

2019 年度 複素関数, 複素関数演習 期末試験問題

2020 年 1 月 27 日 (月曜) 13:30~15:30 施行

担当 桂田 祐史

ノート等持ち込み禁止, 解答用紙 (2 枚) のみ提出

問 7 は必ず解答せよ。それ以外の問から 5 つを選択して (全部で 6 つの問に) 解答せよ。各問の解答の順番は自由である (ただし 1 つの問の解答は一箇所にまとめて書くこと)。

問 1.  $z = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} + i\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$  に対し、 $z^2$ ,  $z$  の極形式,  $z^{24}$ ,  $\text{Log } z$  を求めよ (極形式以外は  $a+bi$  あるいは  $a$  あるいは  $bi$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ), いずれかの形に表せ)。

問 2. (1)  $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ ,  $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$  と指数法則  $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$  を用いて、 $\sin(z_1+z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$  を証明せよ。(2)  $f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$  を  $f(z) = \log |z|$  で定めるとき、 $f$  は任意の点で微分可能でないことを示せ。

問 3. (1) 冪級数の収束半径の定義を述べよ (収束半径を特徴付ける条件を書け)。(2) 冪級数  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$  が収束するための必要十分条件を書け (証明をする必要はない)。それを使って (1) に書いた条件を確かめることで、 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$  の収束半径が 1 であることを示せ。(3) 冪級数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^{2n-1}}{(-2)^n n}$  の収束円を求めよ。

問 4. 複素数の範囲で以下の方程式を解け。結果は  $a+bi$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) の形で表せ。

(1)  $z^8 + 1 = 0$  (2)  $\cos z = \sin z$

問 5. 関数  $f(z) := \frac{z^4 - 7z^3 + 10z^2 + 7z + 16}{z^3 - 9z^2 + 24z - 16}$  について、以下のものを求めよ。

(1) 2 のまわりの Laurent 展開と収束する  $z$  の範囲 (2)  $A(4; 3, +\infty)$  における Laurent 展開

問 6. 次の関数  $f$  に対して  $\int_{|z|=1} f(z) dz$  を求めよ。

(1)  $n \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{Z}$  とするとき、 $f(z) = \frac{(z+1)^n}{z^r}$  (2)  $f(z) = z^4 \sin \frac{1}{z}$

問 7. 留数計算を利用して、次の定積分の値を求めよ。(1)  $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4}{(x^2+1)^4} dx$  (2)  $J = \int_0^{\infty} \frac{\cos(\sqrt{2}\pi x)}{x^4+1} dx$

問 8. 以下の (a)~(d) から 1 つの命題を選んで証明せよ。

(a) 複素関数  $P$  と  $Q$  が点  $c$  を含むある開集合  $\Omega$  で正則であり、 $c$  が  $P$  の 1 位の零点であるとき、 $c$  は  $f := \frac{Q}{P}$  の高々 1 位の極であり、 $\text{Res}(f; c) = \lim_{z \rightarrow c} (z-c) \frac{Q(z)}{P(z)} = \frac{Q(c)}{P'(c)}$ .

(b)  $p(z), q(z) \in \mathbb{C}[z]$ ,  $f(z) = \frac{q(z)}{p(z)}$ ,  $\deg p(z) \geq \deg q(z) + 2$ ,  $(\forall x \in \mathbb{R}) p(x) \neq 0$  ならば、 $\sum_{c \text{ は } f \text{ の極}} \text{Res}(f; c) = 0$ .

(c)  $r > 0$ ,  $f: A(0; 0, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < r\} \rightarrow \mathbb{C}$  は正則、かつ  $0 < |z| < r$  を満たす任意の  $z$  に対して  $f(-z) = f(z)$  が成り立つとき、 $\text{Res}(f; 0) = 0$ .

(d)  $c, a \in \mathbb{C}, r > 0$ ,  $f: \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z-c| < r\} \rightarrow \mathbb{C}$  は正則とするととき  $\text{Res}(f; c) = \text{Res}(f(z+a); c-a)$ .

計算ミスをしてはまずいところで、自分で発見できない人が多いような気がする。

- そこで間違えると後々響くようなところと、そうでないところを区別して、前者の場合は入念にチェックすべき。  
問1の $z^2$ の計算とか、問5の部分分数分解とか。
- 積分の結果をチェックするのに微分するとか、逆方向の計算が比較的やりやすいようなときは、やってみるとか。

120分あるのだから、計算結果の確認に時間を割くべき。

**問1** ひんと「 $z^2$ を計算すると簡単になる。簡単でなければ計算間違い。」  $5 \times 4 = 20$ 点

$$\begin{aligned} z^2 &= \left( \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} + i \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \right)^2 = \left( \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \right)^2 - \left( \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \right)^2 + 2i \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \\ &= \frac{2+\sqrt{3}}{4} - \frac{2-\sqrt{3}}{4} + i \frac{\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{4} + i \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3}+i}{2}. \end{aligned}$$

$z^2 = e^{i\pi/6}$  であるから、 $z$  は  $\pm e^{i\pi/12}$  のいずれかであるが、 $z$  の実部・虚部が正であることから、 $z = e^{i\pi/12}$ 。  
 $z^{24} = (z^2)^{12} = e^{2\pi i} = 1$ 。また

$$\text{Log } z = \log |z| + i \text{Arg } z = \log 1 + i \cdot \frac{\pi}{12} = i \frac{\pi}{12}. \blacksquare$$

例年よりは少しひねったけれど、平均点はあまり変化なかった。例年のこの問1を簡単と思っている人は多いかもしれないけれど、実は平均点は得点率で言って毎年50%くらい(全然稼げる問題になっていない)。対数関数の主値を尋ねているのに無限個の値を書いたりとか。平方根なのに値を1つしか書かないとか(今年度は平方根のうちの一つを答える問題だけど、反対に2つの値を書いた人の多かったこと)。絶対値を間違えるとか(今回も  $|z|=1$  と思わずに解いている人が少なからずいて驚いた。絶対値苦手ですね。  $|x+iy| = \sqrt{x^2+y^2}$  なんてやらかす人もいるし。  $|x+yi| = \sqrt{x^2+y^2}$  は間違えないで下さい。)。過去問を解いて、正解と比べれば自分の勘違いに気づくと思うのだけれど。こういう問題を馬鹿にしたらいけません。解答と照らし合わせて違っていたら真剣に反省すること。

**問2** のーひんと  $10 \times 2 = 20$ 点

(1)

$$\begin{aligned} &\sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2 \\ &= \frac{e^{iz_1} - e^{-iz_1}}{2i} \cdot \frac{e^{iz_2} + e^{-iz_2}}{2} + \frac{e^{iz_1} + e^{-iz_1}}{2} \cdot \frac{e^{iz_2} - e^{-iz_2}}{2i} \\ &= \frac{1}{4i} \left( e^{i(z_1+z_2)} + e^{i(z_1-z_2)} - e^{i(-z_1+z_2)} - e^{i(-z_1-z_2)} + e^{i(z_1+z_2)} - e^{i(z_1-z_2)} + e^{i(-z_1+z_2)} - e^{i(-z_1-z_2)} \right) \\ &= \frac{1}{4i} \left( e^{i(z_1+z_2)} - e^{i(-z_1-z_2)} + e^{i(z_1+z_2)} - e^{i(-z_1-z_2)} \right) \\ &= \frac{1}{2i} \left( e^{i(z_1+z_2)} - e^{i(-z_1-z_2)} \right) \\ &= \sin(z_1 + z_2). \end{aligned}$$

(2)  $f(x+yi) = \log |x+yi| = \log \sqrt{x^2+y^2}$  ( $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ) の実部・虚部を  $u(x,y), v(x,y)$  とするとき、

$$u(x,y) = \log \sqrt{x^2+y^2} = \frac{1}{2} \log(x^2+y^2), \quad v(x,y) = 0.$$

$(x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$  は  $C^1$  級であるから微分可能である。ゆえに、 $f$  が  $z = x + yi$  で微分可能であるためには、Cauchy-Riemann の方程式

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

が成り立つことが必要十分である。これは

$$\frac{x}{x^2 + y^2} = 0, \quad \frac{y}{x^2 + y^2} = 0$$

であり、 $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  では、同時には成り立たない。ゆえに任意  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  に対して、 $f$  は  $z$  で微分可能ではない。■

(1) について。3, 4 行目をサボる人が多かった。計算用紙に書いた？証明とは何かを誤解している気がする。そう言う答えは減点する。

$e^{iz} = \cos z + i \sin z$  という式を使った人が多いけれど、その根拠は何だろう？授業で  $\theta \in \mathbb{R}$  のとき、 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$  はほぼ定義扱いしたけれど。「 $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ ,  $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$  ... を用いて」のように証明に何を使うか指定してあるときは、 $e^{iz} = \cos z + i \sin z$  を使って良いか考えるべきだ。 $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$  と  $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$  からすぐ導けることが分かる。それを全く省略するのはまずい。そう言う答えはちょっと減点。

(2) について。「実数値の正則関数は定数関数である」という定理を思い出せば、 $f$  は実数値関数であり、定数関数ではないので、 $f$  は正則でない、ということが分かる。そう書いてもほぼ満点にするつもりだったけれど、そう言う答えはなかった。Cauchy-Riemann 方程式を使うと気づいた人は多かったが、 $u$  が正しく計算できた人が少ない。 $u = \log|x|$  と間違えたりとか。極座標形式の Cauchy-Riemann 方程式 ( $u_r = \frac{1}{r}v_\theta, u_\theta = -rv_r$ ) というのがあり、それを使おうとした人がいるけれど、正しく覚えていなかった。極座標形式の Cauchy-Riemann 方程式は、(個人的にはマイナーな公式だと考えているので) 覚えることは勧めない。(そんなの覚えるくらいならば、収束半径の定義を覚えて欲しい。10000 倍そちらの方が大事。) 講義ノートに書いてみたけれど。

$u_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, u_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, v_x = 0, v_y = 0$  から、 $u_x \neq v_y$  かつ  $u_y \neq -v_x$  であると書いた人がいるけれど、それはおかしい。 $x = 0$  ならば  $u_x = v_y$  であるし、 $y = 0$  ならば  $u_y = -v_x$  である。だから「 $u_x \neq v_y$  かつ  $u_y \neq -v_x$ 」は真でない。「 $u_x \neq v_y$  または  $u_y \neq -v_x$ 」は真であるが。

### 問3 $5 + (2 + 3) + 10 = 20$ 点

(1)  $\rho \in [0, +\infty) \cup \{\infty\}$  が  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$  の収束半径であるとは、

$$(|z-c| < \rho \Rightarrow z \text{ で収束}) \quad \wedge \quad (|z-c| > \rho \Rightarrow z \text{ で発散})$$

が成り立つことをいう。

(2)  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$  が収束するには、 $|z| < 1$  であることが必要十分である。(すなわち  $|z| < 1$  ならば収束し、収束するならば  $|z| < 1$ 。) ゆえに  $|z| < 1$  ならば収束し、 $|z| > 1$  ならば発散する (背理法による。もし収束するならば、 $|z| < 1$  であり、 $|z| > 1$  に矛盾する。)。ゆえに収束半径は 1。

(3)  $\zeta := (z-1)^2$  とおくと

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^{2n-1}}{n(-2)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^{2n+1}}{(n+1) \cdot (-2)^{n+1}} = (z-1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^{2n}}{(n+1) \cdot (-2)^{n+1}} = (z-1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta^n}{(n+1) \cdot (-2)^{n+1}}$$

(この等式変形は、収束する場合のみならず、発散する場合も成り立つ。) 右辺の  $\zeta$  の冪級数の係数  $a_n = \frac{1}{(n+1)(-2)^{n+1}}$  について、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{(n+1) \cdot 2^{n+1}} \cdot \frac{(n+2) \cdot 2^{n+2}}{1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+2/n) \cdot 2}{1+1/n} = 2.$$

ゆえに収束半径は 2. ゆえに  $|\zeta| < 2$  ならば収束し、 $|\zeta| > 2$  ならば発散する。ゆえに  $|z-1| < \sqrt{2}$  ならば収束し、 $|z-1| > \sqrt{2}$  ならば発散する。ゆえに収束円は  $D(1; \sqrt{2})$ . ■

収束半径を説明できない人、間違っただけで覚える人、言葉を使い間違える人が多い。足元がしっかりしていないと、上に物を積みません。

間違い: (収束半径が  $\rho$  であるとは)  $|z-c| < \rho$  の時収束、 $|z-c| \geq \rho$  の時発散

間違い: (収束半径が  $\rho$  であるとは)  $|z-c| < \rho \Leftrightarrow$  収束、かつ  $|z-c| > \rho \Leftrightarrow$  発散

間違い: 収束半径は 2 であるから、収束  $\Leftrightarrow |\zeta| < 2$

どれも本当はひどい間違いなのだけれど、間違えている人はそう言われてもピンと来ないのかも。

収束半径が  $\rho$  とは、 $|z-c| < \rho$  ならば収束し、かつ  $|z-c| > \rho$  ならば発散すること

d'Alembert の公式だけで解くことが出来るような問題を期末試験に出す気はない。それは微積でも習っているだろうし(重ねて尋ねる気はない)、それでは対処できないケースが非常に多いので(微積の場合、典型的な関数の Taylor 展開の収束半径を調べるのに、割りと役立つという事情はあるけれど、関数論としてはそんなの知ったことではない)。

それから

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^{2n-1}}{n(-2)^n} = \frac{1}{z-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^{2n}}{n \cdot (-2)^n}$$

と変形する人が多かったけれど、0 になることのある式を分母に書いて、吟味もしないのはどういう神経しているのかなあ。

#### 問 4 $10 \times 2 = 20$ 点

(1)  $-1$  の 8 乗根、つまり  $z^8 = -1 = 1 \cdot e^{i\pi}$  の解は、(a) 指数形式を利用すると、 $e^{i(\frac{\pi}{8} + k\frac{2\pi}{8})} = e^{i\frac{(2k+1)\pi}{8}}$  ( $k = 0, 1, \dots, 7$ ) であるから、

$$z = e^{i\frac{\pi}{8}}, e^{i\frac{3\pi}{8}}, e^{i\frac{5\pi}{8}}, e^{i\frac{7\pi}{8}}, e^{i\frac{9\pi}{8}}, e^{i\frac{11\pi}{8}}, e^{i\frac{13\pi}{8}}, e^{i\frac{15\pi}{8}}.$$

ここで止まったら 5 点。

これらは、以下に示すように  $\sqrt{\quad}$  を使って具体的に書けるけれど、少し面倒である。

(b) 代数的に解くのもあまり簡単ではないが、8 乗根は、4 乗根の平方根であることを用いると少し見通しが良い。 $X = z^2$  とおくと、

$$z^8 + 1 = X^4 + 1 = (X^2 + \sqrt{2}X + 1)(X^2 - \sqrt{2}X + 1).$$

であるから、

$$z^2 = X = \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{2}i}{2}, \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{2}i}{2}.$$

$z^2 = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}i}{2}$  の解は、 $x^2 - y^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $2xy = \frac{\sqrt{2}}{2}$  を解いて、次のように求まる。

$$z = \pm \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}} + \sqrt{2 - \sqrt{2}}i}{2}.$$

$z^2 = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}i}{2}$  の解は、その共役複素数であるので、

$$z = \pm \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}} - \sqrt{2 - \sqrt{2}}i}{2}.$$

$z^2 = \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{2}i}{2}$  の解は、 $x^2 - y^2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $2xy = \frac{\sqrt{2}}{2}$  を解いて、次のように求める。

$$z = \pm \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}} + \sqrt{2 + \sqrt{2}}i}{2}.$$

$z^2 = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{2}i}{2}$  の解は、その共役複素数であるので、

$$z = \pm \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}} - \sqrt{2+\sqrt{2}}i}{2}.$$

ゆえに  $-1$  の 8 乗根は

$$z = \pm \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}} + \sqrt{2-\sqrt{2}}i}{2}, \pm \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}} - \sqrt{2-\sqrt{2}}i}{2}, \pm \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}} + \sqrt{2+\sqrt{2}}i}{2}, \pm \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}} - \sqrt{2+\sqrt{2}}i}{2}.$$

(2)

$$\begin{aligned} \cos z = \sin z &\Leftrightarrow \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \Leftrightarrow i \left( X + \frac{1}{X} \right) = X - \frac{1}{X} \\ &\Leftrightarrow i(X^2 + 1) = X^2 - 1 \Leftrightarrow X^2 = \frac{-1-i}{i-1} \\ &\Leftrightarrow X^2 = \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{1+1} = i = 1 \cdot e^{i\pi/2} \\ &\Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{Z}) \quad 2iz = \log |i| + i \left( \frac{\pi}{2} + 2n\pi \right) = \left( 2n + \frac{1}{2} \right) \pi i \\ &\Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{Z}) \quad z = \left( n + \frac{1}{4} \right) \pi. \blacksquare \end{aligned}$$

(2) で解がないとか、解は  $\frac{\pi}{4}$  とかいう答案が少なくないのだけれど、高校数学 (実数の範囲だけで解を探す) で考えたって変だと分かるよね。  $y = \sin x$  と  $y = \cos x$  のグラフは無限回交わる。

(2) で  $n$  が何であるか書かない人が少数ながらいた。大きく減点。

**問 5**  $4 + (4 \times 2) \times 2 = 20$  (部分分数分解だけに 4 点.)  $f(z)$  を部分分数分解すると

$$(1) \quad f(z) = z + 2 + \frac{3}{z-1} + \frac{1}{z-4} + \frac{4}{(z-4)^2}.$$

(1) 各項の 2 の周りの Laurent 展開を求める。実は冪級数展開できる。

$$z + 2 = 4 + (z - 2).$$

$$\frac{3}{z-1} = \frac{3}{(z-2)+1} = \frac{2}{1-(z-2)} = 3 \sum_{n=0}^{\infty} (-(z-2))^n = 3 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-2)^n.$$

これは等比級数であるから

$$\text{収束する} \Leftrightarrow |\text{公比}| < 1 \Leftrightarrow |z-2| < 1.$$

また

$$\frac{1}{z-4} = \frac{1}{(z-2)-2} = \frac{1}{-2(1-\frac{z-2}{2})} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z-2}{2} \right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-2)^n}{2^{n+1}}.$$

これも等比級数であるから

$$\text{収束する} \Leftrightarrow |\text{公比}| < 1 \Leftrightarrow \left| \frac{z-2}{2} \right| < 1 \Leftrightarrow |z-2| < 2.$$

収束冪級数は収束円の内部で項別微分できて、収束半径も変わらないので

$$\frac{1}{(z-4)^2} = -\left( \frac{1}{z-4} \right)' = -\left( -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-2)^n}{2^{n+1}} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{(z-2)^{n-1}}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \frac{(z-2)^n}{2^{n+2}} \quad (\text{収束半径} = 2).$$

まとめると

$$\begin{aligned}
 f(z) &= 4 + (z-2) + 3 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-2)^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-2)^n}{2^{n+1}} + 4 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \frac{(z-2)^n}{2^{n+2}} \\
 &= 4 + (z-2) + 3 - 3(z-2) + 3 \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n (z-2)^n - \frac{1}{2} - \frac{z-2}{4} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(z-2)^n}{2^{n+1}} \\
 &\quad + \frac{4}{2^2} + \frac{4 \cdot 2}{2^3} (z-2) + 4 \sum_{n=2}^{\infty} (n+1) \frac{(z-2)^n}{2^{n+2}} \\
 &= \frac{15}{2} - \frac{5}{4}(z-2) + \sum_{n=2}^{\infty} \left( 3(-1)^n - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{4(n+1)}{2^{n+2}} \right) (z-2)^n \\
 &= \frac{15}{2} - \frac{5}{4}(z-2) + \sum_{n=2}^{\infty} \left( 3(-1)^n + \frac{2n+1}{2^{n+1}} \right) (z-2)^n.
 \end{aligned}$$

収束する  $\Leftrightarrow |z-2| < 1$ .

(2)

$$\frac{3}{z-1} = \frac{3}{(z-4)+3} = \frac{3}{z-4} \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{3}{z-4}\right)} = \frac{3}{z-4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{(z-4)^n} = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^{n+1}}{(z-4)^{n+1}} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{(z-4)^n}.$$

この級数は等比級数であるから

$$\text{収束する} \Leftrightarrow |\text{公比}| < 1 \Leftrightarrow \left| -\frac{3}{z-4} \right| < 1 \Leftrightarrow |z-4| > 3.$$

ゆえに

$$\begin{aligned}
 f(z) &= z+2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{(z-4)^n} + \frac{1}{z-4} + \frac{4}{(z-4)^2} \\
 &= 6 + (z-4) + \frac{3}{z-4} - \frac{9}{(z-4)^2} - \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-3)^n}{(z-4)^n} + \frac{1}{z-4} + \frac{4}{(z-4)^2} \\
 &= 6 + (z-4) + \frac{4}{z-4} + \frac{-5}{(z-4)^2} - \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-3)^n}{(z-4)^n}.
 \end{aligned}$$

これは  $|z-4| > 3$  で収束する。 ■

「(1) で分母に  $z-2$  が無いのに Laurent 展開？」という意味の質問が複数あった。 $f$  は  $D(2; 1)$  で正則なので、2 の周りで冪級数展開 (Taylor 展開) 出来るので、Laurent 展開というのはおかしな気がするという意味だろうけれど、「Laurent 展開は冪級数展開の一般化。冪級数展開は、Laurent 展開の特別な場合である。」と授業で強調してある。

**問 6**  $10 \times 2 = 20$  点 (1), (2) いずれの  $f$  も  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  で正則であるから、留数定理によって、 $\int_{|z|=1} f(z) dz = 2\pi i \sum_{|c|<1} \text{Res}(f; c) = 2\pi i \text{Res}(f; 0)$ .

(1) •  $r \leq 0$  のとき、 $f$  は  $\mathbb{C}$  で正則であるから  $\int_{|z|=1} f(z) dz = 0$ .

•  $r > n$  のとき  $f(z) = \frac{1}{z^r} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^{k-r}$  には  $\frac{1}{z}$  の項はないので、 $\text{Res}(f; 0) = 0$ . ゆえに

$$\int_{|z|=1} f(z) dz = 0.$$

- $1 \leq r \leq n+1$  のとき  $f(z) = \frac{1}{z^r} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^{k-r}$  で  $k-r = -1$  となるのは  $k = r-1$  の項で、係数は  $\binom{n}{r-1}$ .  $\text{Res}(f; 0) = \binom{n}{r-1}$ . ゆえに  $\int_{|z|=1} f(z) dz = 2\pi i \binom{n}{r-1}$ .

(2)  $0 < |z|$  で

$$f(z) = z^4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \left(\frac{1}{z}\right)^{2k+1} = z^4 \left( \frac{1}{z} - \frac{1}{3!} \frac{1}{z^3} + \frac{1}{5!} \frac{1}{z^5} - \frac{1}{7!} \frac{1}{z^7} + \dots \right) = z^3 - \frac{z}{3!} + \frac{1}{5!} \frac{1}{z} - \frac{1}{7!} \frac{1}{z^3} + \dots$$

と展開できるので、

$$\int_{|z|=1} f(z) dz = 2\pi i \text{Res}(f; 0) = 2\pi i \cdot \frac{1}{5!} = \frac{\pi i}{60} \blacksquare$$

### 問7 $10 \times 2 = 20$ 点

(1)

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4}{(x^2+1)^4} dx = \frac{\pi}{16}.$$

$P(z) := (z^2+1)^4$ ,  $Q(z) = z^4$ ,  $\deg P(z) = 8 \geq 6 = \deg Q(z) + 2$ , ( $\forall x \in \mathbb{R}$ )  $P(x) = (x^2+1)^4 \geq (0+1)^4 = 1$  より  $P(x) \neq 0$ .  $P$  の零点は  $\pm i$ . そのうち虚部が正であるのは  $c = i$ .  $i$  は  $P$  の 4 位の零点であるから、 $f := \frac{Q}{P}$  の高々 4 位の極である。

$$\begin{aligned} I &= 2\pi i \sum_{\text{Im } c > 0} \text{Res} \left( \frac{z^4}{(z^2+1)^4}; c \right) = 2\pi i \text{Res} \left( \frac{z^4}{(z^2+1)^4}; i \right) = 2\pi i \cdot \frac{1}{3!} \lim_{z \rightarrow i} ((z-i)^4 f(z))''' \\ &= \frac{\pi i}{3} \lim_{z \rightarrow i} (z^4 (z+i)^{-4})'''. \end{aligned}$$

$$(z^4 (z+i)^{-4})' = 4z^3 (z+i)^{-4} - 4z^4 (z+i)^{-5},$$

$$\begin{aligned} (z^4 (z+i)^{-4})'' &= 12z^2 (z+i)^{-4} - 16z^3 (z+i)^{-5} - 15z^3 (z+i)^{-5} + 20z^4 (z+i)^{-6} \\ &= 12z^2 (z+i)^{-4} - 32z^3 (z+i)^{-5} + 20z^4 (z+i)^{-6}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (z^4 (z+i)^{-4})''' &= 24z (z+i)^{-4} - 48z^2 (z+i)^{-5} - 96z^2 (z+i)^{-5} + 160z^3 (z+i)^{-6} + 80z^3 (z+i)^{-6} \\ &\quad - 120z^4 (z+i)^{-7} \\ &= 24z (z+i)^{-4} - 144z^2 (z+i)^{-5} + 240z^3 (z+i)^{-6} - 120z^4 (z+i)^{-7}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= \frac{\pi i}{3} (24z (z+i)^{-4} - 144z^2 (z+i)^{-5} + 240z^3 (z+i)^{-6} - 120z^4 (z+i)^{-7}) \Big|_{z=i} \\ &= \frac{\pi i}{3} \left( \frac{24 \cdot i}{(2i)^4} - \frac{144i^2}{(2i)^5} + \frac{240i^3}{(2i)^6} - \frac{120i^4}{(2i)^7} \right) \\ &= \frac{\pi i}{3} \left( \frac{24i}{2^4} - \frac{144i}{2^5} + \frac{240i}{2^6} - \frac{120i}{2^7} \right) \\ &= \frac{\pi i}{3} \cdot i \left( \frac{3}{2} - \frac{9}{2} + \frac{15}{4} - \frac{15}{16} \right) = \frac{\pi i}{3} \cdot \frac{-3i}{16} = \frac{\pi}{16}. \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\infty} \frac{\cos(\sqrt{2}\pi x)}{x^4+1} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\sqrt{2}\pi x)}{x^4+1} dx = \frac{1}{2} \text{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\sqrt{2}\pi x}}{x^4+1} dx = \frac{1}{2} \text{Re} \left( 2\pi i \sum_{\text{Im } c > 0} \text{Res} \left( \frac{e^{i\sqrt{2}\pi z}}{z^4+1}; c \right) \right) \\ &= -\pi \text{Im} \left( \text{Res} \left( \frac{e^{i\sqrt{2}\pi z}}{z^4+1}; \frac{1+i}{\sqrt{2}} \right) + \text{Res} \left( \frac{e^{i\sqrt{2}\pi z}}{z^4+1}; \frac{-1+i}{\sqrt{2}} \right) \right) \end{aligned}$$

$$\operatorname{Res} \left( \frac{e^{i\sqrt{2}\pi z}}{z^4 + 1}; c \right) = \frac{e^{i\sqrt{2}\pi z}}{(z^4 + 1)'} \Big|_{z=c} = \frac{ce^{i\sqrt{2}\pi c}}{4c^4} = -\frac{c}{4} e^{i\sqrt{2}\pi c}$$

であるから

$$\begin{aligned} J &= \pi \operatorname{Im} \left( \frac{1+i}{4\sqrt{2}} e^{i\sqrt{2}\pi \frac{1+i}{\sqrt{2}}} + \frac{-1+i}{4\sqrt{2}} e^{i\sqrt{2}\pi \frac{-1+i}{\sqrt{2}}} \right) = \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \operatorname{Im} \left( (1+i)e^{(-1+i)\pi} + (-1+i)e^{\pi(-1-i)} \right) \\ &= \frac{\pi e^{-\pi}}{4\sqrt{2}} \operatorname{Im} \left( (1+i)(\cos \pi + i \sin \pi) + (-1+i)(\cos \pi - i \sin \pi) \right) \\ &= \frac{\pi e^{-\pi}}{4\sqrt{2}} \operatorname{Im} \left( (1+i)(-1) + (-1+i)(-1) \right) = \frac{\pi e^{-\pi}}{4\sqrt{2}} \cdot (-2) = -\frac{\pi e^{-\pi}}{2\sqrt{2}}. \blacksquare \end{aligned}$$

$e^{\sqrt{2}\pi i x}$  と書くべきを、 $e^{\sqrt{2}\pi i}$  とか  $e^{\sqrt{2}\pi x}$  と間違えて、最後までそのまま計算し続けておかしな結果を出している人がある (例年多いのでこちらとしては驚かない)。もったいない。

それなりに計算は面倒なので、計算ミスが出ることは仕方がないが、 $I = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} c > 0} \operatorname{Res} \left( \frac{z^4}{(z^2+1)^4}; c \right)$  や  $J = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left( 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} c > 0} \operatorname{Res} \left( \frac{e^{i\sqrt{2}\pi z}}{z^4+1}; c \right) \right)$  であることと、そうであることの根拠を書いてあれば、中間点をつけている。留数をどのように計算しているかについても、根拠が書いてあれば、最終結果が間違っている、中間点をつけている。 $I =$  や  $J =$  を書くことが大事である (等式がなくて、バラバラの式の破片が散乱しているような答案が時々あるけれど、そういうのは点をあげられません)。