

数学解析 第4回
～ 数列の極限 (第2回) ～

桂田 祐史

2021年5月10日

目次

- 1 本日の内容&連絡事項
- 2 数列の極限 (定義と簡単な性質) (続き)
 - 極限の性質 (続き)
 - 証明を書く順番と考える順番
 - 数列の有界性
 - $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = ab$ の証明
 - 絶対値の連続性
 - 順序の保存
 - はさみうちの原理
 - 上に有界な単調増加数列は (上限に) 収束する
- 3 問3 紹介
- 4 問2 解説
- 5 各自確認してみよう等の後始末
- 6 参考文献

連絡事項 & 本日の内容

- 緊急事態宣言の期限が延長されました。そのため、5/17, 5/24, 5/31の授業も数学解析はオンラインで行うこととなります。色々困難がありますが、落ち着いて考えて、ぜひ克服して行きましょう。
- 宿題1は100%提出、宿題2は1人をのぞき提出で、非常に良好な提出状況でした。
宿題1については大部分の人にフィードバックしました(宿題2についてもなるべく早くするように努力します)。必ずチェックして下さい。指摘したことが分からなければ質問して下さい。
- 本日の授業内容
 - 講義ノート [1] の2章「数列の極限」の部分の2回目。
 - 問2の解説を行います。
 - 宿題3を出す。締め切りは5月15日(土曜)18:00とする。
今回からは、次の授業で解答を解説するため、**5月17日9:00以降の提出は認めません。**×切がタイトになりますが、ぜひ提出して下さい。

2.3 極限の性質 (続き) 2.3.2 証明を書く順番と考える順番

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = ab$ の証明の予備的考察

証明は論理的な順番に書く。しかし証明を考えるときはそうではない。

今回は、むしろ最後のあたりから考える。

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \leq |a_n b_n - a_n b| + |a_n b - ab| \\ &= |a_n| |b_n - b| + |b| |a_n - a|. \end{aligned}$$

右辺の2項をそれぞれ $\frac{\varepsilon}{2}$ で抑えれば良いだろう。青部分は小さいはず。

- (右辺第2項) $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2|b|}$ とすれば良い? $b=0$ のときは? 工夫が要る。
- (右辺第1項) $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2|a_n|}$ とすれば良い? a_n が0にならなかったとしても、実はダメ。右辺に n が残っているとうまく行かない (☆)。

以下に紹介する「収束列は有界」という定理が問題 ☆ の解決に役立つ。

2.3.3 数列の有界性

\mathbb{R} の部分集合の有界性を定義済み。数列や関数にも有界性がある。

定義 4.1 (数列が上に有界, 下に有界, 有界)

$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は実数列とする。

- ① $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が**上に有界**とは、 $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ が上に有界なことをいう。
- ② $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が**下に有界**とは、 $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ が下に有界なことをいう。
- ③ $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が**有界**とは、 $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ が有界なことをいう。
すなわち $(\exists R \in \mathbb{R}) (\forall n \in \mathbb{N}) |a_n| \leq R$ が成り立つこと。

Cf. $A \subset \mathbb{R}$ とするとき、 A が有界 $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} (\exists R \in \mathbb{R}) (\forall x \in A) |x| \leq R$.

(細かい注意) 実は数列を \mathbb{N} から \mathbb{R} への関数とみなすと、関数としての有界性 (値域が有界であること) は、ここで定義した数列の有界性と一致する。

2.3.3 数列の有界性 収束列は有界

命題 4.2 (収束列は有界)

$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が収束列ならば、 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は有界である。

証明.

$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が収束列であるので、ある $a \in \mathbb{R}$ が存在して、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. ゆえに
ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して、

$$(\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N) \quad |a_n - a| < 1.$$

(数列の収束の定義の条件の ε として、1 を選んだ。)

$$R := \max \{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{N-1}|, 1 + |a|\}$$

とおくと、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、 $|a_n| \leq R$ が成り立つ。実際 $n < N$ のとき
(定義からすぐ) $|a_n| \leq R$ であり、 $n \geq N$ のとき

$$|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a| \leq R.$$

2.3.4 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = ab$ の証明

$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = ab$ を証明しよう。

$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は収束列であるから、(命題 4.2 より) ある実数 R が存在して

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |a_n| \leq R.$$

ε を任意の正の数とする。 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ であるから、ある $N_1 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$(♯) \quad (\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N_1) \quad |a_n - a| \leq \frac{\varepsilon}{2(|b| + 1)}.$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ であるから、ある $N_2 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$(b) \quad (\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N_2) \quad |b_n - b| \leq \frac{\varepsilon}{2(R + 1)}.$$

$N := \max\{N_1, N_2\}$ とおくと、 $n \geq N$ を満たす任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、(♯), (b) が成り立つので、

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \leq |a_n b_n - a_n b| + |a_n b - ab| \\ &= |a_n| |b_n - b| + |b| |a_n - a| \leq R |b_n - b| + |b| |a_n - a| \\ &\leq R \cdot \frac{\varepsilon}{2(R + 1)} + |b| \cdot \frac{\varepsilon}{2(|b| + 1)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

ゆえに $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = ab$.

□

2.3.4 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = ab$ の証明 反省 (気になる人向け, 問題 ☆ の解決)

- $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2|b|}$ とすると、 $b = 0$ のとき困る。それを避けるため、上の証明では $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2(|b|+1)}$ とした。すると

$$|b| |a_n - a| < |b| \cdot \frac{\varepsilon}{2(|b|+1)} = \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{|b|}{|b|+1} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

0 以上の任意の数 r に対して、 $\frac{r}{r+1} < 1$ が成り立つことに注意。

(別法: $b = 0$ と $b \neq 0$ で場合分けして処理するという方法もある。 $b \neq 0$ のときは $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2|b|}$ として良いし、 $b = 0$ のときは $|b| |a_n - a| = 0$ であるから $|b| |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ は無条件に成り立つ。)

- p. 3 問題 ☆ の解決法。まず $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ の有界性を使って $|a_n| \leq R$ と抑えて

$$|a_n| |b_n - b| \leq R |b_n - b|$$

と評価しておいて、 $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2(R+1)}$ を目標としている。この右辺は n に依らない正の数であるから、収束の定義の条件の ε に出来る。

2.3.5 絶対値の連続性

命題 4.3 (絶対値の連続性)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \text{ ならば、 } \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|.$$

一般に次の不等式が成り立つ。

$$(1) \quad \left| |a| - |b| \right| \leq |a - b|$$

この証明は各自考えてもらう (この PDF の最後につける)。これを使えば簡単。

証明.

ε を任意の正の数とする。 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ であるから、ある自然数 N が存在して、

$$(\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N) \quad |a_n - a| < \varepsilon.$$

このとき、

$$\left| |a_n| - |a| \right| \leq |a_n - a| < \varepsilon.$$

ゆえに $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$.

□

(初めはここはスキップしても良い。)

$f(x) := |x|$ とおくと、上の定理は

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(a)$$

と書ける。後で学ぶ関数の連続性について学ぶが、これは f が連続であることを意味する。つまり上の定理は、実数にその絶対値を対応させる関数が連続である、という内容である。

2.3.6 順序の保存

命題 4.4 ($a_n \leq b_n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$)

実数列 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ がそれぞれ a , b に収束し、また $(\forall n \in \mathbb{N}) a_n \leq b_n$ が成り立つならば、 $a \leq b$.

証明.

背理法を用いる。 $a > b$ と仮定すると、 $a - b > 0$. $\varepsilon := \frac{a-b}{3}$ とおくと、 $\varepsilon > 0$. 十分大きな n に対して $|a_n - a| < \varepsilon$ かつ $|b_n - b| < \varepsilon$ (少し端折った). このとき

$$-\varepsilon < a_n - a < \varepsilon \wedge -\varepsilon < b_n - b < \varepsilon.$$

ゆえに

$$a_n > a - \varepsilon = (b + 3\varepsilon) - \varepsilon = b + 2\varepsilon > b_n + \varepsilon > b_n.$$

これは矛盾である。ゆえに $a \leq b$. □

注意 (仮定を $a_n < b_n$ にしても結果は $a < b$ にならない) $(\forall n \in \mathbb{N}) a_n < b_n$ が成り立つとき、つねに $a \leq b$ は成り立つが、 $a < b$ は必ずしも成り立たない。例えば $a_n := 1 - 1/n$, $b_n := 1 + 1/n$ のとき、 $a_n < b_n$ ($n \in \mathbb{N}$) であるが $a = b = 1$.

2.3.7 はさみうちの原理

命題 4.5 (はさみうちの原理)

数列 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad a_n \leq b_n \leq c_n$$

を満たし、 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ と $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が $A \in \mathbb{R}$ に収束するならば

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A.$$

この証明は比較的簡単なので省略する (本日の宿題)。

ここまでの振り返りと、これ以降の議論の対比

§3 までは、**定理の仮定の中に数列が収束するという条件があり**、その極限が結論部分にも登場した。

一方、極限の存在を仮定せず、他の条件から**極限の存在を導く**定理があり、これ以降いくつか紹介する。**非常に重要である。**

極限の存在を保証するための要点は、**実数の連続性** (我々の場合は Weierstrass の上限公理) である。

2.4 上に有界な単調増加数列は (上限に) 収束する

命題 4.6 (上に有界な単調増加数列は (上限に) 収束する)

数列 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が

$$(1) (\exists U \in \mathbb{R}) (\forall n \in \mathbb{N}) a_n \leq U \quad (2) (\forall n \in \mathbb{N}) a_n \leq a_{n+1}$$

を満たすならば

$$(\exists a \in \mathbb{R}) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$

実は、 a は $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ の上限である。

証明.

仮定 (1) より、集合 $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ が上に有界であるから、その上限 S が存在する (\because 上限公理)。

$$(i) (\forall n \in \mathbb{N}) a_n \leq S. \quad (ii) (\forall \varepsilon > 0) (\exists N \in \mathbb{N}) S - \varepsilon < a_N.$$

このとき $n \geq N$ を満たす任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、(仮定 (1)) を用いて

$$S - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq S$$

であるから $-\varepsilon < a_n - S \leq 0$. ゆえに $|a_n - S| < \varepsilon$. これは $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = S$ を意味する。ゆえに $a := S$ とすれば良い。 □

2.4 上に有界な単調増加数列は(上限に)収束する

上の定理を使うのは割と簡単、応用たくさん、というのを納得してもらいたい。

例 4.7 (ルート 3)

$x^2 = 3$ を満たす正の数 x (つまりは $\sqrt{3}$) の存在を示したい。

$\sqrt{3}$ を素朴に、1桁ずつ求めていく手順を考える。

$1.7^2 \leq 3 < 1.8^2$ である。 $a_1 := 1.7$ とおく。

$1.73^2 \leq 3 < 1.74^2$ である。 $a_2 := 1.73$ とおく。

$1.732^2 \leq 3 < 1.733^2$ である。 $a_3 := 1.732$ とおく。

$1.7320^2 \leq 3 < 1.7321^2$ である。 $a_4 := 1.7320$ とおく。

以下順にすべての $n \in \mathbb{N}$ に対して a_n が定義できる。(直感的には、小数点以下第 n 位まで“求めた”数。)

$\{a_n\}$ は上に有界 (上界として 1.8 が取れる) であり、単調増加であるから、 $\{a_n\}$ は収束する。 $x := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ とおく。

$$a_n^2 \leq 3 < \left(a_n + \frac{1}{10^n}\right)^2$$

に注意すると $x^2 = 3$ を満たすことが分かる (なぜ? この PDF の最後に載せておく)。

2.4 上に有界な単調増加数列は(上限に)収束する

例 4.8 (自然対数の底 e)

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ (つまり自然対数の底 e) の存在を示そう。これは

$$s_n := \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$$

で定義される $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が収束するということである。

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \\ &= 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - (1/2)^n}{1 - 1/2} \leq 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - 1/2} = 3 \end{aligned}$$

であるから $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は上に有界である。一方、

$$s_{n+1} - s_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$$

であるから $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は単調増加数列である。ゆえに $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は収束する。

問3 紹介

問題文は

<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/kaiseki/toi3.pdf>

締め切りは5月15日(土) 18:00. 提出は Oh-o! Meiji のレポート・システムを使う。

次回授業動画で解答を説明する。動画は5月17日(月)9:00 少し過ぎに公開予定。9:00 以降の宿題提出は受け付けない。

注意 極限に関する定理は、色々な本に解説(証明含む)が載っていて、そういうものを参考にしてもらって構わない。しかし、時々かなり省略したり端折った説明があり、そういうものを無批判に写さないこと。例えば「 ε は任意なので」は禁句(その辺は次回詳しく解説する)。

問2 解説

これは動画で説明する (必要なことは自分の手で写しましょう、というつもり)。

5 後始末 (1) $||a| - |b|| \leq |a - b|$ の1つの証明

証明 三角不等式から

$$|a| = |a - b + b| \leq |a - b| + |b|$$

であるから

$$(\#) \quad |a| - |b| \leq |a - b|.$$

a と b を入れ替えると

$$|b| - |a| \leq |b - a| = |a - b|.$$

-1 をかけて

$$(b) \quad |a| - |b| \geq -|a - b|.$$

($\#$) と (b) をまとめると

$$-|a - b| \leq |a| - |b| \leq |a - b|.$$

これは $||a| - |b|| \leq |a - b|$ と同値である。

□

5 後始末 (2) p. 18 の極限 x が $x^2 = 3$ を満たすことの証明

(きちんとやるのは、それなりに手間がかかる。気になる人向け。)

$$(\heartsuit) \quad a_n^2 \leq 3 < \left(a_n + \frac{1}{10^n}\right)^2$$

から、 $x := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ が $x^2 = 3$ を満たすことを導こう。まず

$$0 < \frac{1}{10^n} < \frac{1}{n}$$

と挟み撃ちの原理から $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{10^n} = 0$. ゆえに

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_n + \frac{1}{10^n}\right) = x.$$

ゆえに不等式 (\heartsuit) の左辺、右辺の極限は

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^2 = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n\right)^2 = x^2, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_n + \frac{1}{10^n}\right)^2 = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_n + \frac{1}{10^n}\right)\right)^2 = x^2.$$

順序が保存されることから

$$x^2 \leq 3 \leq x^2.$$

これから $x^2 = 3$.

□

参考文献

- [1] 桂田祐史：数学解析, <http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/kaiseki-2021/kaiseki-2021.pdf> (2014 年～).