

# 信号処理とフーリエ変換 第14回

## ～デジタル・フィルタ～

かつらだ まさし  
桂田 祐史

2023年1月18日

- ① 本日の内容・連絡事項
- ② デジタル・フィルター (続き)
  - デジタル・フィルターを作る (続き)
    - ローパス・フィルター

いよいよ最終回です。

- デジタル・フィルターの2回目 (講義ノート [1]§8.6の後半)。今日の授業は短いです。(シラバスに載せていた「CTの数理」の説明はカットします。興味のある人は講義ノート§10を読んで下さい。)
- 期末試験
  - 1月25日(水) 15:00~16:00
  - 形式は過去問に準じる (複数出題して5問選択して解答する)。  
授業WWWサイトで過去問が見られる。
- レポート課題3(≒切1月30日→1月31日に変更)が出ている。

## 8.5 デジタル・フィルタを作る(続き) 1枚で復習

連続信号  $X(t)$  をサンプリング周波数  $F_s$  でサンプリングして得られる離散信号を  $x$  とする:

$$x = \{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}, \quad x_n := X(nT_s) \quad (n \in \mathbb{Z}), \quad T_s := \frac{1}{F_s}.$$

$X(t) = e^{i\Omega t}$  (正弦波) のとき、 $x = \{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  は等比数列になる。

$$x_n = e^{in\omega} = (e^{i\omega})^n \quad (n \in \mathbb{Z}), \quad \omega := \Omega T_s.$$

サンプリング定理の仮定  $|\frac{\Omega}{2\pi}| < \frac{F_s}{2}$  を満たすとき、 $|\omega| < \pi$  である。  
線形定常フィルタ  $F$  に対して、 $y := F[x]$ ,  $x = \{e^{in\omega}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  とすると

$$y_n = e^{in\omega} \hat{h}(\omega) = x_n \hat{h}(\omega).$$

ただし  $h$  は  $F$  の単位インパルス応答 ( $h = F[\delta]$ ) である。 $\hat{h}(\omega)$  は、 $F$  の周波数特性と呼ばれるが、 $h$  の離散時間 Fourier 変換である:

$$\hat{h}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in\omega} h_n.$$

## 8.5.7 ローパス・フィルター

低い音は通し、高い音はカットする、**ローパス・フィルター** (low-pass filter) を作ろう。

## 8.5.7 ローパス・フィルター

低い音は通し、高い音はカットする、**ローパス・フィルター** (low-pass filter) を作ろう。最初は素朴に考える。境い目の周波数 (**エッジ周波数**)  $F_e > 0$  として、次を目標にする。  
 $F_e$  以下の周波数の信号は**そのまま通し**、 $F_e$  より高い周波数の信号は**一切通さない**。

## 8.5.7 ローパス・フィルター

低い音は通し、高い音はカットする、**ローパス・フィルター** (low-pass filter) を作ろう。最初は素朴に考える。境い目の周波数 (**エッジ周波数**)  $F_e > 0$  として、次を目標にする。  
 $F_e$  以下の周波数の信号は**そのまま通し**、 $F_e$  より高い周波数の信号は**一切通さない**。

その周波数  $F_e$  に対応する正規化角周波数  $\omega_e$  は、 $\omega_e = \frac{F_e}{F_s}$ 。そこで、デジタル・フィルター  $F$  で、単位インパルス応答  $h = F[\delta]$  が

$$(1) \quad \hat{h}(\omega) = \begin{cases} 1 & (|\omega| \leq \omega_e) \\ 0 & (|\omega| > \omega_e) \end{cases} \quad (\text{理想的な周波数特性})$$

を満たすものを求める ( $y_n = \hat{h}(\omega)e^{in\omega}$  より、 $|\omega| \leq \omega_e$  ならば  $y_n = x_n$ , それ以外は  $y_n = 0$ )。

## 8.5.7 ローパス・フィルター

低い音は通し、高い音はカットする、**ローパス・フィルター** (low-pass filter) を作ろう。最初は素朴に考える。境い目の周波数 (**エッジ周波数**)  $F_e > 0$  として、次を目標にする。  
 $F_e$  以下の周波数の信号は**そのまま通し**、 $F_e$  より高い周波数の信号は**一切通さない**。

その周波数  $F_e$  に対応する正規化角周波数  $\omega_e$  は、 $\omega_e = \frac{F_e}{F_s}$ 。そこで、デジタル・フィルター  $F$  で、単位インパルス応答  $h = F[\delta]$  が

$$(1) \quad \hat{h}(\omega) = \begin{cases} 1 & (|\omega| \leq \omega_e) \\ 0 & (|\omega| > \omega_e) \end{cases} \quad (\text{理想的な周波数特性})$$

を満たすものを求める ( $y_n = \hat{h}(\omega)e^{in\omega}$  より、 $|\omega| \leq \omega_e$  ならば  $y_n = x_n$ , それ以外は  $y_n = 0$ )。

$h_n$  は?



## 8.5.7 ローパス・フィルター

低い音は通し、高い音はカットする、**ローパス・フィルター** (low-pass filter) を作ろう。  
最初は素朴に考える。境い目の周波数 (**エッジ周波数**)  $F_e > 0$  として、次を目標にする。  
 $F_e$  以下の周波数の信号は**そのまま通し**、 $F_e$  より高い周波数の信号は**一切通さない**。

その周波数  $F_e$  に対応する正規化角周波数  $\omega_e$  は、 $\omega_e = \frac{F_e}{F_s}$ 。そこで、デジタル・フィルター  $F$  で、単位インパルス応答  $h = F[\delta]$  が

$$(1) \quad \hat{h}(\omega) = \begin{cases} 1 & (|\omega| \leq \omega_e) \\ 0 & (|\omega| > \omega_e) \end{cases} \quad (\text{理想的な周波数特性})$$

を満たすものを求める ( $y_n = \hat{h}(\omega)e^{in\omega}$  より、 $|\omega| \leq \omega_e$  ならば  $y_n = x_n$ , それ以外は  $y_n = 0$ )。

$h_n$  は? 離散時間 Fourier 変換の反転公式  $h_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{h}(\omega)e^{in\omega} d\omega$  から

$$(2) \quad h_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_e}^{\omega_e} e^{in\omega} d\omega = \frac{\omega_e}{\pi} \text{sinc}(n\omega_e).$$

$$\text{ここで } \text{sinc } x := \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}) \\ 1 & (x = 0) \end{cases}.$$

一般に  $\int_{-a}^a e^{ibx} dx = 2a \text{sinc}(ab)$  が成り立つので、 $=$  が得られる。

## 8.5.7 ローパス・フィルター

つまり

$$h_n := \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_e}^{\omega_e} e^{in\omega} d\omega = \frac{\omega_e}{\pi} \operatorname{sinc}(n\omega_e)$$

で  $\{h_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  を定めると

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n e^{-in\omega} = \hat{h}(\omega) = \begin{cases} 1 & (|\omega| \leq \omega_e \text{ の場合}) \\ 0 & (|\omega| > \omega_e \text{ の場合}) \end{cases}$$

が成り立ち

## 8.5.7 ローパス・フィルター

つまり

$$h_n := \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_e}^{\omega_e} e^{in\omega} d\omega = \frac{\omega_e}{\pi} \operatorname{sinc}(n\omega_e)$$

で  $\{h_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  を定めると

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n e^{-in\omega} = \hat{h}(\omega) = \begin{cases} 1 & (|\omega| \leq \omega_e \text{ の場合}) \\ 0 & (|\omega| > \omega_e \text{ の場合}) \end{cases}$$

が成り立ち、

$$y_n = x * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_{n-k} h_k \quad (n \in \mathbb{Z})$$

で  $\{y_n\}$  を計算すると、離散正弦波  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}} = \{e^{in\omega}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  に対しては

$$y_n = \hat{h}(\omega)x_n = \begin{cases} x_n & (|\omega| \leq \omega_e \text{ の場合}) \\ 0 & (|\omega| > \omega_e \text{ の場合}). \end{cases}$$

つまり、 $F_e$  より低い周波数の信号はそのまま通し、 $F_e$  より高い周波数の信号は完璧にシャットアウトする。

## 8.5.7 ローパス・フィルター

つまり

$$h_n := \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_e}^{\omega_e} e^{in\omega} d\omega = \frac{\omega_e}{\pi} \operatorname{sinc}(n\omega_e)$$

で  $\{h_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  を定めると

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n e^{-in\omega} = \hat{h}(\omega) = \begin{cases} 1 & (|\omega| \leq \omega_e \text{ の場合}) \\ 0 & (|\omega| > \omega_e \text{ の場合}) \end{cases}$$

が成り立ち、

$$y_n = x * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_{n-k} h_k \quad (n \in \mathbb{Z})$$

で  $\{y_n\}$  を計算すると、離散正弦波  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}} = \{e^{in\omega}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  に対しては

$$y_n = \hat{h}(\omega)x_n = \begin{cases} x_n & (|\omega| \leq \omega_e \text{ の場合}) \\ 0 & (|\omega| > \omega_e \text{ の場合}). \end{cases}$$

つまり、 $F_e$  より低い周波数の信号はそのまま通し、 $F_e$  より高い周波数の信号は完璧にシャットアウトする。

**しかし**、フィルターをコンピューター上に実現するとき、**無限級数の計算をすることは現実的ではない**。何らかの形で有限項で打ち切ることになるだろう。

## 8.5.7 ローパス・フィルター $F^J$ (単純な打ち切り)

まず素朴に単純な打ち切りを試す。 $J \in \mathbb{N}$  に対して  $\sum_{k=-\infty}^{\infty}$  を  $\sum_{k=-J/2}^{J/2}$  で置き換える。

## 8.5.7 ローパス・フィルター $F^J$ (単純な打ち切り)

まず素朴に単純な打ち切りを試す。 $J \in \mathbb{N}$  に対して  $\sum_{k=-\infty}^{\infty}$  を  $\sum_{k=-J/2}^{J/2}$  で置き換える。

これは  $F$  の代わりに、次式で定まる  $F^J$  を考えていることになる:

$$F^J[x](n) := \sum_{k=-J/2}^{J/2} x_{n-k} h_k \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

## 8.5.7 ローパス・フィルター $F^J$ (単純な打ち切り)

まず素朴に単純な打ち切りを試す。 $J \in \mathbb{N}$  に対して  $\sum_{k=-\infty}^{\infty}$  を  $\sum_{k=-J/2}^{J/2}$  で置き換える。

これは  $F$  の代わりに、次式で定まる  $F^J$  を考えていることになる:

$$F^J[x](n) := \sum_{k=-J/2}^{J/2} x_{n-k} h_k \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

$\{h_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  の代わりに、次式の  $\{h_n^J\}_{n \in \mathbb{Z}}$  を用いる、ということである。

$$h_n^J := \begin{cases} h_n & (|n| \leq J/2) \\ 0 & (|n| > J/2). \end{cases}$$

## 8.5.7 ローパス・フィルター $F^J$ (単純な打ち切り)

まず素朴に単純な打ち切りを試す。 $J \in \mathbb{N}$  に対して  $\sum_{k=-\infty}^{\infty}$  を  $\sum_{k=-J/2}^{J/2}$  で置き換える。

これは  $F$  の代わりに、次式で定まる  $F^J$  を考えていることになる:

$$F^J[x](n) := \sum_{k=-J/2}^{J/2} x_{n-k} h_k \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

$\{h_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  の代わりに、次式の  $\{h_n^J\}_{n \in \mathbb{Z}}$  を用いる、ということである。

$$h_n^J := \begin{cases} h_n & (|n| \leq J/2) \\ 0 & (|n| > J/2). \end{cases}$$

この  $F^J$  の周波数特性は

$$\hat{h}^J(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n^J e^{-in\omega} = \sum_{n=-J/2}^{J/2} h_n e^{-in\omega}.$$

この  $\hat{h}^J(\omega)$  のグラフを描いてみよう。



## 8.5.7 ローパス・フィルター $F^J$ (単純打ち切り) 周波数特性

naivelowpass.nb —  $\hat{h}^J(\omega)$  のグラフを描く

```
omega=0.5  
h[n_]:=omega/Pi Sinc[n omega]  
draw[J_]:=Plot[Sum[h[n]Exp[-I n t],{n,-J/2,J/2}],{t,-Pi,Pi}, PlotRange->All]  
draw[100]
```

目標は

```
Plot[If[Abs[x]<omega,1,0],{x,-Pi,Pi}]
```

## 8.5.7 ローパス・フィルター $F^J$ (単純打ち切り) 周波数特性

`naivelowpass.nb` —  $\hat{h}^J(\omega)$  のグラフを描く

```
omega=0.5  
h[n_]:=omega/Pi Sinc[n omega]  
draw[J_]:=Plot[Sum[h[n]Exp[-I n t]},{n,-J/2,J/2}},{t,-Pi,Pi}, PlotRange->All]  
draw[100]
```

目標は  
`Plot[If[Abs[x]<omega,1,0]},{x,-Pi,Pi}]`

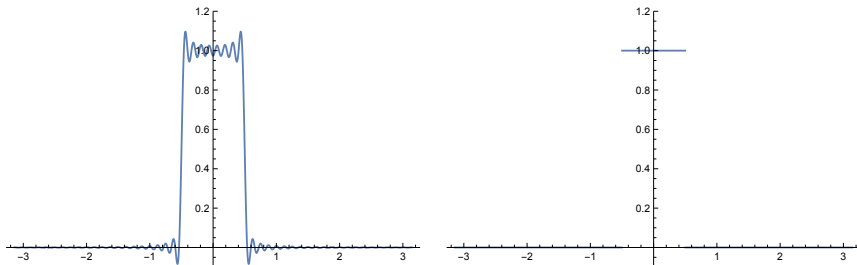


図 1:  $\hat{h}_J(\omega)$  ( $J = 100$ ) と目標  $\hat{h}(\omega)$ .  $h_J$  の周波数特性  $\hat{h}_J(\omega)$  は “波打っている”

## 8.5.7 ローパス・フィルター $F^J$ (単純打ち切り) 反省

(1枚前のスライド) 何か見覚えがあるような…

## 8.5.7 ローパス・フィルター $F^J$ (単純打ち切り) 反省

(1枚前のスライド) 何か見覚えがあるような…Gibbsの現象である！

## 8.5.7 ローパス・フィルター $F^J$ (単純打ち切り) 反省

(1枚前のスライド) 何か見覚えがあるような…Gibbsの現象である！

不連続関数の Fourier 級数の部分和は、Fourier 級数の和 (極限) と大きな隔たりがある、ということ。

## 8.5.7 ローパス・フィルター $F^J$ (単純打ち切り) 反省

(1枚前のスライド) 何か見覚えがあるような…Gibbsの現象である！

不連続関数の Fourier 級数の部分和は、Fourier 級数の和 (極限) と大きな隔たりがある、ということ。

条件

$$(再掲 1) \quad \hat{h}(\omega) = \begin{cases} 1 & (|\omega| \leq \omega_e) \\ 0 & (|\omega| > \omega_e) \end{cases} \quad (\text{理想的な周波数特性})$$

は1つの理想であるが、不連続関数であるから、無限級数の計算が出来ない限り、かえって良くないことが起こる、ということである。

信号処理では、**windowing** (窓をかける) というテクニックを用いて対処する。

信号処理では、**windowing** (窓をかける) というテクニックを用いて対処する。

$h_n$  に**窓 (関数)** と呼ばれる (段階的に 0 に近づき、十分遠方では恒等的に 0 に等しい) 関数をかけて、0 でない項を有限個のみにする。



信号処理では、**windowing** (窓をかける) というテクニックを用いて対処する。

$h_n$  に**窓 (関数)** と呼ばれる (段階的に 0 に近づき、十分遠方では恒等的に 0 に等しい) 関数をかけて、0 でない項を有限個のみにする。窓関数には色々なものがあるが、ここでは次式で定義されるシンプルな **hann 窓** を用いてみる。

$$(3) \quad w(x) := \frac{1 - \cos 2\pi x}{2} \quad (0 \leq x \leq 1).$$

hann 窓ってどんな関数？

```
w[x_] := (1 - Cos[2Pi x])/2;
g = Plot[w[x], {x, 0, 1}]
```

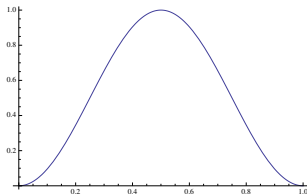


図 2: ハン窓  $w$  のグラフ

この  $w$  を用いて、

$$h_n^{J,w} := \begin{cases} w(n/J - 1/2)h_n & (|n| \leq J/2) \\ 0 & (|n| > J/2) \end{cases}$$

で  $\{h_n^{J,w}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  を定め、 $\{h_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  の代わりに  $\{h_n^{J,w}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  を用いることにする。

この  $w$  を用いて、

$$h_n^{J,w} := \begin{cases} w(n/J - 1/2)h_n & (|n| \leq J/2) \\ 0 & (|n| > J/2) \end{cases}$$

で  $\{h_n^{J,w}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  を定め、 $\{h_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  の代わりに  $\{h_n^{J,w}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  を用いることにする。

これは  $F$  に近いが、 $F$  とは異なるデジタル・フィルター  $F^{J,w}$  を用いることになる。その周波数特性は

$$\hat{h}^{J,w}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n^{J,w} e^{-in\omega} = \sum_{n=-J/2}^{J/2} h_n^{J,w} e^{-in\omega}.$$

この  $\omega \mapsto \hat{h}^{J,w}(\omega)$  のグラフを図示してみよう。

```
w[x_] := (1 - Cos[2 Pi x])/2
draw2[J_] := Plot[Sum[w[n/J - 1/2] h[n] Exp[-I n t], {n, -J/2, J/2}], {t, -Pi, Pi},
  PlotRange -> All]
```

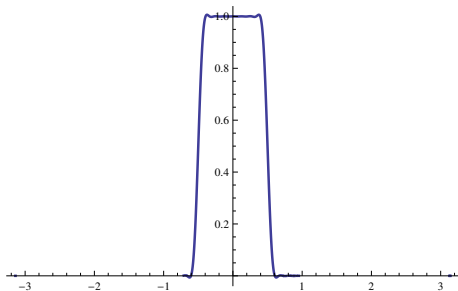


図 3: 窓関数あり  $\hat{h}^{J,w}(\omega)$

これは (理想である)  $\hat{h}(\omega)$  とは違うけれど、 $\hat{h}_J(\omega)$  よりはずっと良いだろう。

## 注意

$$y_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_{n-k} h_k^{J,w} = \sum_{k=-J/2}^{J/2} x_{n-k} h_k^{J,w}.$$

$y_n$  の計算に  $x_{n-J/2}, x_{n-J/2+1}, \dots, x_{n+J/2}$  が必要になることに注意しよう。

フィルター  $F^J, F^{J,w}$  は、以前説明した定義に従えば厳密には FIR フィルターではない

## 注意

$$y_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_{n-k} h_k^{J,w} = \sum_{k=-J/2}^{J/2} x_{n-k} h_k^{J,w}.$$

$y_n$  の計算に  $x_{n-J/2}, x_{n-J/2+1}, \dots, x_{n+J/2}$  が必要になることに注意しよう。

フィルター  $F^J, F^{J,w}$  は、以前説明した定義に従えば厳密には FIR フィルターではない (負の  $k$  について和を取っているので、未来の情報を使っていることになる)

## 注意

$$y_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_{n-k} h_k^{J,w} = \sum_{k=-J/2}^{J/2} x_{n-k} h_k^{J,w}.$$

$y_n$  の計算に  $x_{n-J/2}, x_{n-J/2+1}, \dots, x_{n+J/2}$  が必要になることに注意しよう。

フィルター  $F^J, F^{J,w}$  は、以前説明した定義に従えば厳密には FIR フィルターではない (負の  $k$  について和を取っているので、未来の情報を使っていることになる) が、時間遅れを許すことにして

$$\begin{aligned} \tilde{y}_n &:= y_{n-J/2} = \sum_{k=-J/2}^{J/2} x_{(n-J/2)-k} h_k^{J,w} = \sum_{k=-J/2}^{J/2} x_{n-(J/2+k)} h_k^{J,w} \\ &= \sum_{k'=0}^J x_{n-k'} h_{k'-J/2}^{J,w} \end{aligned}$$

とすると、 $\tilde{y}$  は FIR フィルターとなる。

最後まで視聴してくれた人、お疲れさまです。



# 参考文献

- [1] 桂田祐史：「信号処理とフーリエ変換」講義ノート，  
<https://m-katsurada.sakura.ne.jp/fourier/fourier-lecture-notes.pdf>，以前は「画像処理とフーリエ変換」というタイトルだったのを変更した。(2014～).