複素関数練習問題 No. 6

桂田 祐史

2017 年 11 月 10 日, 2024 年 11 月 27 日

このあたりは理論的な話が多くなり、計算をすることで理解するという問題が出しづらいです (言い訳)。

線積分

(実際には、正則関数の線積分が良く出て来るけれど、それらは Cauchy の積分定理や、それに基づく積分路の変形、Cauchy の積分公式、さらには留数定理を使って計算することが多い。ここでは、線積分の定義に基づいて計算できる問題と、線積分の性質を理解するための問題 (つまり基本的なもの) を並べてみた。)

問題 100.

(1) $r>0$, $a\in\mathbb{C}$, $n\in\mathbb{N}$ とするとき、$\displaystyle\int_{|z-a|=r}\frac{dz}{(z-a)^n}$ (n で場合分けが必要)。

(2) $C\colon z=e^{i\theta}$ $(\theta\in[0,\pi])$ とするとき、$\displaystyle\int_C \frac{1}{\overline{z}^2}dz$

(3) $C\colon z=(1+i)t$ $(t\in[0,1])$ とするとき、$\displaystyle I=\int_C\left(x-y+ix^2\right)dz.$ ただし, $x=\operatorname{Re}z$, $y=\operatorname{Im}z$ である。

(4) $-i$ から i に向かう線分を C とするとき、$\displaystyle\int_C|z|\,dz$

(5) $0,\ 1,\ 1+i,\ i$ を頂点とする正方形の周を正の向きに 1 回まわる曲線を C とするとき、$\displaystyle\int_C|z|^2\ dz$
$\displaystyle\int_C\left(3z^2+iz-4\right)\ dz$

((3) は梶原 [1] に載っていた公務員試験の問題から。(4), (5) は小堀 [2] から。)

問題 101. $f(z)=\overline{z}$ とするとき、次の曲線 C に対して、$\displaystyle\int_C f(z)\,dz$ を求めよ。

(1) 4 点 0, a, ib, $a+ib$ を頂点とする長方形の辺　(2) 原点中心、半径 r の円周

(教科書 p. 62 の例題である。a, b, r は正数のつもりだろうか？)

問題 102. 連続関数 $F\colon[\alpha,\beta]\to\mathbb{C}$ に対して、積分 $\displaystyle\int_\alpha^\beta F(t)\,dt$ を $\displaystyle\int_\alpha^\beta F(t)\,dt:=\int_\alpha^\beta\operatorname{Re}F(t)\,dt+i\int_\alpha^\beta\operatorname{Im}F(t)\,dt$ で定めるとき、$\displaystyle\left|\int_\alpha^\beta F(t)\,dt\right|\le\int_\alpha^\beta|F(t)|\ dt$ が成り立つことを示せ。

問題 103. $\displaystyle\left|\int_C f(z)\,dz\right|\le\int_C|f(z)|\,|dz|$ をこの講義の線積分の定義に基づき証明せよ。

問題 104. f は円周 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ の近傍で連続な関数、$C\colon z = e^{i\theta}$ ($\theta \in [0, \pi]$), $\Gamma\colon z = t + i\sqrt{1-t^2}$ ($t \in [-1, 1]$) とするとき、$\displaystyle\int_C f(z)\,dz$ と $\displaystyle\int_\Gamma f(z)\,dz$ の関係を述べよ。
(変数変換できれいに対応が付けられる。この問題が出来ると、線積分が向きを変えないパラメーター付けの変更によらないことが何となく分かる。)

問題 105. $a, c \in \mathbb{C}$, $0 < |a - c| < r$ とするとき、関数 $\dfrac{1}{z-a}$ は、円周 $|z - c| = r$ 上で

$$\frac{1}{z-a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a-c)^n}{(z-c)^{n+1}}$$

と展開できることを示し (これは後で学ぶ Laurent 展開というものに相当するが、この場合は等比級数なので素朴にチェックできる)、それを利用して次の線積分の値を計算せよ。

$$\int_{|z-c|=r} \frac{dz}{z-a}.$$

($a = c$ ならば簡単だけど、そうでないならば、c のまわりに展開してしまえば何とかなりそう、という発想。講義ノートに書いておいた。「一様収束」というのが必要。)

Cauchy の積分定理・積分公式

問題 106. $\displaystyle\int_{|z-2|=1} \frac{dz}{z}$ と $\displaystyle\int_{|z-1|=2} \frac{dz}{z}$ を求めよ。　(たくさんのやり方がある。)

問題 107. (1) 星形領域の定義を述べよ。(2) $\mathbb{C}$, 円盤領域, ☆の内部以外の星形領域の例をあげよ。

問題 108. $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x \le 0\}$ とするとき、以下の問に答えよ。
(1) Ω が星形領域であることを示せ。(2) Ω で積分を用いて “対数関数” L を定義せよ。きちんと定義できること、正則関数であることを示せ。(3) (2) で定義した関数 L について (a) $x \in \mathbb{R}$ ならば $L(x) = \log x$ ($\log$ は高校数学の対数), (b) $L(z_1 z_2) = L(z_1) + L(z_2)$ ($z_1, z_2 \in \Omega$) が成り立つことを示せ。

問題 109. 円盤領域における Cauchy の積分公式を用いて、以下の等式を証明せよ。
$a, c \in \mathbb{C}$, $r > 0$, $|a - c| < r$ とするとき、$\displaystyle\int_{|z-c|=r} \frac{dz}{z-a} = 2\pi i.$
(Cauchy の積分公式を知っていると、この等式はほとんど明らかに見える、ということを是非理解してもらいたい。この授業では、円盤領域における Cauchy の積分公式の証明にこの等式を用いたので、循環論法になってしまうが、この等式を用いずに Cauchy の積分公式を導くことも出来る。)

解答

解答 100.

(1) $|z-a|=r$ (正の向きに一周) は、$z=a+re^{i\theta}$ ($\theta\in[0,2\pi]$) とパラメーター付けできる (始点=終点がどこか、指定していないが、閉曲線の場合は、それも線積分には影響しない)。

$\dfrac{dz}{d\theta}=ire^{i\theta}$ であるから、

$$I:=\int_{|z-a|=r}\frac{dz}{(z-a)^n}=\int_0^{2\pi}\frac{1}{(re^{i\theta})^n}\cdot ire^{i\theta}d\theta=\frac{i}{r^{n-1}}\int_0^{2\pi}e^{(1-n)i\theta}d\theta.$$

$n\neq 1$ のとき、

$$I=\frac{i}{r^{n-1}}\left[\frac{e^{(1-n)i\theta}}{(1-n)i}\right]_0^{2\pi}=0.$$

($e^{(1-n)i\theta}$ は θ につき周期 2π なので、値を求める必要もなく、$\theta=0,2\pi$ で同じ値であることから $I=0$ と分かる。)

$n=1$ のとき、

$$I=i\int_0^{2\pi}d\theta=2\pi i.$$

注意: $n\neq 1$ ならば、$\dfrac{1}{(z-a)^n}=(z-a)^{-n}$ は $\dfrac{1}{1-n}(z-a)^{1-n}$ という原始関数を持つので、閉曲線に沿う積分は 0 と分かる。$n=1$ のときは、真面目に計算するので良いかも。

(2) $z=e^{i\theta}$ ($\theta\in[0,\pi]$) とすると、$\overline{z}^2=\left(e^{-i\theta}\right)^2=e^{-2i\theta}$, $\dfrac{dz}{d\theta}=ie^{i\theta}$.

$$\int_C\frac{1}{\overline{z}^2}dz=\int_0^{\pi}\frac{1}{e^{-2i\theta}}\cdot ie^{i\theta}d\theta=i\int_0^{\pi}e^{3i\theta}d\theta=\frac{i}{3i}\left[e^{3i\theta}\right]_0^{\pi}=\frac{1}{3}\left(e^{3i\theta}-e^0\right)=\frac{-1-1}{3}=-\frac{2}{3}.$$

(別解) C 上では $\overline{z}=e^{-i\theta}=\dfrac{1}{z}$ であるから、$\dfrac{1}{\overline{z}^2}=z^2$. これは原始関数を持つので簡単に積分が計算できる。

$$\int_C\frac{1}{\overline{z}^2}dz=\int_C z^2\,dz=\left[\frac{z^3}{3}\right]_{z=1}^{z=-1}=-\frac{2}{3}.$$

(3) $z=(1+i)t=t+it$ ($t\in[0,1]$) とするとき、$x=\operatorname{Re}z=t$, $y=\operatorname{Im}z=t$, $\dfrac{dz}{dt}=1+i$ であるから、

$$\int_C\left(x-y+ix^2\right)dz=\int_0^1\left(t-t+it^2\right)\cdot(1+i)dt=(i-1)\int_0^1t^2\,dt=\frac{i-1}{3}.$$

(この問題は工夫のしようが思い付かない。)

(4) $-i$ から i に向かう線分は $z=-i+t(i-(-i))=-i+2it$ ($t\in[0,1]$) とパラメーター付けできる。$|z|=|2t-1|$, $\dfrac{dz}{dt}=2i$. (積分は区間を $[0,1/2]$, $[1/2,1]$ に分割して計算しても良いし、$t\mapsto|2t-1|$ のグラフを描いて、$\displaystyle\int_0^1|2t-1|\,dt=\frac{1}{2}$ と読んでも良い。)

$$\int_C|z|\,dz=\int_0^1|2t-1|\cdot 2i\,dt=2i\int_0^1|2t-1|\,dt=2i\cdot\frac{1}{2}=i.$$

(5) 図は黒板に描いたもので (今自宅でスキャンできないので面倒くさい)。正方形の各辺を Γ と同じ向きに進む曲線を Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4 とすると、

$$I:=\int_\Gamma f(z)\,dz=\sum_{j=1}^4\int_{\Gamma_j}f(z)\,dz.$$

- Γ_1: $z=t$ ($t\in[0,1]$). $\dfrac{dz}{dt}=1$, $|z|=t$.
- Γ_2: $z=1+it$ ($t\in[0,1]$). $\dfrac{dz}{dt}=i$, $|z|=\sqrt{1+t^2}$.
- Γ_3: $z=(1+i)-t=(1-t)+i$ ($t\in[0,1]$). $\dfrac{dz}{dt}=-1$, $|z|=\sqrt{(1-t)^2+1}$.
- Γ_4: $z=i-it=i(1-t)$ ($t\in[0,1]$). $\dfrac{dz}{dt}=-i$, $|z|=\sqrt{(1-t)^2}=1-t$.

ゆえに

$$\begin{aligned}I&=\int_\Gamma |z|^2\,dz=\int_0^1\left(t^2\cdot 1+(1+t^2)\cdot i+\left[(1-t)^2+1\right]\cdot(-1)+(1-t)^2\cdot(-i)\right)dt\\&=\int_0^1[2(1+i)t-2]\,dt=2(1+i)\frac{1}{2}-2\cdot 1=i-1.\end{aligned}$$

$3z^2+iz-4$ は多項式で ($z^3+\dfrac{i}{2}z^2-4z$ という) 原始関数を持つので、閉曲線に沿う積分は 0 である。

$$\int_\Gamma\left(3z^2+iz-4\right)dz=0.\blacksquare$$

解答 101. 教科書 p. 62 を見て下さい。

解答 102. (準備中)

解答 103. (この命題の証明は、式変形だけを追えば短く書けるが、個々の式変形が出来る理由は慎重に考えないと理解しづらいと思われるので、以下ではゆっくり説明する。)

$\displaystyle\int_C f(z)\,dz=0$ ならば、証明すべき不等式の左辺が 0, 右辺が 0 以上であるから、不等式は成り立つ。以下では $\displaystyle\int_C f(z)\,dz\neq 0$ とする。$\theta:=\operatorname{Arg}\displaystyle\int_C f(z)\,dz$ とおくと[1]

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right|=e^{-i\theta}\int_C f(z)\,dz.$$

この右辺は実数であるから、それ自身の実部に等しい:

$$e^{-i\theta}\int_C f(z)\,dz=\operatorname{Re}e^{-i\theta}\int_C f(z)\,dz.$$

積分の線形性により $e^{-i\theta}$ は $\int$ の内側に入れられる。

$$\operatorname{Re}e^{-i\theta}\int_C f(z)\,dz=\operatorname{Re}\int_C e^{-i\theta}f(z)\,dz.$$

C のパラメーター付けを $z=\varphi(t)$ ($t\in[\alpha,\beta]$) とすると、

$$\operatorname{Re}\int_C e^{-i\theta}f(z)\,dz=\operatorname{Re}\int_\alpha^\beta e^{-i\theta}f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

複素数値関数 $F\colon[\alpha,\beta]\to\mathbb{C}$ の積分 $\displaystyle\int_\alpha^\beta F(t)\,dt$ の定義から、積分の実部は、非積分関数の実部の積分である。

$$\operatorname{Re}\int_\alpha^\beta e^{-i\theta}f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt=\int_\alpha^\beta\operatorname{Re}\left(e^{-i\theta}f(\varphi(t))\varphi'(t)\right)\,dt.$$

[1] 一般に $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ に対して、θ を z の偏角とすると、$z=|z|r^{i\theta}$ であるから、$|z|=ze^{-i\theta}$.

任意の複素数 c に対して、$\mathrm{Re}\, c \le |c|$ であるから、

$$\int_\alpha^\beta \mathrm{Re}\left(e^{-i\theta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\right)\, dt \le \int_\alpha^\beta \left|e^{-i\theta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\right|\, dt = \int_\alpha^\beta |f(\varphi(t))|\,|\varphi'(t)|\, dt = \int_C |f(z)|\,|dz|.$$

(最後の等号は、$\int_C |f(z)|\,|dz|$ の定義である。) 以上まとめて

$$\left|\int_C f(z)\, dz\right| \le \int_C |f(z)|\,|dz|$$

を得る。 ■

この証明は結構技巧的で、すんなり思いつく人は少ないと思います (僕は学生のときに学んだはずですが、思い出せなかった…)。証明が書いてあるテキストには、だいたいどれも同じような証明が載っているようです。今回は Ahlfors [3] を参考にしました。もっと簡単な証明があれば知りたいものです。 ■

解答 104. (後回し。)

解答 105. z が $|z-c|=r$ を満たすとき、$\left|\dfrac{a-c}{z-c}\right| = \dfrac{|a-c|}{r} < 1$ であるから、

$$\frac{1}{z-a} = \frac{1}{(z-c)-(a-c)} = \frac{1}{z-c}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{a-c}{z-c}} = \frac{1}{z-c}\sum_{n=0}^\infty \left(\frac{a-c}{z-c}\right)^n = \sum_{n=0}^\infty \frac{(a-c)^n}{(z-c)^{n+1}}.$$

さらにこの収束は円周 $\{z\in\mathbb{C} \mid |z-c|=r\}$ 上で一様である。実際、$M_n := \dfrac{|a-c|^n}{r^{n+1}}$ とおくと、

- $\left|\dfrac{(a-c)^n}{(z-c)^{n+1}}\right| \le M_n.$
- $\displaystyle\sum_{n=0}^\infty M_n = \frac{1}{r}\cdot\frac{1}{1-|a-c|/r}$ (収束).

であるから、Weierstrass の M-test により一様収束する。従って項別積分できるので

$$\int_{|z-c|=r}\frac{dz}{z-a} = \int_{|z-c|=r}\sum_{n=0}^\infty \frac{(a-c)^n}{(z-c)^{n+1}}dz = \sum_{n=0}^\infty \int_{|z-c|=r}\frac{(a-c)^n}{(z-c)^{n+1}}dz = \sum_{n=0}^\infty (a-c)^n \int_{|z-c|=r}\frac{dz}{(z-c)^{n+1}}.$$

既に見たように (**問題 100** (1))

$$\int_{|z-c|=r}\frac{dz}{(z-c)^{n+1}} = \begin{cases} 2\pi i & (n=0) \\ 0 & (n\ne 0)\end{cases}$$

であるから、

$$\int_{|z-c|=r}\frac{dz}{z-a} = 2\pi i. ■$$

解答 106. まず結果から。$\displaystyle\int_{|z-2|=1}\frac{dz}{z} = 0$, $\displaystyle\int_{|z-1|=2}\frac{dz}{z} = 2\pi i$. 事実として次のこと (何度も出て来たこと) を覚えてしまうのを勧める。

> $\displaystyle\int_{|z-c|=r}\frac{dz}{z-a}$ は、(i) a が $|z-c|=r$ の外にあれば 0, (ii) a が $|z-c|=r$ の中にあれば $2\pi i$, (iii) 周上にあれば普通の意味では積分不可能である。

(iii) は置いておいて、(i) と (ii) は、この後に出て来る留数定理を使えば明らかに近い。

$$\int_{|z-c|=r}\frac{dz}{z-a} = 2\pi i \sum_{|z-c|=r\text{ 内の極 }c'} \mathrm{Res}\left(\frac{1}{z-a}; c'\right) = 2\pi i \times \begin{cases} 1 & (a\text{ が }|z-c|=r\text{ の内部}) \\ 0 & (a\text{ が }|z-c|=r\text{ の外部}).\end{cases}$$

つまり長い議論の末にこの計算問題を簡単に解けるところまで到達した (留数定理をゲットした) わけだが、そこに辿り着くまでに積み上げた様々なものを使って解くことが出来る。

(i) については、基本的な (円盤領域 or 星形領域における) Cauchy の積分定理から分かる。実際、$R := (r+|a-c|)/2$ とおくとき、$r < R < |a-c|$ であるから、$|z-c| = r$ は $D(c;R)$ 内の閉曲線で、$\dfrac{1}{z-a}$ は $D(c;R)$ で正則であるから、$\displaystyle\int_{|z-c|=r} \frac{dz}{z-a} = 0.$

(ii) については、問 **66** で解説する。順番を入れ替えるべきか。

解答 107. (1) $\mathbb{C}$ の部分集合 Ω が星形領域であるとは、次の 2 条件を満たすことをいう。

(i) Ω が領域 ((弧) 連結な開集合) である。

(ii) $(\exists a \in \Omega)$ $(\forall z \in \Omega)$ $\{(1-t)a + tz \mid t \in [0,1]\} \subset \Omega$. ($\Omega$ 内のある点 a が存在し、Ω 内の任意の点 z に対して、a と z を短点とする線分が Ω に含まれる。)

(2) 3 つほどあげる。

(a) 凸領域 (領域内の任意の二点を結ぶ線分がその領域に含まれるような領域)。

(b) 上半平面 $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ のような半平面。

(c) 負軸を除いた $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid z \le 0\}$ のような半直線の補集合。 ■

解答 108. (準備中)

解答 109. **63** の解説で述べたように、留数定理を使えば $2\pi i$ となることはすぐに分かる。ここでは Cauchy の積分公式で説明せよ、という問にしたが、ついでに、それ以外の方法も説明する。

まず $a = c$ であれば $2\pi i$ となることを思い出そう。

$$\int_{|z-c|=r} \frac{dz}{z-c} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{(c+re^{i\theta})-c} \cdot ire^{i\theta} d\theta = i\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i$$

3 通りの方法を示すが、そのうち 2 つがこの $a = c$ の場合に帰着させるものである。最後の 1 つがこの問題の解答である。

(a) (積分路の変形) 宿題の問 8 では、「星形領域における Cauchy の積分定理」を背景に $0 < \delta < r - |a-c|$ となる δ に対して

$$\int_{|z-c|=r} \frac{dz}{z-a} = \int_{|z-a|=\delta} \frac{dz}{z-a}$$

となることを示し (「積分路の変形」)、$c = a$ の場合に帰着させた。教科書の定理 X.Y (領域の境界が有限個の単純閉曲線である場合の Cauchy の積分定理) を用いても同じ積分路の変形が出来る。

(b) (被積分関数を Laurent 級数に展開) また練習問題 No. 5 に載せた問 **62** のように

$$\frac{1}{z-a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a-c)^n}{(z-c)^{n+1}} \quad (|z-c| = r;\ \text{実は } |z-c| > |a-c| \text{ で成立})$$

と一様収束級数に展開出来るので、項別積分が可能で、$n \neq 1$ に対しては $\dfrac{1}{(z-c)^n}$ は原始関数を持つので閉曲線に沿う積分は 0 であるから、

$$\begin{aligned}\int_{|z-c|=r} \frac{dz}{z-a} &= \int_{|z-c|=r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a-c)^n}{(z-c)^{n+1}} dz = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{|z-c|=r} \frac{(a-c)^n}{(z-c)^{n+1}} dz = \int_{|z-c|=r} \frac{(a-c)^0}{(z-c)^{0+1}} dz \\ &= \int_{|z-c|=r} \frac{dz}{z-c} = 2\pi i\end{aligned}$$

とすることも出来る。

(c) (円盤内の Cauchy の積分公式を用いる) 閉円盤 $\overline{D}(c;r)$ を含む開集合で正則な関数 f, $D(c;r)$ 内の a に対して

$$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-c|=r}\frac{f(z)}{z-a}dz$$

が成り立つ。これを $f\equiv 1$ に対して用いれば

$$1=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-c|=r}\frac{1}{z-a}dz.$$

これから $\displaystyle\int_{|z-c|=r}\frac{dz}{z-a}=2\pi i.$ ■

問題 100 を Mathematica でお気軽に検算

(1) は r とか入っているし ($r=1$ とかしてみる手はある)、場合分けもあるし ($n=1$ みたいなのは (わざと) 無視するという Mathematica 流のズボラをやってくれる)、そのままでは簡単に計算してくれないが、(2),(3),(4),(5) はすぐ計算してくれる。

$\displaystyle\int_C f(z)dz$, $C\colon z=\varphi(t)$ $(t\in[a,b])$ を計算する 1 行関数 `li[]` を定義して、放り込んでみる。

```
li[fz_,phit_,a_,b_]:=Integrate[(fz/. z->phit)D[phit,t],{t,a,b}]

fz=Re[z]-Im[z]+I Re[z]^2
li[fz,t+I t,0,1]

fz=1/Conjugate[z]^2
li[fz,Exp[I t],0,Pi]

fz=Abs[z]
li[fz,-I+2I t,0,1]

fz=Abs[z]^2
li[fz, t, 0, 1] + li[fz, 1 + I t, 0, 1] +
 li[fz, (1 - t) + I, 0, 1] +
 li[fz, I (1 - t), 0, 1]

fz=3z^2+I z-4
li[fz, t, 0, 1] + li[fz, 1 + I t, 0, 1] +
 li[fz, (1 - t) + I, 0, 1] +
 li[fz, I (1 - t), 0, 1]
```

一応、上の手計算の結果と一致したので、多分大丈夫。

参考文献

[1] 梶原壌二：関数論入門 — 複素変数の微分積分学 —, 森北出版 (1980).

[2] 小堀憲：複素解析学入門, 朝倉書店 (1966).

[3] Ahlfors, K.: *Complex Analysis*, McGraw Hill (1953), 笠原 乾吉 訳, 複素解析, 現代数学社 (1982).