複素関数・同演習 宿題 No. 8 (2024 年 11 月 20 日出題, 11 月 26 日 13:30 までに PDF 形式で提出)

__年__ 組____番 氏名______________ (解答は裏面も使用可, A4 レポート用紙に書いても可)

問 8

(1) $f''(z) = 9f(z),\ f(0) = 1,\ f'(0) = 0$ を満たす収束冪級数 $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ とその収束半径を求めよ。(この関数は 11/20 の講義で導入した初等関数で表せる。気づいたらそれを用いて $f(z)$ を表せ。)

(2) 冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$ の収束半径を ρ とする。

(a) この冪級数が $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-c| < r\}$ 内のすべての点で収束するならば、$r \leq \rho$ であることを示せ。

(b) この冪級数が $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-c| > r\}$ 内のすべての点で発散するならば、$r \geq \rho$ であることを示せ。

問 8 解説

(1)

$$f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nz^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}z^n,$$
$$f''(z)=\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)na_{n+1}z^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}z^n$$

(あるいは $f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nz^{n-1}$, $f''(z)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nz^{n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}z^n$ とする。) であるから

$$f''(z)=9f(z)\Leftrightarrow(\forall n\geq 0)\quad(n+2)(n+1)a_{n+2}=9a_n.$$

条件 $f(0)=1$ より $a_0=1$, $f'(0)=0$ より $a_1=0$ であるので、

$$a_{2k+1}=0\quad(k=0,1,2,\cdots),$$
$$a_2=\frac{9a_0}{2\cdot 1}=\frac{9}{2!},\quad a_4=\frac{9a_2}{4\cdot 3}=\frac{9}{4\cdot 3}\cdot\frac{9}{2!}=\frac{9^2}{4!},\quad\cdots,\quad a_{2k}=\frac{9^k}{(2k)!}\quad(k=0,1,2,\cdots).$$

(数学的帰納法を使うまでもないでしょう。もちろんやっても良いけれど。)

以上より

$$(\heartsuit)\qquad f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{9^k}{(2k)!}z^{2k}.$$

(収束半径チェック) $\zeta:=z^2$ とおくと $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{9^k}{(2k)!}\zeta^k$ である。$b_k:=\frac{9^k}{(2k)!}$ とおくと

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|b_k|}{|b_{k+1}|}=\lim_{k\to\infty}\frac{9^k}{(2k)!}\frac{(2(k+1))!}{9^{k+1}}=\lim_{k\to\infty}\frac{(2k+2)(2k+1)}{9}=+\infty$$

であるから、$\sum_{k=0}^{\infty}b_k\zeta^k$ は任意の $\zeta\in\mathbb{C}$ に対して収束する。ゆえに冪級数 $(\heartsuit)$ も任意の $z\in\mathbb{C}$ に対して収束する。すなわち冪級数 $(\heartsuit)$ の収束半径は ∞ である。

ちなみに (これは書かなくても良いということ)

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{9^k}{(2k)!}z^{2k}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(3z)^{2k}}{(2k)!}=\cosh(3z).\blacksquare$$

(2) (a) $r\leq\rho$ であることを背理法を用いて証明する。$r>\rho$ と仮定する。$\rho<r'<r$ を満たす r' をとり (r が有限のとき $r':=\frac{r+\rho}{2}$,, $r=+\infty$ のとき $r':=\rho+1$)、$z:=c+r'$ とおくと $|z-c|=r'<r$ であるから、問題文の仮定より z で収束する。一方 $|z-c|=r'>\rho$ であるから (収束半径の定義より) z で発散する。これは矛盾である。ゆえに $r\leq\rho$.

(b) $r\geq\rho$ であることを背理法を用いて証明する。$r<\rho$ と仮定する。$\rho<r'<r$ を満たす r' をとり ($r':=\frac{r+\rho}{2}$)、$z:=c+r'$ とおくと $|z-c|=r'>r$ であるから、問題文の仮定より z で発散する。一方 $|z-c|=r'<\rho$ であるから (収束半径の定義より) z で収束する。これは矛盾である。ゆえに $r\geq\rho$. $\blacksquare$

(2) が難しかったようだ。

- 上の解答例のように、結論部分の $r \le \rho$ ((a) の場合), $\rho \le r$ ((b) の場合) の否定を背理法の仮定にすれば良いが、命題全体の否定を背理法の仮定にしようとした人がたくさんいた。

  これには非常に驚いた (背理法に慣れていないのか)。まあ、そうしても良いけれど、そうした場合は、最後に命題全体を書くべきなのに、全員が「ゆえに $r \le \rho$」,「$\rho \le r$」としか書いていない。着地で転んだ感じがする。

  p を証明するために、$\neg p$ を仮定して矛盾を導き、ゆえに p (というのが背理法ですよね)

  これくらいは大目に見ても良いかもしれないけれど、問題なのは、ほとんどの人が命題の否定を作るのに失敗していることである。数理リテラシーで、

  $$\neg(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q \quad (\text{「}p\text{ ならば }q\text{」の否定は「}p\text{ であるのに }q\text{ でない」である})$$

  というのを学んだはずだ。ところが $\neg(p \Rightarrow q) \equiv p \Rightarrow \neg q$ と勘違いしている人が多かった。

  この冪級数が $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-c| < r\}$ 内のすべての点で収束するならば、$r \le \rho$

  の否定は

  この冪級数が $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-c| < r\}$ 内のすべての点で収束するならば、$r > \rho$

  ではなく

  この冪級数が $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-c| < r\}$ 内のすべての点で収束して、かつ $r > \rho$

  とするのが正しい。しっかりしてください。

- Cauchy-Hadamard の判定法

  $$\rho = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

  を使おうとした人が多かったが、それで証明に成功した人はいなかった。一番よく書けていた答案を修正したものを以下に示す。

  背理法で $r \le \rho$ を証明する。$r > \rho$ と仮定すると、$r > r' > \rho$ を満たす r' が取れる。

  $$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\rho} \quad \text{であるから} \quad \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|\, r'^n} > 1$$

  ゆえに円周 $|z-c| = r'$ 上の任意の点 z で冪級数は発散する。ところが $|z-c| < r$ であるから仮定によって冪級数は収束する。これは矛盾である。ゆえに $r \le \rho$.

  この解答例でも、r と ρ の間の r' を考えるのがポイントである。