

2014 年度 画像処理とフーリエ変換 期末試験問題

2015 年 1 月 30 日 (金) 16:00~17:00 施行

担当 桂田 祐史

ノート等持ち込み禁止, 解答用紙のみ提出

以下、 i は虚数単位, \mathbb{Z} は整数全体の集合, \mathbb{C} は複素数全体の集合を表す。

- 問 1.** (1) 周期 2π の区分的に滑らかな関数 f の Fourier 係数 ($f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ を成り立たせる a_n, b_n のこと) を f を用いて表せ (結果だけで良い)。
 (2) $f(x) = |x|$ ($-\pi \leq x \leq \pi$) を満たす周期 2π の関数 f の Fourier 級数を求めよ。

- 問 2.** 正数 a に対して、関数 f を $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a} & (|x| < a) \\ 0 & (|x| > a) \end{cases}$ で定めるとき、以下の間に答えよ。

- (1) f の Fourier 変換 $\mathcal{F}f(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi} dx$ ($\xi \in \mathbb{R}$) を求めよ。
 (2) $g := \mathcal{F}f$ とおくとき、 g の Fourier 変換 $\mathcal{F}g$ を求めよ。

- 問 3.** 数列 $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ の離散時間 Fourier 変換を $\mathcal{F}f(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)e^{-in\omega}$ ($\omega \in \mathbb{R}$) で、また数列 $f, g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ の畳み込み $f * g$ を $f * g(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(n-k)g(k)$ ($n \in \mathbb{Z}$) で定めるとき、 $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}f\mathcal{F}g$ が成り立つことを示せ。

- 問 4.** 次の (4A), (4B) のいずれか一方を選択して解答せよ。

- (4A) Fourier 変換 (定義は問 2 中に記したもの) に関する公式 $\mathcal{F}[f'(x)](\xi) = (i\xi)\mathcal{F}f(\xi)$ を示せ。ただし f はその導関数 f' とともに遠方で十分速く減衰する滑らかな関数とする。
 (4B) 離散時間 Fourier 変換の反転公式 ($f(n)$ を $\mathcal{F}f(\omega)$ で表す) を求めよ。公式を書くだけでなく、それが正しいことを示せ。(ただし級数は良い収束をすることを仮定する。具体的には $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |f(n)| < \infty$.)

- 問 5.** (以下、時間の単位は秒、周波数の単位は Hz で記述する。) 周期が $T = 10$ の音声信号 $f(t)$ を、サンプリング周波数 $F_s = 44100$ でサンプリングした離散信号 $\{f_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ があるとする。

- (1) $\{f_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ は周期数列であるが、その周期 N を (数値で) 求めよ。
 (2) f の Fourier 級数展開 $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n t / T}$ の係数 c_n を f を用いた式で表せ。また Fourier 級数の第 n 項 $c_n e^{2\pi i n t / T}$ の周波数を求めよ。
 (3) f の Fourier 係数 c_n と離散 Fourier 係数 $C_n = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_j \omega^{-nj}$ ($\omega := e^{2\pi i / N}$) との関係性を求めよ。
 (4) 「 f が F_{\max} 以上の周波数成分を含まないならば、離散 Fourier 係数を用いて、元の信号が完全に復元できる」— これ成り立つための、 F_{\max} に関する条件を述べよ。
 (3), (4) については結果だけ書いても中間点を与える。

1. (1)

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad (n = 1, 2, \dots).$$

(2) f は偶関数であるから $b_n = 0$ はすぐに分かる。 $n \neq 0$ であれば

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} |x| \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\left[x \frac{\sin nx}{n} \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 1 \cdot \frac{\sin nx}{n} dx \right) = \frac{2}{\pi} \left[\frac{\cos nx}{n^2} \right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \\ &= \begin{cases} -\frac{4}{n^2\pi} & (n \text{ が奇数}) \\ 0 & (n \neq 0, n \text{ が偶数}). \end{cases} \end{aligned}$$

また

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(0 \cdot x) \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \, dx = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi^2}{2} = \pi.$$

これから

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right).$$

(f は連続かつ区分的 C^1 級だから、 \mathbb{R} 上で一様収束する。) ■

講評

(1) 間違えたら得点なし (いざとなったら、その場で導出できるように教えておいたので、あやふやだと思ったら、それをやって欲しい)。 a_n についても $n \in \mathbb{N}$ と書く人がいたけれど、もしそうしたら a_0 の式を別に書くべきである。

(2) 宿題に出したのだけど...

- a_n ($n \in \mathbb{N}$) と a_0 を別に計算することになると思うが、それがはっきり分かるように書くべきだろう。 a_n と書くときは、何も書かなくても $n \neq 0$ とみなして欲しい人がいるようだけど、それは無理。まあ、でもあまりうるさいことを言うと、点が低くなるので、ここでは減点しないことにした。
- a_n, b_n の計算は正しくても、 $f(x) =$ の式を間違えた人がいて、それは減点。
- 部分積分を間違えた人もいた。
- f が偶関数のとき、 $f(x) \cos nx$ は偶関数だから、 $a_n = 2 \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = 2 \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$ として計算することを勧めたはずだけど、 $\int_{-\pi}^0$ を計算した人が多かった。偶関数・奇関数は頻出するのだから、素直に習得して使って欲しいところだ。

2.

(1)

$$\begin{aligned} \mathcal{F}f(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\xi} \, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a \frac{1}{2a} e^{-ix\xi} \, dx = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}a} \left[\frac{e^{-ix\xi}}{-i\xi} \right]_{x=-a}^{x=a} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}a} \frac{e^{-ia\xi} - e^{-i(-a)\xi}}{-i\xi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{ia\xi} - e^{-ia\xi}}{2i} \frac{1}{a\xi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin a\xi}{a\xi}. \end{aligned}$$

(Euler の公式 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ から得られる $\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \sin \theta$ を用いた。また、 $\int_{-a}^a e^{ibx} dx = 2a \frac{\sin(ab)}{ab}$ という形で良く出て来るので、準公式と考える方が良い。)

(2) (1) の結果と Fourier の反転公式から、

$$\mathcal{F}^*g(x) = \mathcal{F}^*\mathcal{F}f(x) = \begin{cases} f(x) & (x \text{ は } f \text{ の連続点}) \\ \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} & (x \text{ は } f \text{ の不連続点}) \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2a} & (|x| < a) \\ 0 & (|x| > a) \\ \frac{1}{4a} & (x = \pm a). \end{cases}$$

公式 $\mathcal{F}g(\xi) = \mathcal{F}^*g(-\xi)$ より

$$\mathcal{F}g(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{2a} & (|-\xi| < a) \\ 0 & (|-\xi| > a) \\ \frac{1}{4a} & (-\xi = \pm a) \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2a} & (|\xi| < a) \\ 0 & (|\xi| > a) \\ \frac{1}{4a} & (\xi = \pm a). \blacksquare \end{cases}$$

講評

(1) ● 厳密には $\xi \neq 0$ と $\xi = 0$ の場合を分けて考えるべきである。 $\xi = 0$ の場合は $\mathcal{F}f(0) =$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a \frac{1}{2a} \cdot 1 dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

であるから、 $\mathcal{F}f(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin a\xi}{a\xi} & (\xi \neq 0) \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} & (\xi = 0). \end{cases}$... まあ、でも

それはやらないでも良いことにする ($\xi \rightarrow 0$ の極限になっているし、(2) でも有限個の例外点は大目に見ている。)。

● 結果が \sin にならず、 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{e^{ia\xi} - e^{-ia\xi}}{2ia\xi}$ のままだとさすがに減点する。

(2) 質問の仕方を変えてはいるけれど、もともと宿題とほぼ同じ問題である。ところが混乱した人が少なくなかった。

● 上の解答は不連続点のことを書いておいたが、そういう有限個の例外点を除いてもとの関数 $f(x)$ に等しく、 $\mathcal{F}g(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{2a} & (|\xi| < a) \\ 0 & (|\xi| > a) \end{cases}$ だけ書いても構わない。

● $\mathcal{F}g(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{2a} & (|x| < a) \\ 0 & (|x| > a) \\ \frac{1}{4a} & (x = \pm a). \blacksquare \end{cases}$ のようなアンバランスな式を書いた人が多い (右辺と左辺で

変数が違うのは変である。両方とも ξ とか、両方共 x とか、文字自体は他と衝突しない限り何でも良いけれど、揃えないとだめ)。得点半分 (本来は0点だろう)。

● ξ が書けなくて ε みたいになっている人が多かったけれど、もちろん、たとえ ε にしても構わない (変数を表す文字の選択は自由だ)。でも ξ は書けるようになっておこう。ネットで「ギリシャ文字 書き方」を検索する。 ■

3. 離散時間 Fourier 変換の定義式に、畳み込みの定義式を代入し、和の順序を交換すると、

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f * g](\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f * g(n)e^{-in\omega} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(n-k)g(k)e^{-in\omega} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n-k)e^{-in\omega} \right) g(k).\end{aligned}$$

$m = n - k$ とおくと $e^{-in\omega} = e^{-i(m+k)\omega} = e^{-im\omega}e^{-ik\omega}$ であるから

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f * g](\omega) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m)e^{-im\omega}e^{-ik\omega} \right) g(k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m)e^{-im\omega} \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k)e^{-ik\omega} \\ &= \mathcal{F}f(\omega)\mathcal{F}g(\omega).\blacksquare\end{aligned}$$

講評

- 間違えた人が多かった。

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(n-k)g(k)e^{-in\omega}$$

で機械的に $n - k = \ell$ とおいて

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(n-k)g(k)e^{-in\omega} = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(\ell)g(k)e^{-i(\ell+k)\omega}$$

とするのは無理である。変数 n を ℓ に“置換”しているのに、変数変換の定義式 $n - k = \ell$ に内側の \sum の k が出て来るのはおかしい。解答のように和の順序交換をしてから、 $n - k = \ell$ によって、内側の \sum の変数 n を ℓ に“置換”するのが正しい(外側の \sum で k が定まっている。— 和 \sum でなくて、積分 \int だったら、そういうのおかしいと分かるかな?)。

- 変数を書かない人が多かったけれど、書かずに式変形することは難しいので書くべきだろう。左辺に書かないのは目をつぶったけれど、左辺と右辺で変数が違う(左辺で ξ , 右辺で ω とか— 明らかに変)のは減点。■

4A. 部分積分によって

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f'(x)](\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-ix\xi} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{R_1, R_2 \rightarrow \infty} \int_{-R_1}^{R_2} f'(x)e^{-ix\xi} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{R_1, R_2 \rightarrow \infty} \left([f(x)e^{-ix\xi}]_{-R_1}^{R_2} - \int_{-R_1}^{R_2} f(x) \cdot (-i\xi)e^{-ix\xi} dx \right) \\ &= i\xi \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{R_1, R_2 \rightarrow \infty} \int_{-R_1}^{R_2} f(x)e^{-ix\xi} dx \\ &= i\xi \mathcal{F}f(\xi).\end{aligned}$$

ここで $|f(x)e^{-ix\xi}| = |f(x)|$ であるから、 $f(x) \rightarrow 0$ ($x \rightarrow \pm\infty$) であれば、 $[f(x)e^{-ix\xi}]_{-R_1}^{R_2} \rightarrow 0$ ($R_1, R_2 \rightarrow \infty$) であることを用いた。■

講評 部分積分を間違えた人が複数いた(うっかりすると間違いやすいけれど、だから逆にうっかりしてはいけないと思う。公式を脇に書いて、簡単な関数を代入してチェックするくらいすべきだ。)

$$\int_{-R_1}^{R_2} f'(x)e^{-ix\xi} dx = [f(x)e^{-ix\xi}]_{-R_1}^{R_2} - \int_{-R_1}^{R_2} f(x) \cdot (-i\xi)e^{-ix\xi} dx$$

であるべきを

$$\int_{-R_1}^{R_2} f'(x)e^{-ix\xi} dx = [f(x)e^{-ix\xi}]_{-R_1}^{R_2} - \int_{-R_1}^{R_2} f(x) \cdot \frac{e^{-ix\xi}}{-i\xi} dx$$

としたとか。さすがにこれは一発アウト。

4B. f の離散時間 Fourier 変換は

$$\mathcal{F}f(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)e^{-in\omega}.$$

内積 (φ, ψ) を

$$(\varphi, \psi) = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\omega)\overline{\psi(\omega)}d\omega$$

で定めるとき、 $(e^{-in\omega}, e^{-im\omega}) = 2\pi\delta_{nm}$ となるので、

$$(\mathcal{F}f, e^{-im\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)(e^{-in\omega}, e^{-im\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)2\pi\delta_{nm} = 2\pi f(m).$$

ゆえに

$$f(m) = \frac{1}{2\pi}(\mathcal{F}f, e^{-im\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{F}f(\omega)\overline{e^{-im\omega}}d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{F}f(\omega)e^{im\omega}d\omega. \blacksquare$$

講評 $\{\varphi_n\}$ が直交系で、 $f = \sum_n c_n \varphi_n$ であれば、 $c_n = \frac{(f, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)}$ というのは、耳にタコが出来るくらい言ったつもりである。それをこのテストでは実は重複して(ひよつとすると三重に)尋ねている(この問題とどこでしょう?)。

5.

(1) サンプリング周波数が 44100 Hz であるから、 j が 44100 増えると、 t が 1 増えるので、周期が 1 秒のときはそれで f_j の値が元に戻った。つまり 44100 が数列 $\{f_j\}$ の周期であった。

周期が 10 秒のときは、その 10 倍、 j が 441000 増えると t が 10 増えるので値が元に戻る。つまり $N = 441000$ が周期である。

数式を用いて一般的に議論してみる。サンプリング周期を T_s とすると、 $T_s = 1/F_s$, $f_j = f(jT_s)$. f が周期 T ゆえに $f(t+T) = f(t)$ が成り立つので

$$f_{j+TF_s} = f((j+TF_s)T_s) = f(jT_s + TF_sT_s) = f(jT_s + T) = f(jT_s) = f_j.$$

ゆえに $N := TF_s$ が周期である。

(2) 内積 (\cdot, \cdot) を

$$(\varphi, \psi) = \int_0^T \varphi(t)\overline{\psi(t)} dt$$

で定義する。 $\varphi_n(t) = e^{2\pi i n t / T}$ とおくと、 $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ は直交系になる。 $f = \sum_n c_n \varphi_n$ と表せたとす

ると、 $c_n = \frac{(f, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)}$ であった。

$$(\varphi_n, \varphi_n) = \int_0^T \varphi_n(t) \overline{\varphi_n(t)} dt = \int_0^T |\varphi_n(t)|^2 dt = \int_0^T 1 dt = T.$$

ゆえに

$$c_n = \frac{1}{T} (f, \varphi_n) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-2\pi i n t / T} dt.$$

$e^{2\pi i n t / T}$ の周期は T/n . なので周波数は $\frac{1}{T/n} = n \frac{1}{T} = 0.1n$ (Hz). (補足的な説明 授業中の実験では、音声データを 1 秒だけ取り出して解析した。これは周期 1 秒と仮定して解析していることになる。その場合は、 $c_n \varphi_n$ という項の周波数は n Hz であり、例えばド (261 Hz) の音の離散 Fourier 係数の絶対値 $|C_n|$ をプロットしたとき、 $n = 261, N - 261$ に一番高いピークが現れた。もしも 10 秒のデータで同じことをやった場合、 $n = 2610, N - 2610$ 付近に一番高いピークが現れることになる。)

- (3) 結果は $C_n = \sum_{k \equiv n} c_k$. ($\sum_{k \equiv n}$ は、 $k \equiv n \pmod{N}$ を満たす全ての整数 k についての和を取ることを意味する。)

(証明) $\omega := e^{2\pi i T_s / T} = e^{2\pi i / (T F_s)} = e^{2\pi i / N}$ とおくと

$$f_j = f(j T_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n j T_s / T} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \omega^{n j}.$$

ゆえに

$$C_n = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_j \omega^{-n j} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \omega^{k j} \omega^{-n j} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \omega^{(k-n) j} = \sum_{k \equiv n} c_k \frac{1}{N} \cdot N = \sum_{k \equiv n} c_k.$$

- (4) これは宿題と本質的に同じである。とりあえず結論だけ書いておくと、周波数 F_{\max} がサンプリング周波数 F_s の半分である $F_s/2 = 22050$ (Hz) より小さければ良い。周期 10 秒の信号に含まれるのは 0.1 (Hz) の整数倍の成分であるから、22049.9 以下の信号しか含まないということである。 $F_{\max} < 22050$ と書いても、 $F_{\max} \leq 22049.9$ と書いても、どちらでも良い。 ■

- サンプリングは分かっていない人が多くて、とても驚いた(もっと基本的な問をやってもらうべきだったのか)。(1) を正しく回答した人は 2,3 人。
- (2) 「周期が T の場合の Fourier 係数の式は書けるようにしておこう」と何度か言いました。
- 半分でなく倍にする人が多かった。

そもそも音楽 CD のサンプリング周波数に 44100 (Hz) が選ばれた理由は、普通の人が聞き取れる周波数の上限 20 kHz までの周波数成分した含まない信号は復元できるように、20 kHz の 2 倍に少しだけ余裕を持たせたものである、ということだった。