

__年__組__番 氏名_____ (解答は裏面も使用可, A4レポート用紙に書いても可)

問7 (1), (2) は等比級数の和の公式を利用して解答すること。

(1) 次の各関数を0のまわりで冪級数展開し、その収束半径を求めよ。

$$(a) f(z) = \frac{1}{z+2} \quad (b) g(z) = \frac{5}{3z+4} \quad (c) h(z) = \frac{1}{(6z+7)^2}$$

$$(d) \varphi'(z) = \frac{1}{9-z}, \varphi(0) = 8 \text{ を満たす } \varphi \quad (e) r(z) = \frac{6z^4 + 19z^3 - 21z^2 - 26z + 37}{z^3 + 2z^2 - 7z + 4}$$

Mathematica で `Apart [(6z^4+19z^3-21z^2-26z+37) / (z^3+2z^2-7z+4)]` として部分分数分解できる。(自分で部分分数分解して、検算してみること)

(2) $F(z) = \frac{1}{2+3z}$ を4のまわりで冪級数展開し、その収束円を求めよ。

問7解説 「冪級数展開し」なのだから、冪級数の形 $(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n)$ に変形することを求められているのに、最後がその形になっていない人が結構いた。例えば $(-\frac{3}{4}z)^n$ は、 $\frac{(-3)^n}{4^n}z^n$ あるいは $(-\frac{3}{4})^n z^n$ のようにして、 a_n と $(z-c)^n$ が混じらないようにすべき。 $(\frac{1}{6z+7})' = ((6z+7)^{-1})' = \frac{-6}{(6z+7)^2}$ の **6** を見落とす人が多かった。

問7解答

(1) 以下、収束半径を ρ と表す。

(a) (最初の問題なので、ゆっくり変形する。慣れたら適宜スキップすれば良い。)

$$f(z) = \frac{1}{z+2} = \frac{1}{2+z} = \frac{1}{2(1+z/2)} = \frac{1}{2[1-(-z/2)]} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-(-z/2)} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} z^n.$$

(等比級数であるから) 収束する \Leftrightarrow |公比| < 1 \Leftrightarrow $|z/2| < 1 \Leftrightarrow |z| < 2$ であるから、 $\rho = 2$.

(b)

$$g(z) = \frac{5}{3z+4} = \frac{5}{4+3z} = \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{1+3z/4} = \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{1-(-3z/4)} = \frac{5}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{3z}{4}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5 \cdot (-3)^n}{4^{n+1}} z^n.$$

(等比級数であるから) 収束する \Leftrightarrow |公比| < 1 \Leftrightarrow $|-3z/4| < 1 \Leftrightarrow \frac{3}{4}|z| < 1 \Leftrightarrow |z| < \frac{4}{3}$ であるから、 $\rho = \frac{4}{3}$.

(c)

$$\frac{1}{6z+7} = \frac{1}{7(1+\frac{6}{7}z)} = \frac{1}{7} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{6}{7}z\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-6)^n}{7^{n+1}} z^n.$$

これは等比級数であるから、収束する \Leftrightarrow |公比| < 1 \Leftrightarrow $|-6z/7| < 1 \Leftrightarrow |z| < \frac{7}{6}$. ゆえに、この冪級数の収束半径は $\frac{7}{6}$. (任意の) 冪級数は収束円の内部で項別微分が出来るから

$$-\frac{6}{(6z+7)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-6)^n}{7^{n+1}} n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-6)^{n+1}}{7^{n+2}} (n+1) z^n.$$

ゆえに

$$h(z) = -\frac{1}{6} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-6)^{n+1}}{7^{n+2}} (n+1) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-6)^n}{7^{n+2}} (n+1) z^n.$$

冪級数は項別微分しても収束半径は変わらないので、 $\rho = \frac{7}{6}$.

(d)

$$\varphi'(z) = \frac{1}{9-z} = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{1-z/9} = \frac{1}{9} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{9}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{9^{n+1}} \quad (\text{収束半径は } 9).$$

(任意の) 冪級数は収束円の内部で項別積分できると、 $\varphi(0) = 8$ であることから

$$\varphi(z) = 8 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{(n+1)9^{n+1}} = 8 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{9^n n}.$$

冪級数は項別積分しても収束半径は変わらないので、 $\rho = 9$.

(e) $r(z)$ を部分分数分解する。その計算は後回しにして、結果を書くと

$$r(z) = 7 + 6z + \frac{5}{z+4} + \frac{2}{z-1} + \frac{3}{(z-1)^2}.$$

$a \neq 0$ に対して、等比級数の和の公式から

$$\frac{1}{z-a} = -\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1-z/a} = -\frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{a}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a^{n+1}} z^n.$$

この級数が収束する \Leftrightarrow |公比| $< 1 \Leftrightarrow |z/a| < 1 \Leftrightarrow |z| < |a|$. ゆえに収束半径は $|a|$. ゆえに

$$\frac{1}{z+4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+1}} z^n \quad (\text{収束} \Leftrightarrow |z| < 4).$$

$$\frac{1}{z-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad (\text{収束} \Leftrightarrow |z| < 1).$$

$$\frac{1}{(z-1)^2} = -\left(\frac{1}{z-1}\right)' = -\left(-\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n \quad (\text{収束半径} = 1).$$

ゆえに

$$\begin{aligned} r(z) &= 7 + 6z + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5(-1)^n}{4^{n+1}} z^n - 2 \sum_{n=0}^{\infty} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} 3(n+1) z^n \\ &= 7 + 6z + \frac{5}{4} - \frac{5}{16} z - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{5(-1)^n}{4^{n+1}} z^n - 2 - 2z - \sum_{n=2}^{\infty} 2z^n + 3 + 6z + \sum_{n=2}^{\infty} 3(n+1) z^n \\ &= \frac{37}{4} + \frac{155}{16} z + \sum_{n=2}^{\infty} \left(3n+1 + \frac{5(-1)^n}{4^{n+1}}\right) z^n. \end{aligned}$$

(f の定義式を見て $f(0) = \frac{37}{4}$)

収束半径が 1, 4 の冪級数の和なので、 $\rho = 1$.

$r(z)$ の部分分数分解 $r(z)$ の分子 $n(z) := 6z^4 + 19z^3 - 21z^2 - 26z + 37$ を分母 $d(z) := z^3 + 2z^2 - 7z + 4$ で割ると、商が $6z + 7$, 余りが $7z^2 - z + 9$. つまり

$$n(z) = d(z)(6z + 7) + 7z^2 - z + 9.$$

ゆえに

$$r(z) = \frac{n(z)}{d(z)} = \frac{(6z+7)d(z) + 7z^2 - z + 9}{d(z)} = 6z + 7 + \frac{7z^2 - z + 9}{d(z)}.$$

$d(z) = (z-1)^2(z+4)$ であるから

$$\frac{7z^2 - z + 9}{d(z)} = \frac{A}{z+4} + \frac{B}{z-1} + \frac{C}{(z-1)^2}$$

を満たす定数 A, B, C が存在する。分母を払った

$$7z^2 - z + 9 = A(z-1)^2 + B(z-1)(z+4) + C(z+4)$$

は恒等式である。

$z = 1$ を代入して $15 = 5C$ より $C = 3$.

$z = -4$ を代入して $125 = 25A$ より $A = 5$.

最高次の係数を比較して $7 = A + B$ より $B = 2$.

ゆえに

$$r(z) = 6z + 7 + \frac{5}{z+4} + \frac{2}{z-1} + \frac{3}{(z-1)^2}$$

Mathematica の利用

```
q[z_]:=6z^4+19z^3-21z^2-26z+37
```

```
p[z_]:=z^3+2z^2-7z+4
```

$q(z)$ を $p(z)$ で割った商と余りを求めるには

```
PolynomialQuotientRemainder[q[z],p[z],z]
```

$q(z)/p(z)$ の部分分数分解を求めるには、割り算を飛ばして

```
Apart[q[z]/p[z]]
```

とすれば良い。

0 の周りに冪級数展開したときの n 次の項の係数は

```
SeriesCoefficient[q[z]/p[z],{z,0,n}]
```

で求まる。

```
In[43]:= q[z_] := 6 z ^ 4 + 19 z ^ 3 - 21 z ^ 2 - 26 z + 37
```

```
p[z_] := z ^ 3 + 2 z ^ 2 - 7 z + 4
```

```
PolynomialQuotientRemainder[q[z], p[z], z]
```

多項式を割った商と剰余

```
Out[45]= {7 + 6 z, 9 - z + 7 z^2}
```

```
In[46]:= Apart[q[z] / p[z]]
```

有理式の部分分数分解

```
Out[46]= 7 + \frac{3}{(-1+z)^2} + \frac{2}{-1+z} + 6 z + \frac{5}{4+z}
```

```
In[48]:= SeriesCoefficient[q[z] / p[z], {z, 0, n}]
```

級数の係数

```
Out[48]= \begin{cases} \frac{1}{4} \left( 4 + 5 \left( -\frac{1}{4} \right)^n + 12 n \right) & n > 1 \\ \frac{155}{16} & n = 1 \\ \frac{37}{4} & n = 0 \\ 0 & \text{True} \end{cases}
```

(2)

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{1}{2+3z} = \frac{1}{2+3(z-4+4)} = \frac{1}{14+3(z-4)} = \frac{1}{14} \cdot \frac{1}{1+\frac{3}{14}(z-4)} = \frac{1}{14} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{3}{14}(z-4) \right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{14^{n+1}} (z-4)^n. \end{aligned}$$

等比級数であるから、

$$\text{収束する} \Leftrightarrow |\text{公比}| < 1 \Leftrightarrow \left| -\frac{3}{14}(z-4) \right| < 1 \Leftrightarrow \frac{3}{14}|z-4| < 1 \Leftrightarrow |z-4| < \frac{14}{3}.$$

ゆえに収束円は $D(4; \frac{14}{3})$. ■