複素関数・同演習 第 1 回

～ガイダンス, 複素関数の定義と基本的な性質 ～

かつらだ まさし
桂田 祐史
https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2024/

2024 年 9 月 24 日

目次

自己紹介

- かつらだ　まさし
桂田 祐史
- 専門は数値解析 (数値計算法の数理の関数解析的研究)
- 研究室は高層棟 910 号室
- 質問・相談はメールでも可
(メールアドレスは `katurada` あっと `meiji` どっと `ac` ドット `jp`)

注意

- 火曜の「複素関数」, 水曜の「複素関数演習」通して1つの科目と考えて欲しい。2つに分けてあるのはシステム上の問題。片方だけ履修しようとする人が毎年いるけれど、今年度は動画があるわけではなく、自習して単位取得するのは難しい。
(「複素関数」は、一つの話題が長く続き、講義数回分を通して聞いてようやく納得できる、という性質があるので、間が抜けていると分からなくなって、面白く感じられないだろうし、つらいと思う。)
- この授業では私語禁止 (何か話したいことがあったら教室の外で)。質問はいつでも自由にして下さい。

ガイダンス

1. 「複素関数」とは何か。講義で何をするか。
   複素変数、複素数値の関数 ($w = f(z)$ の z と w が複素数) を**複素関数**とよぶ。
   分野の名前としては、(複素) 関数論とか複素解析などが使われる。
   関数論の入門部分を講義する。内容は、理工系の学科の相場 (後述)。
   原則として証明を付ける。
2. 質問は次のいずれかで行うこと。
   (a) 直接会って質問する (授業直後、研究室訪問)。 (b) メールで尋ねる。
3. 急ぎの質問・相談はメールで。
   メールアドレスは、Oh-o! Meiji のシラバスの補足に記してある。
4. 「複素関数」「複素関数演習」両方とも履修すること。1 科目だけの履修は、ルール上は出来るが、勧めない。
   (宿題・期末レポートの量は変わらないので 1 科目だけの履修は損。)
5. 毎週 1 つ宿題を出す。翌週の火曜 2 限までに Oh-o! Meiji 「複素関数演習」に提出すること。原則として、単一の PDF ファイル (A4 サイズ) とする。最初のページに学年・組・番号・氏名を明記すること。大部分は添削してフィードバックするので、コメントを読むこと。

ガイダンス (2)

- 「複素関数」のみ履修する人は連絡して下さい。宿題をどのように提出するか、相談します。
- 毎週の宿題 30%, 期末試験 70% で成績評価する (予定)。
  宿題の得点は〆切りを守って提出するかどうか、真面目にやったか。
  翌週火曜の授業で宿題を解説するので、それ以降の提出は 0 点とする。
  特別な事情がある場合は出来るだけ早く個別に相談すること。
- 復習を推奨する。
  WWW サイト `https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex/` で講義メモ、宿題、講義ノート [1]、演習問題 (解答付)、過去問 (解答付) 等公開
  ミラーサイト `http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex/`
- 期末試験の解答に必要なことは宿題に出て来るはず。
  (過去問は公開しているが、まずは宿題の復習から始めるのを勧める。)
  市販のテキストを使って問題演習しても十分な準備ができる。
- 神保 [2] を教科書とする。
  丸善 eBook Library (`https://elib.maruzen.co.jp/elib/`) にある。
  特に

  `https://elib.maruzen.co.jp/elib/html/BookDetail/Id/3000006063`

(複素) 関数論とは　授業内容

(複素) 関数論は、おおざっぱに言って、複素関数の微積分である。
複素関数とは、変数も値も複素数であるような関数のことをいう ($w = f(z)$ の z, w が複素数ということ)。特に微分可能な複素関数を**正則関数**と呼ぶ。
豊富な内容があるが、この講義の目標はその入門部分で、具体的には

Cauchy の積分定理、Cauchy の積分公式、留数、留数定理による定積分計算

どれもほぼ Cauchy (1789–1857) がやったこと。

Cauchy の積分定理

複素平面内の閉曲線 C が「囲む」領域と C 上で f が正則ならば

$$\int_C f(z)\, dz = 0.$$

真面目に考えると「囲む」はやっかいなところがある。

Cauchy の積分公式

複素平面内の単純閉曲線 C が囲む領域と C 上で f が正則ならば

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta \quad (z \text{ は } C \text{ の囲む領域内の任意の点}).$$

正則関数の冪級数展開可能性

c の近傍で**正則**な関数 f は

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n,$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - c)^{n+1}} d\zeta \qquad \left(= \frac{f^{(n)}(c)}{n!} \right)$$

と**冪級数展開** (Taylor 展開) 出来る。ゆえに f は無限回微分可能である。

1 回微分可能ならば無限回微分可能？実関数の微積分とは相当違うことが分かる。

留数定理による定積分計算

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2+1}; i\right) = 2\pi i \left.\frac{1}{(z^2+1)'}\right|_{z=i} = 2\pi i \left.\frac{1}{2z}\right|_{z=i} = \pi.$$

(微積分で $\tan^{-1}$ を使っても計算できるけれど… $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1}$ のような原始関数を求めるのが面倒なものも同様に計算できる。) 不思議の理解に時間がかかる。

歴史

なぜ複素数を使う必要があるのか？

歴史　Cardano (1501–1576, イタリア)

Cardano は 3 次方程式の解法を発表した (1545 年)。$x^3+px+q=0$ に対して

$$(1)\qquad x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

は解となる (**Cardano の公式**)。3 次方程式にも**判別式**があり、今の場合は

$$\Delta:=-\left(27q^2+4p^3\right)=-108\left[\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3\right]\quad (108=2^2\cdot 3^3).$$

この Δ を用いると、(1) は次のように書き換えられる:

$$(2)\qquad x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{-\Delta}{108}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{-\Delta}{108}}}.$$

Δ は判別式の名にふさわしく、次のことが成り立つ (微積分で容易に証明可能)。

- $\Delta>0 \Leftrightarrow$ 相異なる 3 実根を持つ。
- $\Delta=0 \Leftrightarrow$ 重根を持ち、かつすべての根は実数である。
- $\Delta<0 \Leftrightarrow$ 1 つの実根と、互いに複素共役な虚根を持つ。

歴史　Cardano (1501–1576, イタリア) 続き

$\Delta \leq 0$ のときは、$\sqrt{\frac{-\Delta}{108}}$ は非負の実数であり、(2) の x は、2 つの実数の 3 乗根の和であるから、実数解を与える。特に $\Delta < 0$ のときは、これが唯一の実数解である。

3 次方程式なので、他に 2 つの根があるはず。Cardano は書かなかったけれど、

$$\omega\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{-\Delta}{108}}}+\omega^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{-\Delta}{108}}}, \qquad \omega^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{-\Delta}{108}}}+\omega\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{-\Delta}{108}}}.$$

ただし $\omega := \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$.

問題は $\Delta > 0$ の場合 (相異なる 3 実根を持つ場合)。このとき、$\sqrt{\frac{-\Delta}{108}}$ は純虚数であり、(2) の x は、2 つの虚数の 3 乗根の和である。

Cardano は著書の中で、$\Delta > 0$ となる例は取り上げなかったが、虚数の必要性に気づいていたらしく、負数の平方根については「和が 10、積 40 がである 2 数を求めよ (答は $t^2 - 10t + 40 = 0$ を解いて $5 \pm \sqrt{15}\,i$)」という有名な問題を残している。

歴史 Bombelli (1526–1572)

Bombelli は、虚数について詳しい分析をして、Cardano の公式 (1) は $\Delta > 0$ のときも解を表す、と述べた。

例えば

$$x^3 = 15x + 4.$$

この解は $x = 4$, $x = -2 \pm \sqrt{3}$ (高校数学で解ける)。

この方程式に対して、Cardano の公式 (1) は

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

という数を与えるが、Bombelli は虚数に関する計算法を導入し、この x は 4 に等しい、と論じた。

実は、$\Delta > 0$ (相異なる 3 実数解) のとき、“虚数を使わずに解を表す公式 (ただし根号を用いるもの)” は存在しないことが分かった。

虚数とつきあわない訳には行かない？…

歴史

- **de Moivre (1667–1754)**
  $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$ (1730 年)
- **Euler (1707–1783)**
  $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ (1748 年), $e^{i\pi} = -1$
- **Gauss (1777–1855)**
  複素平面、代数学の基本定理、実は他にも色々知っていたが発表せず。
- **Cauchy (1789–1857)**
  定積分計算のために、ほぼこの講義の内容を考え出した。
- **19 世紀は関数論の世紀 (?)**
  Abel (1802–1829), Jacobi (1804–1851), Weierstrass (1815–1897), Riemann (1826–1866) など。楕円関数、代数関数、Riemann 面
- **量子力学**
  量子力学には複素数が本質的に必要である。

複素数は高校数学で一応は教わったが、教科書にきちんとした定義が書いてあるとは言いにくい。でも、まずはそれをおさらいしてみよう。

$i^2=-1$ となる数 (**虚数単位**, the imaginary unit) i を導入し、$a+bi$ (a と b は実数) と書ける数を**複素数** (a complex number) という。複素数全体の集合を $\mathbb{C}$ で表す。

手短に言うと、i^2 が出て来たら -1 で置き換える以外は、i を変数とする文字式と同じように (つまり実数と同じ計算ルールで) 計算する。

具体的には

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i,$$
$$(a+bi)\cdot(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

で和と積を定める (定められる？)。

実数でない複素数のことを**虚数** (an imaginary number) と呼ぶ。つまり虚数とは、$a+bi$ ($a,b\in\mathbb{R}$, $b\neq 0$) と書ける数のことをいう。

複素数と虚数を混同する人がとても多い。注意しましょう。

1.1 高校で習ったこと $+\alpha$　新しい言葉と記号、その他

$b=0$ のとき、つまり $a+i0$ を単に a と表す。実数と見分けがつかない。「同一視」していることになる (つまり「実数は複素数」)。2 つの実数を実数として足したりかけたりしたものは、複素数として足したりかけたりものと、結果は同じになるので、矛盾は生じない。

$a=0$ のとき、つまり $0+bi$ を単に bi と表す。この bi を**純虚数** (a purely imaginary number) と呼ぶ。この定義によると、$0=0+0i$ も純虚数であり、「0 は虚数ではないが純虚数である」ということになる。(個人的には気持ちが悪いので、この言葉はこの授業では使わないことにしている。本を読むとたまに出て来るので、一応知っていた方が良い。)

以上が高校数学での複素数であるが、かなりいい加減で、定義とは言いにくい (書いていても気持ちが悪い)。

きちんとした定義は、次項 (§1.2) で与えることにする。

虚数単位の記号　虚数単位は純粋数学の文献では i と書かれるが、電流を i と書きたい分野では j と書かれたりする。JIS (日本工業規格) では、字体を立体にして i あるいは j と書くことになっている (そうである)。

プログラミング言語の Mathematica では、虚数単位を `I` で表す。また MATLAB では `i`, `j` のどちらも虚数単位を表し、`i` や `j` を変数名として用いて異なる値を割り当てた場合も `1i` や `1j` は虚数単位を表す。Python では、`j` で虚数単位を表し、`j` を変数名として用いて異なる値を割り当てた場合も `1j` は虚数単位を表す。

複素変数を表す文字　複素数の変数は、z, w, ζ などの文字で表されることが多い (ζ はギリシャ文字で (大文字は Z)、ゼータ、またはツェータと読む)。

1.1 高校で習ったこと $+\alpha$　実部・虚部

$z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ に対して、x, y をそれぞれ z の**実部** (the real part of z)、**虚部** (the imaginary part of z) と呼び、$\mathrm{Re}\, z$, $\mathrm{Im}\, z$ で表す:

$$x = \mathrm{Re}\, z, \quad y = \mathrm{Im}\, z.$$

(この記号は高校では出て来ていないかもしれない。)

(w の実部・虚部には u, v が、ζ の実部・虚部には ξ, η が使われることが多い: $w = u + iv$, $\zeta = \xi + i\eta$)

例 1.1

$z = 1 - 2i$ のとき、$\mathrm{Re}\, z = 1$, $\mathrm{Im}\, z = -2$. 次のようにも書ける。

$$\mathrm{Re}(1-2i) = 1, \quad \mathrm{Im}(1-2i) = -2.$$

(注意　$\mathrm{Im}(1-2i) = -2i$ ではない。)

加法の単位元は $0 = 0 + 0i$, 乗法の単位元は $1 = 1 + 0i$ である。

$$(\forall z \in \mathbb{C}) \quad z + 0 = 0 + z = z, \quad (\forall z \in \mathbb{C}) \quad z \cdot 1 = 1 \cdot z = z.$$

複素数は、0 でない任意の数で割算が出来る。
$z = x + iy \neq 0$ $(x, y \in \mathbb{R})$ の、乗法に関する逆元 w を求めよう。
w が z の乗法に関する逆元とは

$$zw = 1$$

を満たすことをいう。$z = 0$ の逆元は存在しない。$z \neq 0$ の逆元を求めよう。
$w = u + iv$ $(u, v \in \mathbb{R})$ とおくと、$(x + iy)(u + iv) = 1$ は

$$\left\{\begin{array}{l} xu - yv = 1 \\ xv + yu = 0 \end{array}\right. \tag{3}$$

という連立 1 次方程式と同値である。この方程式は、$z \neq 0$ のときは一意的な解

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v = -\frac{y}{x^2 + y^2}$$

を持つ。ゆえに $z \neq 0$ の逆元 w は一意的に存在して

$$w = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

問　このことを確かめよ。

解答　(3) は
$$\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
と書き換えられる。$z \neq 0$ であれば $x^2+y^2>0$ であるから
$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{x}{x^2+y^2} \\ \dfrac{-y}{x^2+y^2} \end{pmatrix}.$$
ゆえに
$$w = u + iv = \frac{x}{x^2+y^2} + \frac{-iy}{x^2+y^2}. \quad \square$$

1 行でまとめると
$$(x, y \in \mathbb{R}) \wedge x + iy \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}.$$

問　高校生のとき

$$\frac{1}{x+yi} = \frac{x-yi}{(x+yi)(x-yi)} = \frac{x-yi}{x^2 - x\cdot yi + yi\cdot x - y^2 i^2} = \frac{x-yi}{x^2+y^2}$$

のような計算をしたことがあるだろう。これを $x+yi$ の逆元が $\dfrac{x-yi}{x^2+y^2}$ であることの証明として採用できるだろうか？

答　このままでは採用できない。$x+yi$ の逆元の存在と一意性が証明できていない段階では、$\dfrac{1}{x+yi}$ はナンセンスな式であり、上の計算で分かるのは、「複素数 a, b, c $(b, c \neq 0)$ について $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$」が成り立ち、またもし $x+yi$ の逆元が一意的に存在するならば、それは $\dfrac{x-yi}{x^2+y^2}$ である、ということくらい。実際に逆元であることを確認する、例えば

$$\begin{aligned}(x+yi)\left(\frac{x}{x^2+y^2} + \frac{-y}{x^2+y^2}i\right) &= \left(x\frac{x}{x^2+y^2} - y\frac{-y}{x^2+y^2}\right) + \left(x\frac{-y}{x^2+y^2} + y\frac{x}{x^2+y^2}\right)i \\ &= \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} + 0\cdot i = 1\end{aligned}$$

のような計算をすることが必要である。 □

参考文献

[1] 桂田祐史：複素関数論ノート, 現象数理学科での講義科目「複素関数」の講義ノート.
https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2024/complex2024.pdf
(2014〜).

[2] 神保道夫（じんぼう）：複素関数入門, 現代数学への入門, 岩波書店 (2003), 丸善 eBook では
https://elib.maruzen.co.jp/elib/html/BookDetail/Id/3000006063
でアクセスできる.