複素関数・同演習 宿題 No. 3　(2024年10月9日出題, 10月15日(火)13:30までにOh-o! Meijiに提出)

__年__ 組____番　氏名______________　(解答は裏面も使用可, A4レポート用紙に書いても可)

問 3　(1) 1 と -1 の 6 乗根を 10/2 の講義の定理に基づく方法と、多項式の因数分解に基づく方法の 2 通りで求めよ (極形式の形、$\sqrt{\quad}$ を使った形、両方求めること)。また、-1 の 6 乗根を複素平面上に図示せよ。

(2) $-i$ の 3 乗根を求めよ。

(3) 以下の各 $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ に対して、f の実部・虚部 u, v を求めよ。(b) と (c) については、偏微分して、Cauchy-Riemann 方程式 $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ が成り立つことを確かめよ。

(a) $f(z) = z^3$　$(\Omega = \mathbb{C})$　(b) $f(z) = \dfrac{1}{z^2}$　$(\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\})$　(c) $f(z) = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$　$(\Omega = \mathbb{C})$

問 3 解説

(1) 1 の極形式は $1 = 1 \cdot e^{i \cdot 0}$ であるから、1 の 6 乗根は

$$\begin{aligned}\sqrt[6]{1} e^{i\left(\frac{0}{6}+k\frac{2\pi}{6}\right)} &= e^{i\frac{k\pi}{3}} \quad (k=0,1,2,\cdots,5) \\ &= 1, \frac{1+\sqrt{3}i}{2}, \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}, -1, \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}, \frac{1-\sqrt{3}i}{2}.\end{aligned}$$

一方

$$z^6 - 1 = (z^3+1)(z^3-1) = (z-1)(z^2+z+1)\cdot(z+1)(z^2-z+1)$$

であるから、$z^6 = 1$ の解として

$$z = 1, \frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}, -1, \frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}.$$

-1 の極形式は $-1 = 1 \cdot e^{i\pi}$ であるから、-1 の 6 乗根は

$$\begin{aligned}\sqrt[6]{1} e^{i\left(\frac{\pi}{6}+k\frac{2\pi}{6}\right)} &= e^{i\frac{(2k+1)\pi}{6}} \quad (k=0,1,2,\cdots,5) = e^{i\pi/6}, e^{i\pi/2}, e^{i5\pi/6}, e^{i7\pi/6}, e^{i3\pi/2}, e^{i11\pi/6} \\ &= \frac{\sqrt{3}+i}{2}, i, \frac{-\sqrt{3}+i}{2}, \frac{-\sqrt{3}-i}{2}, -i, \frac{\sqrt{3}-i}{2}.\end{aligned}$$

一方

$$\begin{aligned}z^6+1 &= (z^2+1)(z^4-z^2+1) = (z^2+1)(z^4+2z^2+1-3z^2) = (z^2+1)((z^2+1)^2-(\sqrt{3}z)^2) \\ &= (z^2+1)(z^2+\sqrt{3}z+1)(z^2-\sqrt{3}z+1)\end{aligned}$$

であるから、$z^6 = -1$ の解は (3 つの 2 次方程式の解を合わせて)

$$z = \pm i, \frac{-\sqrt{3}\pm i}{2}, \frac{\sqrt{3}\pm i}{2}.$$

(ついでに 1 の 6 乗根の方の図もつけておく。)

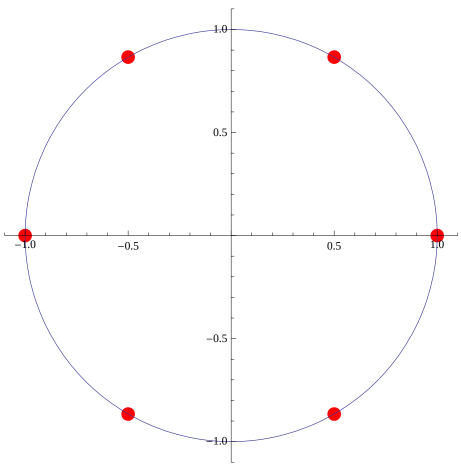

図 1: $z^6 = 1$ の解

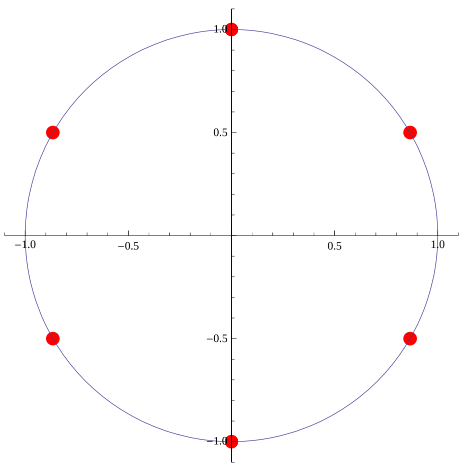

図 2: $z^6 = -1$ の解

(2) $-i = 1 \cdot e^{i3\pi/2}$ は $-i$ の極形式であるから、$-i$ の 3 乗根は

$$e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}k\right)} \quad (k=0,1,2) = e^{i\frac{\pi}{2}}, e^{i\frac{7\pi}{6}}, e^{i\frac{11\pi}{6}} = i, \frac{-\sqrt{3}-i}{2}, \frac{\sqrt{3}-i}{2}.$$

(3) Cauchy-Riemann 方程式は間違えのない形で覚えること (間違えて、定期試験で大減点という悲劇が起こる)。こういうのはサボらずに書くことを強く勧める。

(a)

$$f(x+iy) = (x+iy)^3 = x^3 + 3x^2(iy) + 3x(iy)^2 + (iy)^3 = x^3 - 3xy^2 + (3x^2y - y^3)i$$

であるから、f の実部・虚部 u, v は

$$u(x,y) = x^3 - 3xy^2, \quad v(x,y) = 3x^2y - y^3.$$

(これ以降は今回は要求しなかった。) ゆえに

$$u_x = 3x^2 - 3y^2, \quad u_y = -6xy, \quad v_x = 6xy, \quad v_y = 3x^2 - 3y^2.$$

確かに $\mathbb{R}^2$ 全体で Cauchy-Riemann 方程式 $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ を満たす。

(b) (分母・分子に分母の共役複素数をかけて分母を実数化. $a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ の形にする。)

$$f(x+iy) = \frac{1}{(x+iy)^2} = \frac{(x-iy)^2}{(x+iy)^2(x-iy)^2} = \frac{x^2 - y^2 - 2xyi}{(x^2+y^2)^2}$$

であるから、f の実部・虚部 u, v は

$$u(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad v(x,y) = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

ゆえに (商の微分 $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ の計算をする)

$$u_x(x,y) = \frac{-2x(x^2 - 3y^2)}{(x^2+y^2)^3}, \quad u_y(x,y) = \frac{2y(-3x^2 + y^2)}{(x^2+y^2)^3},$$
$$v_x(x,y) = \frac{2y(3x^2 - y^2)}{(x^2+y^2)^3}, \quad v_y(x,y) = \frac{-2x(x^2 - 3y^2)}{(x^2+y^2)^3}.$$

確かに $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ で Cauchy-Riemann 方程式 $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ を満たす。
(2024/10/28 追記) 偏導関数の計算で、間違える人、遠回りする人が多かったので (分母・分子が (x^2+y^2) で約分できることに気づかない)、途中経過を見せておく。

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{(x^2+y^2)^2 \cdot (2x) - 2(x^2+y^2)(2x) \cdot (x^2 - y^2)}{(x^2+y^2)^4} = \frac{(x^2+y^2) \cdot (2x) - 4x \cdot (x^2 - y^2)}{(x^2+y^2)^3} \\ &= \frac{2x\left[(x^2+y^2 - 2(x^2 - y^2)\right]}{(x^2+y^2)^3} = \frac{2x(-x^2 + 3y^2)}{(x^2+y^2)^3}. \end{aligned}$$

u_y の計算は同様なので略。

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{(x^2+y^2)^2 \cdot (-2y) - 2(x^2+y^2)(2x) \cdot (-2xy)}{(x^2+y^2)^4} = \frac{(x^2+y^2) \cdot (-2y) - 2(2x) \cdot (-2xy)}{(x^2+y^2)^3} \\ &= \frac{2y(-x^2 - y^2 + 4x^2)}{(x^2+y^2)^3} = \frac{2y(3x^2 - y^2)}{(x^2+y^2)^3}. \end{aligned}$$

v_y の計算も同様なので略。
この計算は間違えやすいので、4 つとも計算して、Cauchy-Riemann の方程式が成り立つことを真面目にチェックすることを強く勧める。u_x を間違えて、それと同じ v_y が書いてあったりするが、もしサボったのだとしたら、折角の確認の機会を捨てているわけで、それはやめることを勧める。

(c) 実は $f(z)=\sin z$ であるが (ずっと後で説明する)、解答するためには必要ない。複素指数関数の定義 $e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y)$ を用いて、ていねいに計算する。双曲線関数 $\cosh x=(e^x+e^{-x})/2$, $\sinh x=(e^x-e^{-x})/2$ を使うと式が簡単になって楽である。使えるようにしておこう。

$$\begin{aligned}f(x+yi)&=\frac{e^{i(x+yi)}-e^{-i(x+yi)}}{2i}=\frac{1}{2i}(e^{-y+ix}-e^{y-ix})=\frac{1}{2i}\left[(e^{-y}(\cos x+i\sin x)-e^{y}(\cos x-i\sin x)\right]\\&=\frac{\cos x(e^{-y}-e^{y})}{2i}+i\frac{(e^{-y}+e^{y})\sin x}{2i}=\sin x\cosh y+i\cos x\sinh y.\end{aligned}$$

であるから、f の実部・虚部 u, v は

$$u(x,y)=\sin x\cosh y,\quad v(x,y)=\cos x\sinh y.$$

ゆえに ($(\cosh)'=\sinh$, $(\sinh)'=\cosh$ という公式を用いて)

$$u_x=\cos x\cosh y,\quad u_y=\sin x\sinh y,\quad v_x=-\sin x\sinh y,\quad v_y=\cos x\cosh y.$$

確かに $\mathbb{R}^2$ 全体で Cauchy-Riemann 方程式 $u_x=v_y$, $u_y=-v_x$ を満たす。■

Mathematica で検算

```
f[z_]:=z^3
ComplexExpand[Re[f[x+I y]]]
ComplexExpand[Im[f[x+I y]]]
u[x_,y_]:=ComplexExpand[Re[f[x+I y]]]
v[x_,y_]:=ComplexExpand[Im[f[x+I y]]]
D[u[x,y],{{x,y}}]
D[v[x,y],{{x,y}}]

f[z_]:=1/z^2
Simplify[ComplexExpand[Re[f[x+I y]]]]
Simplify[ComplexExpand[Im[f[x+I y]]]]
u[x_,y_]:=Simplify[ComplexExpand[Re[f[x+I y]]]]
v[x_,y_]:=Simplify[ComplexExpand[Im[f[x+I y]]]]
Simplify[D[u[x,y],{{x,y}}]]
Simplify[D[v[x,y],{{x,y}}]]

f[z_]:=(Exp[I z]-Exp[-I z])/(2I) あるいは f[z_]:=Sin[z]
Simplify[ComplexExpand[Re[f[x+I y]]]]
Simplify[ComplexExpand[Im[f[x+I y]]]]
u[x_,y_]:=Simplify[ComplexExpand[Re[f[x+I y]]]]
v[x_,y_]:=Simplify[ComplexExpand[Im[f[x+I y]]]]
Simplify[D[u[x,y],{{x,y}}]]
Simplify[D[v[x,y],{{x,y}}]]
```