複素関数・同演習 宿題 No. 5 (2024 年 10 月 23 日出題, 10 月 29 日 13:30 までに PDF 形式で提出)

__年__ 組____番　氏名______________ (解答は裏面も使用可, A4 レポート用紙に書いても可)

問 5 (1) 2 変数実数値関数 $f(x,y)$ が点 (a,b) で (全) 微分可能であるとはどういうことか。定義を述べよ。(微積分で学んだはずのことであるが、10 月 22 日の授業で思い出して使った。)

(2) Ω は $\mathbb{C}$ の領域、$f:\Omega\to\mathbb{C}$ は正則、f の実部・虚部を u, v とするとき、v は調和関数であることを示せ (10 月 23 日の授業中に、u が調和関数であることを証明した (はず)。それを真似する。)。

(3) u が v の共役調和関数であるための条件を書け。同時に v が u の共役調和関数であるとき、どうなっているか？

問 5 解説　まずは解答例 (一応模範解答と呼んでおく)。

(1)　(f が実数値と書いておくべきでした。) f が (a,b) で微分可能とは、

$$(\exists p,q\in\mathbb{R})\qquad \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{f(a+h_1,b+h_2)-f(a,b)-(ph_1+qh_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=0$$

が成り立つことをいう。

f が実数値ではなく、m 次元ベクトル値の場合は、m 行 2 列の行列が存在して…となる (一般の場合と変わらないので略する)。

(2)　一般に正則関数は無限回微分可能なので (講義で証明するのは結構後になります)、u, v は C^2 級である。Cauchy-Riemann 方程式 $v_x=-u_y$, $v_y=u_x$ を代入すると

$$\triangle v=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=0.$$

最後の等号は、C^2 級の関数の 2 階偏導関数は偏微分の順序によらないことによる。

(3)　u が v の共役調和関数であるとは、u が調和関数であり、かつ

$$v_x=u_y,\quad v_y=-u_x$$

を満たすことをいう。同時に v が u の共役調和関数であれば

$$u_x=v_y,\quad u_y=-v_x.$$

連立すると

$$u_x=u_y=v_x=v_y=0.$$

ゆえに u,v の定義域内の任意の領域において (定義域自体が領域ならば、定義域の全体で)、u も v も定数関数である。■

提出された解答例を見て

u と v の書き分けについて、まだ赤ペンを入れる必要があった。改めて u と v, $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$, u と v, U と V, $\mathscr{U}$ と $\mathscr{V}$ を見てみよう。文字の左側で区別はできない (同じだったりする) が、右側は、u の場合は下までおりていて、v の場合は上でとまっている、というのは首尾一貫している。

(1) は、授業で「2 変数関数の全微分可能はこういう定義でした」と話したので (正則関数の実部・虚部の全微分可能性をいうところで)、それがちゃんと書けるかな、ということで出題したのだが、自分で資料に当たって書いた、という人が多かったようである。

例えば、次のようなものがあった。

提出された宿題から解答例 1

> $f(x,y)$ が (a,b) で全微分可能であるとは、ある $A,B\in\mathbb{R}$ が存在して、絶対値が十分小さい h,k に対し、$f(a+h,b+k)-f(a,b)=Ah+Bk+\varepsilon(h,k)\sqrt{h^2+k^2}$ かつ $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)}\varepsilon(h,k)=0$ とできることをいう。

なるほど。

まず「絶対値が十分小さい h,k に対し」は、f の定義域が開集合である場合は、書く必要がない。今回、その辺が曖昧だけれど、それを前提とすれば削除して良い。

上の解答例は正解としていいけれど (「できる」という言葉は個人的にあまり好きでないけれど、どういう意味かわかるだろうか？) $\varepsilon(h,k)$ は何か説明できるだろうか？式変形すれば

$$\varepsilon(h,k)=\frac{f(a+h,b+k)-f(a,b)-Ah-Bk}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

ということであると分かる。気づいたでしょうか。だったら

$$(\heartsuit)\qquad \varepsilon(h,k)=\frac{f(a+h,b+k)-f(a,b)-Ah-Bk}{\sqrt{h^2+k^2}}\quad \text{で } \varepsilon(h,k) \text{ を定めると}\quad \lim_{(h,k)\to(0,0)}\varepsilon(h,k)=0$$

と書けば良いのに、と私は思うのだけれど、どうでしょう。せめて、

提出された宿題から解答例 1 書き換えてみる

$f(x,y)$ が (a,b) で全微分可能であるとは、ある $A,B\in\mathbb{R}$ が存在して、絶対値が十分小さい h,k に対し、$f(a+h,b+k)-f(a,b)=Ah+Bk+\varepsilon(h,k)\sqrt{h^2+k^2}$ で $\varepsilon(h,k)$ を定めると、$\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)}\varepsilon(h,k)=0$ が成り立つことをいう。

と書く方がわかりやすくて親切な気がする。(似たような話は Taylor の定理の剰余項にもある。)

$(\heartsuit)$ をしばらくながめると、$\varepsilon(h,k)$ など定義する必要はない、ということが分かる。つまり

提出された解答例 1　書き換えてみる その 2

$f(x,y)$ が (a,b) で全微分可能であるとは、ある $A,B\in\mathbb{R}$ が存在して、

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(a+h,b+k)-f(a,b)-Ah-Bk}{\sqrt{h^2+k^2}}=0$$

が成り立つことをいう。

と書き直せる。こうすると模範解答と実質的に同じである (p, q, h_1, h_2 を A, B, h, k に変えたくらい)。

一方、次のような解答も多かった。

提出された解答例 その 2

$f(x,y)$ が (a,b) で全微分可能であるとは、ある $A,B\in\mathbb{R}$ が存在して、

$$f(a+h,b+k)-f(a,b)=Ah+Bk+o(\sqrt{h^2+k^2})\quad((h,k)\to(0,0))$$

が成り立つことをいう。

$o(\sqrt{h^2+k^2})$ は Landau の little-o notation (ランダウの小さい o 記法) というやつだけれど、書いた人は意味がわかっているのだろうか。

$$f(x)=o(g(x))\quad(x\to a)\quad\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}\quad\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=0$$

という意味である。landau の記法は知っておくべきことだけど、1 回使うだけならば、lim で書く方が良いと思う (微積分の説明に持ち出すべきではないと考えている)。lim を使って書くと、やはり上の解答例と同じことになる。

次のようなのもあった。

提出された解答例 その 3

$f(x,y)$ が (a,b) で全微分可能であるとは、f が (a,b) で偏微分可能であり、かつ

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(a+h,b+k)-f(a,b)-f_x(a,b)h-f_y(a,b)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

が成り立つことをいう。

f が偏微分可能であることを仮定に加えて、定数 A, B を具体的な $f_x(a,b)$, $f_y(a,b)$ に変えた、ということである。これも (条件として同値なので) 正解として良いけれど、f が偏微分可能であることは、全微分可能の定義に含めないのが普通のテキストのやり方である。そうしておいて「f が (a,b) で全微分可能ならば、実は偏微分可能で、定理に現れる A, B は、実は $A=f_x(a,b)$, $B=f_y(a,b)$ に他ならない。」という定理を別に示すのが標準的な説明である。全微分可能の定義に偏微分可能であることを含めてしまうと、考えている関数が全微分可能であることを定義に基づいて確かめようとする場合に、偏微分可能なことの確認を毎回することになって、それは本来やる必要がないことなので、面倒なだけである。