複素関数・同演習 第 23 回

〜正則関数の冪級数展開可能性, 正則関数の性質 (零点とその位数)〜

かつらだ まさし
桂田 祐史
https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2024/

2025 年 1 月 8 日

目次

本日の内容・連絡事項

- 明けましておめでとう。冬季休暇中に宿題 10 までのフィードバックすませました。チェックしておいて下さい。
- 色々な感染症が流行しているので各自注意してください。期末試験 (1/29(水), 追試 2/3(月)) の際に体調が悪くなった場合は、特別試験の受験を検討してください。
総合数理学部　2024 年度秋学期定期試験のお知らせを見てください (申し込みの〆切とか)。授業資料 WWW サイトからもリンクをはってあります。
- 本日の内容: 講義ノート [1] の 7.2, 7.3, 9.1
- 前回、円盤領域における Cauchy の積分公式を紹介したが、今回は、まずそれを用いて正則関数の冪級数展開可能性を証明する。その系として、これまで懸案だった (やり残していた) 色々な問題がかたつく。怒涛の定理日。
- 冪級数展開の収束半径 ρ については、色々な定理を紹介した。今日は 1 つ基本的な定理を紹介する。それで「これだけ知っていれば十分」。
- 「正則関数の性質」という章を用意してある (正則関数が冪級数展開可能ということから得られる内容)。そこから零点の位数を紹介する。(他の項目については補講に回す。)

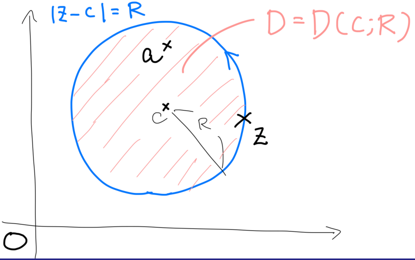
前回、次の定理を紹介した。

定理 23.1 (円盤における Cauchy の積分公式)

Ω は $\mathbb{C}$ の開集合、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は正則、$c \in \Omega$, $R > 0$, $D := D(c; R)$ とおくとき $\overline{D} \subset \Omega$ とする。このとき任意の $a \in D$ に対して

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-c|=R} \frac{f(z)}{z-a}\,dz.$$

円周上の f の値から円盤内の点での f の値が求まる。(z を ζ,a を z に換えた式も書く。)



この定理は、領域 D の条件を緩めた一般化ができる (証明は後日, 講義ノート [1] の 8 章にある。)。

定理 23.2 (Green の公式が成り立つ領域での Cauchy の積分公式)

D は $\mathbb{C}$ の領域 D で、$\mathbb{R}^2$ の領域と同一視したとき、Green の公式が成り立つ領域であるとする。このとき、$\overline{D}$ を含む開集合で正則な f に対して

$$(\forall a \in D) \quad f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f(z)}{z-a}\,dz.$$

例えば、有限個の区分的 C^1 級単純閉曲線で囲まれた領域 D (例: 円環領域) はこの条件を満たす。次回使う予定である。

定理 23.3 (正則関数は冪級数展開可能である, 正則関数は解析的である)

Ω は $\mathbb{C}$ の開集合、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は正則、$c \in \Omega$, $R > 0$, $D := D(c; R)$ とおくとき $\overline{D} \subset \Omega$ が成り立つとする。このとき、

$$a_n := \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta - c| = R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - c)^{n+1}} d\zeta \quad (n = 0, 1, \cdots)$$

とおくと

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - c)^n \quad (z \in D).$$

証明　円盤領域における Cauchy の積分公式より、任意の $z \in D$ に対して

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

次の変形は少し長いが、すでによく知っているものである。

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - c) - (z - c)} = \frac{1}{\zeta - c}\cdot\frac{1}{1 - \frac{z - c}{\zeta - c}} = \frac{1}{\zeta - c}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z - c}{\zeta - c}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z - c)^n}{(\zeta - c)^{n+1}}.$$

7.2.1 正則関数の解析性

ゆえに

$$(1)\qquad \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} f(\zeta)\frac{(z-c)^n}{(\zeta - c)^{n+1}}.$$

これは ζ の関数として C^* で一様収束する。実際 $r := \dfrac{|z-c|}{R}$ とおくと $r < 1$ であり

$$\left| f(\zeta)\frac{(z-c)^n}{(\zeta-c)^{n+1}} \right| = |f(\zeta)| \frac{|z-c|^n}{R^{n+1}} \le \frac{\max_{\zeta \in C^*} |f(\zeta)|}{R} r^n.$$

$M_n := \dfrac{\max |f|}{R} r^n$ とおくと、$|$一般項$| \le M_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < +\infty$ であるから、Weierstrass の M-test により、(1) の右辺の一様収束が分かる。ゆえに項別積分が可能で

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta - c| = R} \sum_{n=0}^{\infty} f(\zeta)\frac{(z-c)^n}{(\zeta-c)^{n+1}} d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\int_{|\zeta-c|=R} \frac{f(\zeta)(z-c)^n}{(\zeta-c)^{n+1}} d\zeta$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(z-c)^n \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-c|=R}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-c)^{n+1}} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n. \quad \square$$

…… 重要な定理が、こんなに手早く (スライド 1 枚半で) 証明できるとは。ここは関数論の 1 つのクライマックスだろう。

7.2.1 正則関数の解析性

定義 23.4 (解析的, 解析関数)

関数 f が、定義域内の各点のある近傍で冪級数展開できるとき、f は**解析的** **(analytic)** であるといい、解析的な関数を**解析関数** **(analytic function)** と呼ぶ。

定理 23.3 より「任意の正則関数は解析的である」。

解析関数という言葉は、解析的である関数という以外に、(後で定義する) **解析接続**により定まる関数、という意味で用いられる場合もある。

系 23.5

正則関数は何回でも微分可能である。

証明　正則関数は定義域の各点の近傍で冪級数展開可能であり、冪級数は何回でも微分可能であるから。 □

7.2.1 正則関数の解析性

系 23.6

複素関数が原始関数を持つならば実は正則である。

証明 複素関数 f に対して、$F' = f$ を満たす関数 F が存在したとする。F は正則であるから何回でも微分可能である。特に F が 2 回微分可能であることから、f は微分可能である。すなわち f は正則である。 $\square$

注意 第 21 回の講義で次の 3 条件をあげ、(i)⇔(ii) を証明してあった。

1. (i) f が Ω での原始関数を持つ ($\exists F\colon \Omega \to \mathbb{C}$ s.t. $F' = f$)
2. (ii) Ω 内の任意の区分的 C^1 級閉曲線 C について、$\displaystyle\int_C f(z)\,dz = 0$ が成り立つ
3. (iii) f は Ω で正則である

予告した (i)⇒(iii) (これが系 23.6) がやっと証明できた。ゆえに **Morera の定理** ((ii)⇒ (iii) という内容) も証明できた (∵ (ii)⇔(i)⇒(iii))。

7.2.1 正則関数の解析性

その他にも、色々な懸案の問題が片付く。

- 任意の正則関数は 2 回微分可能で、2 階導関数は連続であるから、定理 9.4「任意の正則関数の実部・虚部は調和関数である」の証明が完了する。
- 任意の正則関数の導関数は連続であることが分かるので、逆関数定理 (定理 9.6) で、導関数の連続性を仮定する必要がなくなる。
- Cauchy の積分定理を Green の公式を用いて証明する際、実部・虚部の導関数が連続であることを用いたくなるが、それも満たされていることが分かる。

ローン生活終了。

やれやれ…(肩の荷が降りる)

これまでのまとめ: すでに色々なことを学んでいる。

1. 冪級数の係数から収束半径を計算する公式 (Cauchy-Hadamard, d'Alembert)
2. 冪級数が $D(c;r)$ で収束するならば $r \le \rho$.
3. 冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-c)^n$ の収束半径がそれぞれ ρ_1, ρ_2 で、$\rho_1 \ne \rho_2$ ならば、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)(z-c)^n$ の収束半径は $\min\{\rho_1,\rho_2\}$. $\rho_1=\rho_2$ の場合は、収束半径は $\min\{\rho_1,\rho_2\}$ 以上。

宿題 7 問 (1)(d) が、収束半径が 1, 1, 4 の 3 つの冪級数の和で、この 3. の $\rho_1=\rho_2=1$ の場合と相当している。実際の収束半径 ρ は 1 であるが、すぐに $\rho=1$ とは結論できず、d'Alembert の判定法を使った解答例を示している。実は、すぐに $\rho=1$ と分かる方法がある。それを紹介する。

7.2.2 冪級数展開の収束半径

正則関数は定義域に属する任意の点の周りに冪級数展開できる (定理 21.3)。その収束半径について何がわかるだろうか。

一般的な定理を紹介する前に、実例で考えよう。例えば

$$\Omega := \mathbb{C} \setminus \{i, -i\}, \quad f(z) = \frac{1}{z^2+1} \quad (z \in \Omega), \quad c = 0.$$

(もちろん、$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^{2k}$ が冪級数展開で、収束半径 $\rho = 1$ と分かるが、具体的に冪級数展開しないで、そのことを示せないか、考えてみよう。)

$0 < R < 1$ を満たす任意の R について、f は $D(0; R)$ で正則で、$\overline{D(0; R)} \subset \Omega$ が成り立つので、定理 23.3 より、f は $D(0; R)$ で冪級数展開できる。すなわち、ある $\{a_n\}_{n \ge 0}$ が存在して

$$(\forall z \in D(0; R)) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n. \tag{2}$$

R の取り方には自由度があるが、$\{a_n\}_{n \ge 0}$ 自体は R によらずに定まる ($a_n = f^{(n)}(0)/n!$ なので f から決まる)。

(続く)

7.2.2 冪級数展開の収束半径

任意の $R \in (0,1)$ に対して、(2) が成り立つので、結局は次式が成り立つ。

(3) $$(\exists \{a_n\}_{n\ge 0}: \text{複素数列})(\forall z \in D(0;1)) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

この右辺の冪級数の収束半径 ρ は何だろう。$D(0;1)$ で収束するので、収束半径の定義から $\rho \ge 1$ が導けるが、実は $\rho = 1$ である。直観的には、円周 $|z-0| = 1$ の上に f の特異点 $\pm i$ があるからであるが、きちんと示そう。

証明 $\rho > 1$ と仮定して矛盾を導く。$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ は収束円 $D(0;\rho)$ で正則で、背理法の仮定 $\rho > 1$ から $i \in D(0;\rho)$ であるから、$z \to i$ のとき有限な複素数に収束する。特に

$$\lim_{\substack{z\to i\\ z\in D(0;1)}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathbb{C}.$$

ところが $z \to i$ のとき $f(z) = \dfrac{1}{z^2+1} \to \infty$. 特に

$$\lim_{\substack{z\to i\\ z\in D(0;1)}} f(z) = \infty.$$

これは $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ $(z \in D(0,1))$ に矛盾する。ゆえに $\rho = 1$ である。 (証明終)

7.2.2 冪級数展開の収束半径

以上の議論は一般化できて次の定理が得られる (証明を書くのはサボるけど簡単)。

定理 23.7 (冪級数展開の収束半径 — 特異点があればそこまで)

Ω は $\mathbb{C}$ の開集合、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は正則、$c \in \Omega$, $R > 0$ で $D(c;R) \subset \Omega$、円周 $|z - c| = R$ 上に f の特異点 z_0 (ここでは $\displaystyle\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in D(c;R)}} f(z)$ が収束しない、と言う意味) が存在するならば、f の c における冪級数展開の収束半径は R である。

例 23.8

有理関数 f は、分母の零点 $c_1, \cdots, c_n$ を除いた $\Omega := \mathbb{C} \setminus \{c_1, \cdots, c_n\}$ で正則である。$c \in \Omega$ を中心とする冪級数展開の収束半径 ρ は

$$\rho = \min_{1 \le j \le n} |c - c_j|.$$

宿題 7 (1)(d) では、$n = 2$, $c_1 = 1$, $c_2 = -4$, $c = 0$. ゆえに $\rho = \min\{|0 - 1|, |0 - (-4)|\} = 1$.

この定理は便利であるが、これでは扱えない場合もある。しかし細かい話は省略する。

7.3 参考: Cauchy の積分公式の別証明について

時間がない。この項 7.3 は、授業ではカットする。

実は、Cauchy の積分公式の証明には色々な方法があり、それに応じて定理もいくつかのバージョンがある。それらについて学ぶのは有意義だと思われるので、少し説明する。

積分路の変形による Cauchy の積分公式の別証明 (ちょっと注目…次のスライドまで)

多くのテキストで、“積分路の変形” を用いる証明が採用されている。この方法は発展性がある (円周でない閉曲線 C に対して、積分公式が示せたりする。) その方法で (あくまでも円盤の場合に) 証明してみよう。

$|c-a|<R$ だから $R-|c-a|>0$. $0<\varepsilon<R-|c-a|$ を満たす任意の ε に対して

$$\int_{|z-c|=R}\frac{f(z)}{z-a}\,dz=\int_{|z-a|=\varepsilon}\frac{f(z)}{z-a}\,dz \tag{4}$$

が成り立つことを導く (積分路を $|z-c|=R$ から $|z-a|=\varepsilon$ に変形した)。

もしも (4) が示されれば、$z=a+\varepsilon e^{i\theta}$ $(\theta\in[0,2\pi])$ とおいて

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=\varepsilon}\frac{f(z)}{z-a}\,dz=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(a+\varepsilon e^{i\theta})}{\varepsilon e^{i\theta}}\cdot i\varepsilon e^{i\theta}\,d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(a+\varepsilon e^{i\theta})\,d\theta.$$

$\varepsilon\to 0$ とすると

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(a+\varepsilon e^{i\theta})\,d\theta\to\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(a)\,d\theta=f(a). \tag{$\spadesuit$}$$

となることは容易に分かる (詳しいことは次のスライド)。ゆえに

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-c|=R}\frac{f(z)}{z-a}\,dz=f(a).$$

7.3 参考: Cauchy の積分公式の別証明

(♠) を確認しよう。差の絶対値を評価する。

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+\varepsilon e^{i\theta})d\theta - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a)d\theta\right| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big(f(a+\varepsilon e^{i\theta})-f(a)\Big)\,d\theta\right| \\ &\le \frac{1}{2\pi}\sup_{\theta\in[0,2\pi]}\left|f(a+\varepsilon e^{i\theta})-f(a)\right|\int_0^{2\pi} d\theta \\ &= \sup_{\theta\in[0,2\pi]}\left|f(a+\varepsilon e^{i\theta})-f(a)\right|.\end{aligned}$$

この右辺は、f が a で連続であることから、$\varepsilon\to 0$ のとき 0 に収束する。

残る問題は、

(再掲 4) $$\int_{|z-c|=R}\frac{f(z)}{z-a}\,dz = \int_{|z-a|=\varepsilon}\frac{f(z)}{z-a}\,dz$$

を示すことであるが、この積分路の変形には色々なやり方がある。

以下では、時間の許す範囲で紹介してみる。

$0 < \varepsilon < R - |c - a|$ を満たす任意の ε に対して

(再掲 4) $$\int_{|z-c|=R} \frac{f(z)}{z-a}\,dz = \int_{|z-a|=\varepsilon} \frac{f(z)}{z-a}\,dz$$

が成り立つ。色々な証明がテキストに載っている。代表的なものは講義ノート [1] の §7.4 に書いておいた。

定義 23.9 (正則関数の零点とその位数)

Ω は $\mathbb{C}$ の開集合、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は正則、$c \in \Omega$ とする。

1. c が f の**零点** (zero) であるとは、$f(c) = 0$ が成り立つことをいう。
2. c が f の零点であるとき、

$$f(c) = f'(c) = \cdots = f^{(k-1)}(c) = 0 \wedge f^{(k)}(c) \neq 0$$

を満たす $k \in \mathbb{N}$ を f の零点 c の**位数** (order) と呼ぶ。

(f が恒等的に 0 であれば条件を満たす k は存在しないが、f が恒等的に 0 でなければ上の条件を満たす k が存在することを証明できる。)

定理 23.10 (k 位の零点であるための条件)

Ω は $\mathbb{C}$ の開集合、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は正則、$c \in \Omega$, $k \in \mathbb{N}$ とするとき、次の (i), (ii) は同値である。

(i) c は f の k 位の零点である。

(ii) c を含む開集合 U ($\subset \Omega$) と、U で正則な関数 g が存在して、$f(z) = (z-c)^k g(z)$ ($z \in U$) かつ $g(c) \neq 0$.

8.1 正則関数の零点とその位数

注意 23.11 (多項式の根について復習)

多項式 $f(z)$, $c \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$ について、次の (i), (ii) は同値である。

1. $f(c) = f'(c) = \cdots = f^{(k-1)}(c) = 0$ かつ $f^{(k)}(c) \neq 0$.
2. c は $f(z)$ の根で、重複度は k (k 重根 — 単根のとき 1 重根という として). すなわち $(\exists g(z) \in \mathbb{C}[z])$ $f(z) = (z-c)^k g(z)$, $g(c) \neq 0$.

証明には、多項式の割り算 ($a(z) = q(z)b(z) + r(z)$, $\deg r(z) < \deg b(z)$ なんとか…) から導かれる因数定理が使われた。

定理 23.10 はこの一般化と言える (証明の方法は — 割り算が出来るわけではないので — 異なる)。 □

例 23.12 (簡単な関数の零点の位数)

1. $f(z) = z^2 + 2z + 1$. $f(z) = (z+1)^2$ であるから、f の零点は -1 のみ。$f'(z) = 2z + 2$ なので $f'(-1) = 0$. $f''(z) = 2$ なので $f''(-1) \neq 0$. -1 の位数は 2.
2. $f(z) = \sin z$ のとき、$f(z) = 0 \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z})\ z = k\pi$. ゆえに f の零点は $k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. 位数は全て 1 である。実際、
$$f(k\pi) = \sin k\pi = 0, \quad f'(k\pi) = \cos k\pi = (-1)^k \neq 0.$$
3. $f(z) = \cos z - 1$ のとき、$f(z) = 0 \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) z = 2k\pi$.
$k \in \mathbb{Z}$ とするとき
$$f(2k\pi) = 1 - 1 = 0,$$
$$f'(2k\pi) = -\sin 2k\pi = 0, \quad f''(2k\pi) = -\cos(2k\pi) = (-1)^k \neq 0$$
であるから $2k\pi$ は 2 位の零点である。

2025/1/8 の講義はここまでです。

8.1 正則関数の零点とその位数

では、定理 23.10 を証明しよう。多項式でないから割り算に基づく因数定理の証明はできない。それをどう克服するかに注目してほしい ((i)⇒(ii) で冪級数展開を用いる)。

定理 23.10 の証明.

(i) ⇒ (ii)　Ω は開集合であるから、ある $R>0$ が存在して、$\overline{D(c;R)}\subset\Omega$. 正則関数の冪級数展開可能性から

$$(\exists\{a_n\}_{n\geq 0})\quad f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n\quad(|z-c|<R).$$

このとき $a_n=f^{(n)}(c)/n!$ であるから、$a_0=a_1=\cdots=a_{k-1}=0$, $a_k\neq 0$. ゆえに

$$f(z)=\sum_{n=k}^{\infty}a_n(z-c)^n=(z-c)^k\sum_{n=k}^{\infty}a_n(z-c)^{n-k}$$
$$=(z-c)^k\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+k}(z-c)^n\quad(|z-c|<R).$$

$g(z):=\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+k}(z-c)^n$ とおくと、g は $D(c;R)$ で正則であり、$g(c)=a_k\neq 0$. □

命題?? の証明 (つづき).

(ii) $\Rightarrow$ **(i)**　(これは多項式と同じ証明が出来る) $h(z) := (z-c)^k$ とおくと、$f(z) = h(z)g(z)$ であるから

$$f^{(m)}(z) = \sum_{r=0}^{m} \binom{m}{r} h^{(r)}(z) g^{(m-r)}(z).$$

$r \le k-1$ ならば $h^{(r)}(c) = 0$, $h^{(k)}(c) = k!$ であることに注意しよう。

$0 \le m \le k-1$ の場合は、$h^{(r)}(c) = 0$ $(0 \le r \le m)$ であるから

$$f^{(m)}(c) = \sum_{r=0}^{m} 0 = 0.$$

一方、$m = k$ の場合は

$$f^{(k)}(c) = \binom{k}{k} h^{(k)}(c) g^{(0)}(c) = 1 \cdot k! g(c) \ne 0.$$

ゆえに c は f の k 位の零点である。 □

参考文献

[1] 桂田祐史：複素関数論ノート, 現象数理学科での講義科目「複素関数」の講義ノート.
https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2024/complex2024.pdf
(2014〜).