \{x \in I \mid g(x) \neq 0\}$  であり、これは  $\mathbb{R}$  の区間であるとは限らないので、上で説明した極限の定義の範囲の外に出てしまうかもしれない。それと本当は、 $g(x) \neq 0$  ( $x \in I$ ) とか、 $a \in \bar{J}$  のような条件を書くべき。

## 3.1 関数の極限の定義と基本的な性質

命題 5.3 の証明の前に

大筋は数列のときと同様に証明できる。

数列のときは、和の場合、積の場合を証明したので、今回は (4) 商の場合を証明してみる。

大筋は数列のときと同様に証明できる。

数列のときは、和の場合、積の場合を証明したので、今回は (4) 商の場合を証明してみる。

証明を書き出す前に、予備的な考察をする。

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{A}{B} \right| &= \left| \frac{f(x)B - Ag(x)}{g(x)B} \right| = \left| \frac{f(x)B - AB + AB - Ag(x)}{g(x)B} \right| \\ &\leq \frac{|f(x) - A|}{|g(x)|} + \frac{|A| |B - g(x)|}{|g(x)| |B|} \end{aligned}$$

## 3.1 関数の極限の定義と基本的な性質

命題 5.3 の証明の前に

大筋は数列のときと同様に証明できる。

数列のときは、和の場合、積の場合を証明したので、今回は (4) 商の場合を証明してみる。

証明を書き出す前に、予備的な考察をする。

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{A}{B} \right| &= \left| \frac{f(x)B - Ag(x)}{g(x)B} \right| = \left| \frac{f(x)B - AB + AB - Ag(x)}{g(x)B} \right| \\ &\leq \frac{|f(x) - A|}{|g(x)|} + \frac{|A| |B - g(x)|}{|g(x)| |B|} \end{aligned}$$

分子だけを見れば  $|f(x) - A|$ ,  $|B - g(x)|$  が任意に小さい数で抑えられることは明らかである。問題は  $\frac{1}{|g(x)|}$  の評価である。

大筋は数列のときと同様に証明できる。

数列のときは、和の場合、積の場合を証明したので、今回は (4) 商の場合を証明してみる。

証明を書き出す前に、予備的な考察をする。

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{A}{B} \right| &= \left| \frac{f(x)B - Ag(x)}{g(x)B} \right| = \left| \frac{f(x)B - AB + AB - Ag(x)}{g(x)B} \right| \\ &\leq \frac{|f(x) - A|}{|g(x)|} + \frac{|A| |B - g(x)|}{|g(x)| |B|} \end{aligned}$$

分子だけを見れば  $|f(x) - A|$ ,  $|B - g(x)|$  が任意に小さい数で抑えられることは明らかである。問題は  $\frac{1}{|g(x)|}$  の評価である。

$x \rightarrow a$  のとき  $g(x) \rightarrow B$  で、 $B \neq 0$  であることを用いると、 $\frac{1}{|g(x)|}$  が適当な定数で上から抑えられる (つまり有界) ことが実は分かる。



## 命題 5.3 証明の前半 (第 1 段)

まず  $B \neq 0$  であるから  $|B| > 0$  に注意しておく。

## 命題 5.3 証明の前半 (第 1 段)

まず  $B \neq 0$  であるから  $|B| > 0$  に注意しておく。  
 $x \rightarrow a$  のとき  $g(x) \rightarrow B$  であるから、ある正の数  $\delta_1$  が存在して、

$$(\forall x \in I : |x - a| < \delta_1) \quad |g(x) - B| < \frac{|B|}{2}.$$

## 命題 5.3 証明の前半 (第 1 段)

まず  $B \neq 0$  であるから  $|B| > 0$  に注意しておく。  
 $x \rightarrow a$  のとき  $g(x) \rightarrow B$  であるから、ある正の数  $\delta_1$  が存在して、

$$(\forall x \in I : |x - a| < \delta_1) \quad |g(x) - B| < \frac{|B|}{2}.$$

このとき、

$$|g(x)| = |g(x) - B + B| \geq |B| - |g(x) - B| > |B| - \frac{|B|}{2} = \frac{|B|}{2} > 0.$$

ゆえに

$$g(x) \neq 0 \quad \text{かつ} \quad \frac{1}{|g(x)|} < \frac{2}{|B|}.$$

( $y = |g(x)|$  のグラフを描くと良いかも。)

## 命題 5.3 証明の後半 (第 2 段)

$f(x) \rightarrow A$  であるから、ある正の数  $\delta_2$  が存在して、

$$(\forall x \in I : |x - a| < \delta_2) \quad |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{\frac{2}{|B|}}.$$

また、 $g(x) \rightarrow B$  であるから、ある正の数  $\delta_3$  が存在して、

$$(\forall x \in I : |x - a| < \delta_3) \quad |g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{\frac{2|A|+1}{|B|}}.$$

## 命題 5.3 証明の後半 (第 2 段)

$f(x) \rightarrow A$  であるから、ある正の数  $\delta_2$  が存在して、

$$(\forall x \in I : |x - a| < \delta_2) \quad |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{\frac{2}{|B|}}.$$

また、 $g(x) \rightarrow B$  であるから、ある正の数  $\delta_3$  が存在して、

$$(\forall x \in I : |x - a| < \delta_3) \quad |g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{\frac{2|A|+1}{|B|}}.$$

$\delta := \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$  とおくと、 $\delta > 0$ .  $|x - a| < \delta$  を満たす任意の  $x \in I$  に対して、

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{A}{B} \right| &\leq \frac{|f(x) - A|}{|g(x)|} + \frac{|A| |g(x) - B|}{|g(x)| |B|} \\ &\leq \frac{2}{|B|} |f(x) - A| + \frac{2|A|}{|B|^2} |g(x) - B| \quad \left( \frac{1}{|g(x)|} \leq \frac{2}{|B|} \text{ を代入した} \right) \\ &< \frac{2}{|B|} \cdot \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{\frac{2}{|B|}} + \frac{2|A|}{|B|^2} \cdot \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{\frac{2|A|+1}{|B|^2}} \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{2|A|}{2|A|+1} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

ゆえに  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$ .  $\square$  (複雑と言えなくもないけれど、分かるといいな…)

# 参考文献

- [1] 桂田祐史：数学解析, <http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/kaiseki-2021/kaiseki-2021.pdf> (2014 年～).