

# 信号処理とフーリエ変換 第2回

～Fourier 級数の収束～

かつらだ まさし  
桂田 祐史

<https://m-katsurada.sakura.ne.jp/fourier2022/>

2022年9月28日

# 目次

## ① 本日の内容・連絡事項

## ② Fourier 級数

- Fourier 級数の収束
  - 実例を見よう
  - 関数列の 3 つの収束
  - Fourier 級数の収束に関するお勧めの 3 つの定理
  - Gibbs の現象

## ③ 参考文献

- 今回は、講義ノート [1] の §1.2 の部分 (フーリエ級数の収束) の内容を講義します。  
収束というと、ガチガチの数学 (特に解析学) の話題のように感じられるかもしれませんが、実例を見ると自然な問題であることが分かると思います (ぜひ理解してほしい)。
- 実例が大事だけれど、Fourier 解析がらみの計算は手強いので、コンピューターを利用するのが良いと考えています。この科目では Mathematica を利用することにしています (数式処理, 数値計算, グラフィックスが程よく使える)。必要なことはこちらが動画で見せますが、ぜひ自分の Mac でも確かめるようにして下さい。Mathematica が動かなくなっている人は、私 (katurada あつと meiji ドット ac どつと jp) または池田先生に相談しましょう。本人確認のため Meiji Mail で連絡を下さい。

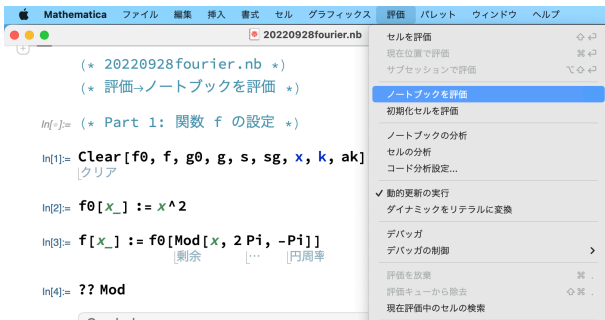
## 1.2 Fourier 級数の収束 1.2.1 実例を見よう



授業 WWW サイト (<https://m-katsurada.sakura.ne.jp/fourier2022/> ... Oh-o! Meiji からリンク張ってある) から 20220928fourier.nb を入手して開く。ブラウザで Ctrl+クリックして保存してからクリックするか、ターミナルで以下のコマンドを実行する。

```
curl -O https://m-katsurada.sakura.ne.jp/fourier2022/20220928fourier.nb
open 20220928fourier.nb
```

(古い Mathematica で実行しようとする、警告が表示されるが、多分大丈夫。)

一気に実行するには、Mathematica のメニュー [評価] から [ノートブックを評価] を選ぶ。



- 現象数理学科でライセンスを購入しているので、所属する学生は利用できる。  
macOS によっては、Mathematica を更新しないと動かないかも。新しいアクティベーション・キーが必要な場合、桂田か池田先生に相談すること。)
- アプリケーション・フォルダに Mathematica.app がある (私は Dock に追加しています)。そこからならほぼ確実に起動できる。
- (新しくプログラムを作る場合) Mathematica を起動後、「新規ドキュメント」でノートブックを開き、コマンドを入力して実行する。
- 忘れないように: コマンドの最後に `shift` +  とタイプする。
- 直前の結果は % で参照できる。直前のコマンドは `command` + L で呼び出せる。
- コマンドは編集して再実行できる (挿入、上書き修正、削除、などが可能)。
- ??関数名 としてマニュアルが開ける (非常に便利。これに慣れること。)
- 関数名の大文字・小文字に注意する。用意されている関数名の先頭は大文字である。
- ノートブックとして保存しておける (ファイル名末尾は .nb)。
- 既存のノートブックはダブルクリックで開ける。  
コマンドを1つ1つ `shift` +  で実行する以外に、[評価] → [ノートブックを評価] で順番に全部実行することもできる。
- Mathematica 入門 <https://m-katsurada.sakura.ne.jp/syori2/mathematica/>

## 1.2.1 実例を見よう 例: $f(x) = x^2$ ( $-\pi \leq x < \pi$ )

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  は周期  $2\pi$  で

$$f(x) = x^2 \quad (-\pi \leq x < \pi)$$

とする。グラフを描くことを強く勧める (連続かどうかなど、分かることがある)。

```
f0[x_]:=x^2  
g1 = Plot[f0[x], {x, -10, 10}]
```

```
f[x_] := f0[Mod[x, 2 Pi, -Pi]]  
g2=Plot[f[x],{x,-10,10}]
```

← Mod[] を使って周期  $2\pi$  の関数を作る工夫

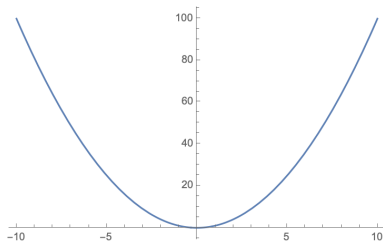


図 1:  $f_0(x) := x^2$  のグラフ ( $[-10, 10]$ )

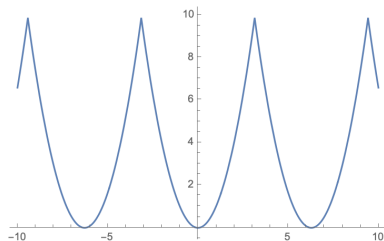


図 2:  $f$  のグラフ ( $[-10, 10]$ )

# Mathematica の Mod[ ] について

細かいことのようにだが、周期関数としてグラフを描く工夫について説明する。

Mod[a, b], Mod[a, b, c]

$a \in \mathbb{R}, b > 0$  が与えられたとき、

$$a = bn + r \quad (n \in \mathbb{Z}, 0 \leq r < b)$$

を満たす  $n, r$  が一意的に定まる ( $a$  を  $b$  で割った商が  $n$ , 余りが  $r$  … よく知られている)。Mod[a, b] は、この  $r$  を返す関数である。

同様に  $a \in \mathbb{R}, b > 0, c \in \mathbb{R}$  が与えられたとき、

$$a = bn + r \quad (n \in \mathbb{Z}, c \leq r < c + b)$$

を満たす  $n, r$  が一意的に定まる。この  $r$  を返すのが、Mod[a, b, c] である。

$r = \text{Mod}[a, 2\pi, -\pi]$  とすると、 $r$  は  $r \in [-\pi, -\pi + 2\pi] = [-\pi, \pi)$ ,  $a - r$  は  $2\pi$  の整数倍、という条件を満たすことを理解しよう。

## 1.2.1 実例を見よう 例: $f(x) = x^2$ ( $-\pi \leq x < \pi$ )

$f$  の Fourier 級数をしていねいに計算しよう。これは各自がやること (ここに書くのは確認用)。

偶関数であるから  $b_n = 0$ 。

$n \neq 0$  のときは

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx \, dx = \dots (\text{部分積分で計算}) \dots = \frac{4 \cos n\pi}{n^2} = \frac{4(-1)^n}{n^2}.$$

(計算は結構面倒。19 ページに書いておいた。)

$n = 0$  のときは

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \, dx = \frac{2}{3} \pi^2.$$

ゆえに

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx = \frac{\pi^2}{3} - 4 \left( \frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \dots \right).$$

(先取りして  $f$  は周期  $2\pi$  かつ連続かつ区分的に  $C^1$  級であるから、後で紹介する定理によって、Fourier 級数は一様収束し、和は  $f(x)$  に等しい。)

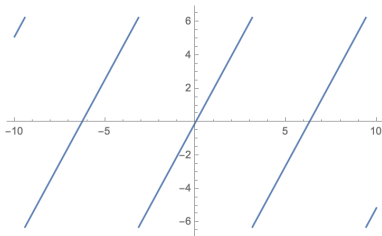


## 1.2.1 実例を見よう 例2: $g(x) = 2x \ (-\pi \leq x < \pi)$

$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  は周期  $2\pi$  で

$$g(x) = 2x \quad (-\pi \leq x < \pi).$$

とする。 $g$  のグラフは次のようになる。 $x = (2m - 1)\pi \ (m \in \mathbb{Z})$  で  $g$  は不連続である。



$g$  の Fourier 級数を計算しよう。 $g$  は  $((2m - 1)\pi$  を除き) 奇関数であるから  $a_n = 0$ 。

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 2x \sin nx \, dx = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx \, dx \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi} x \left( -\frac{\cos nx}{n} \right)' \, dx = \frac{4}{\pi} \left\{ \left[ x \cdot \frac{-\cos nx}{n} \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} 1 \cdot \frac{\cos nx}{n} \, dx \right\} \\ &= \frac{4}{\pi} \left( \frac{-\pi \cos n\pi}{n} + \left[ \frac{\sin nx}{n^2} \right]_0^{\pi} \right) = \frac{4(-1)^{n-1}}{n}. \quad (\text{試験でミスがとても多い。}) \end{aligned}$$

## 1.2.1 実例を見よう 例 2: $g(x) = 2x \ (-\pi \leq x < \pi)$

ゆえに

$$(1) \quad g(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx = 4 \left( \frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots \right).$$

ここで  $\sim$  は、右辺が左辺の Fourier 級数であることを表す記号である。収束と等号成立が微妙なので、 $=$  と書かずに (実際成り立たない点がある)、とりあえず  $\sim$  としておいた。

$g$  は周期  $2\pi$  かつ **区分的に  $C^1$  級であるが、連続ではない**。後で紹介する定理によって、(1) の右辺 ( $g$  の Fourier 級数) は各点収束し、

- $x$  が  $g$  の連続点であれば和は  $g(x)$  に等しい
- $x$  が  $g$  の不連続点であれば和は  $\frac{g(x+0) + g(x-0)}{2}$  に等しい

(この例では、 $x = (2m-1)\pi \ (m \in \mathbb{Z})$  で  $\frac{g(x+0) + g(x-0)}{2} = \frac{-2\pi + 2\pi}{2} = 0 \neq g(x)$ )

ゆえに、 $x = (2m-1)\pi \ (m \in \mathbb{Z})$  で等式不成立、そうでない点で等式が成立する。

もしも  $g$  の  $x = (2m-1)\pi$  での値を  $0$  に修正すると (積分で定義される Fourier 係数と Fourier 級数は変わらないので)、すべての点  $x$  で Fourier 級数の和が  $g(x)$  に等しくなる。(分かりにくいかもしれないが理解にチャレンジしよう。)

不連続点の近傍では、**Gibbs の現象**が見られるが、これについては後述する。 □

# 問題点を整理 収束するか、和は元の関数に等しいか

Fourier 級数は、その名の通り級数であるから、第  $n$  項までの部分

$$\begin{aligned} s_n(x) &:= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \\ &= \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} \end{aligned}$$

が  $n \rightarrow \infty$  のときに収束するかどうかはまず問題になる。

特に Fourier 級数の場合、和がもとの関数に等しいことが期待される。

成り立つかどうか？

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) \stackrel{?}{=} f(x)$$

## 1.2.2 関数列の3つの収束 関数と関数の違いを測る

数列と違って、関数列には複数の収束概念がある。

$\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  が  $f$  に収束するとは、 $s_n$  と  $f$  の違い (「距離」と言いたくなるが、それは数学語なので、まだここでは使わない) が 0 に近づくということだが、違いの測り方は色々ありうる。

$y = f(x)$ ,  $y = g(x)$  のグラフを描いて、どのように違いを測るか、図で説明してみる。

## 1.2.2 関数列の3つの収束

関数列の収束を3つ紹介する。(関数の定義域は  $[-\pi, \pi]$  とする。  $\mathbb{R}$  とすべきかもしれないが、周期  $2\pi$  の周期関数なので、同じことである。)

### ① 各点収束 (単純収束)

$$(2) \quad (\forall x \in [-\pi, \pi]) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = f(x).$$

$\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  は  $[-\pi, \pi]$  で  $f$  に各点収束する、という。

任意の  $x \in [-\pi, \pi]$  を定めると、 $\{s_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$  は数列である。それが複素数  $f(x)$  に収束する、ということ。

分かりやすいけれど、実はあまり役に立たない。

## 1.2.2 関数列の3つの収束

### ii) 一様収束

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [-\pi, \pi]} |s_n(x) - f(x)| = 0.$$

「 $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  は  $[-\pi, \pi]$  で  $f$  に一様収束する。」という。

ある意味で自然。実はこれが成り立つと、色々なことが導かれる。その意味ではとても良い収束である。

(関数論では大活躍する。)

(余談) 連続な関数の場合は、次に説明する  $L^\infty$  ノルムによる収束と一致する。

$(-\pi, \pi)$  において “本質的に有界な” 関数全体からなる関数空間  $L^\infty(-\pi, \pi)$  におけるノルム

$$\|g\|_{L^\infty} := \operatorname{ess.\,sup}_{x \in (-\pi, \pi)} |g(x)|$$

を用いて

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|s_n - f\|_{L^\infty} = 0 \quad (L^\infty(-\pi, \pi) \text{ における } s_n \text{ と } f \text{ の距離が } 0 \text{ に収束})$$

となるとき、 $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  は  $L^\infty(-\pi, \pi)$  で  $f$  に収束する、という。

## 1.2.2 関数列の3つの収束

iii)  $L^p$  収束 ( $p$  次平均収束) ただし  $1 \leq p < \infty$ .

$$(4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |s_n(x) - f(x)|^p dx = 0$$

が成り立つとき、 $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  は  $[-\pi, \pi]$  で  $f$  に  $L^p$  収束する、という。

特に  $p = 1$  の場合は、積分はグラフの囲む図形の面積を表す。

$p = 2$  の場合は、とてもよく使われる (後で詳しく説明し直す)。

$L^p(-\pi, \pi)$  におけるノルム

$$\|g\|_{L^p} := \left( \int_{-\pi}^{\pi} |g(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

を用いると、(4) は次のように表せる。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|s_n - f\|_{L^p} = 0 \quad (L^p(-\pi, \pi) \text{ における } s_n \text{ と } f \text{ の距離が } 0 \text{ に収束}).$$

本来は、紹介した3つの収束について、実例を見せたり、それらの間の関係を説明すべきだが、それは後回しにして、Fourier 級数に関する定理を紹介する。

## 1.2.3 Fourier 級数の収束に関するお勧めの3つの定理

この項目 1.2.3 (定理の紹介) は時間が足りなくなったので、次回の講義に回します。



## 1.2.3 Fourier 級数の収束に関するお勧めの3つの定理

例1については次の定理がぴったりである。

### 定理 2.1 (連続かつ区分的に滑らかならば一様収束)

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  は周期  $2\pi$ , 連続かつ区分的に  $C^1$  級ならば、 $f$  の Fourier 級数は  $f$  に一様収束する (ゆえに各点収束かつ任意の  $p$  に対して  $L^p$  収束)。

しかし、この定理は、例2には使えない。代わりに次の定理が使える。

### 定理 2.2 (区分的に滑らかならば各点収束)

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  は周期  $2\pi$  かつ区分的に  $C^1$  級ならば、Fourier 級数は各点収束する。実際、任意の  $x \in \mathbb{R}$  に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = \begin{cases} f(x) & (f \text{ が } x \text{ で連続のとき}) \\ \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} & (f \text{ が } x \text{ で連続でないとき}). \end{cases}$$

ここで

$$f(x+0) = \lim_{y \rightarrow x+0} f(y) \quad (\text{右側極限}), \quad f(x-0) = \lim_{y \rightarrow x-0} f(y) \quad (\text{左側極限}).$$

## 1.2.3 Fourier 級数の収束に関するお勧めの3つの定理

次の定理も紹介しておく (後で重要になる)。これも例2の関数に適用できる。

### 定理 2.3 (区分的に滑らかならば $L^2$ 収束)

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  は周期  $2\pi$  かつ区分的に  $C^1$  級ならば、 $f$  の Fourier 級数は  $f$  に  $L^2$  収束する。すなわち

$$\int_{-\pi}^{\pi} |s_n(x) - f(x)|^2 dx \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

実は「区分的に  $C^1$  級」という条件は、 $f$  が  $(-\pi, \pi)$  で2乗可積分 (そのことを  $f \in L^2(-\pi, \pi)$  と書く)、すなわち Lebesgue 可測で  $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx < +\infty$  を満たす、というより弱い条件で置き換えることが出来る。次のように定理が1行で書ける。

$$f \in L^2(-\pi, \pi) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|s_n - f\|_{L^2} = 0.$$

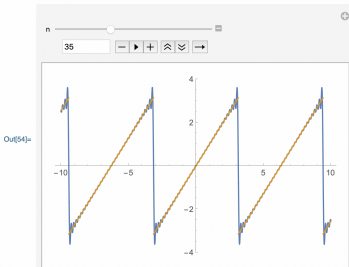
## 1.2.4 Gibbs の現象

$f$  が区分的に  $C^1$  級ではあるが、連続ではない場合、部分和  $s_n$  のグラフは「ジグザグして」、 $f$  の不連続点の近くでは「overshoot する」。よく見ると次のことが分かる。

- overshoot する範囲の横幅は、 $n \rightarrow \infty$  のときに小さくなる (各点収束するかもしれない)。
- overshoot の大きさ (縦方向のずれ) は、 $n \rightarrow \infty$  としても小さくならない (だから一様収束はしない! )。

この現象は **Gibbs の現象** と呼ばれている (Wilbraham ([2], Gibbs [3], [4])。)

```
In[54]:= Manipulate[Plot[{sg[n, x], g[x]}, {x, -10, 10},  
操作 [プロット]  
PlotRange -> {-4, 4}, PlotPoints -> 500], {n, 1, 100, 1}]  
[プロット範囲] [プロットのサンプル点]
```



# (補足) $f$ の Fourier 級数の計算

$n \neq 0$  のとき

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \left( \frac{\sin nx}{n} \right)' dx = \frac{2}{\pi} \left( \left[ x^2 \frac{\sin nx}{n} \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2x \cdot \frac{\sin nx}{n} dx \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left( 0 - \frac{2}{n} \int_0^{\pi} x \sin nx \, dx \right) = \frac{4}{n\pi} \int_0^{\pi} x \left( \frac{\cos nx}{n} \right)' dx \\ &= \frac{4}{n\pi} \left( \left[ x \frac{\cos nx}{n} \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 1 \cdot \frac{\cos nx}{n} dx \right) = \frac{4}{n\pi} \left( \pi \frac{\cos n\pi}{n} - \left[ \frac{\sin nx}{n^2} \right]_0^{\pi} \right) \\ &= \frac{4(-1)^n}{n^2}. \end{aligned}$$

$f$  の Fourier 級数は

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos nx \\ &= \frac{\pi^2}{3} - 4 \left( \frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \dots \right). \end{aligned}$$

# 参考文献

今回の内容は、講義ノート [1] の §1.2 そのままです。Gibbs の報告は有名な *Nature* なんですね (Letter というやつ)。

- [1] 桂田祐史: 「信号処理とフーリエ変換」 講義ノート,  
<https://m-katsurada.sakura.ne.jp/fourier/fourier-lecture-notes.pdf>, 以前は「画像処理とフーリエ変換」というタイトルだったのを変更した。(2014~).
- [2] Wilbraham, H.: On a certain periodic function, *The Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, Vol. 3, pp. 198–201 (1848), Google Books で読むことが出来る。  
[https://books.google.co.jp/books?id=JrQ4AAAAMAAJ&pg=PA198&redir\\_esc=y#v=onepage&q&f=false](https://books.google.co.jp/books?id=JrQ4AAAAMAAJ&pg=PA198&redir_esc=y#v=onepage&q&f=false).
- [3] Gibbs, J. W.: Fourier Series, *Nature*, Vol. 59, p. 200 (1898),  
<https://www.nature.com/articles/059200b0>.
- [4] Gibbs, J. W.: Fourier Series, *Nature*, Vol. 59, p. 606 (1899),  
<https://www.nature.com/articles/059606a0>.