

複素関数練習問題 No. 4

<https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex/>

桂田 祐史

2017年11月10日, 2023年8月31日

冪級数の収束

問題 66. $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, $(e^x)' = e^x$, $(\log x)' = \frac{1}{x}$ ($x > 0$), $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ ($x > 0$), $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$ などを用いて、以下の各関数の $x=0$ のまわりの Taylor 展開を求めよ。もとの関数と等しいことの証明は要求しない。

(1) $\sin x$ (2) $\cos x$ (3) e^x (4) $(1+x)^\alpha$ (5) $\log(x+1)$ (6) $\arctan x$ ($\tan^{-1} x$ のこと)

問題 67. 以下の (1)~(4) を示せ。

(1) $h > 0$, $n \in \mathbb{N}$ のとき、 $(1+h)^n \geq 1+nh$. (2) $r > 1$ のとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = +\infty$. (3) $r < 1$ のとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$.
(4) $r < 1$ のとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} nr^n = 0$.

問題 68. r を複素数とすると、次のものを求めよ。 (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n$ (2) $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ (3) $\sum_{n=0}^{\infty} nr^n$

問題 69. (数学解析履修者向け) (1) 収束列は有界であることを示せ。 (2) Cauchy 列は有界であることを示せ。
(注意: 「収束」, 「Cauchy 列」, 「(数列の) 有界」の定義を確認する主旨。)

問題 70. (1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するならば、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ であることを示せ。 (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ でないならば、 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束しないことを示せ。 (3) (1) の命題の逆の反例をあげよ。

問題 71. (1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が絶対収束するとはどういうことか、定義を述べよ。 (2) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が絶対収束すれば、 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束することを示せ。

((1) は解答出来てほしい。また (2) の事実は覚えてほしい。)

問題 72. (1) 優級数の定理を書け。 (2) 優級数の定理を証明せよ。 ((1) は解答出来てほしい。)

問題 73. 次のことを示せ。

(1) 冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ の係数が有界 (i.e., ある実数 M に対して $|a_n| \leq M$) ならば、 $|z| < 1$ のとき冪級数は収束する。
(2) 冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ の係数がある実数 M に対して $|a_n| \leq Mr^n$ を満たすならば、 $|z| < 1/r$ のとき冪級数は収束する。

問題 74. 冪級数の収束半径の定義を述べよ。(収束半径が 0 , $+\infty$ ということはそれぞれどういうことかも記せ。)

以下、冪級数の収束半径を扱うときは、 $\frac{1}{0} = +\infty$, $\frac{1}{+\infty} = 0$ と約束する。

問題 75. 「冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$ に対して、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \rho$ が確定する (極限を持つ (収束する)、あるいは $\rho = +\infty$) ならば、 ρ はこの冪級数の収束半径である」(d'Alembert の公式、あるいは ratio test) を示せ。

問題 76. 次の冪級数の収束半径と収束円を求めよ。

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2} \quad (2) \sum_{n=0}^{\infty} n! z^n \quad (3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} z^{2n-1} \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} (z-1)^n$$

問題 77. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ の収束半径が ρ のとき、 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{2n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 z^n$ の収束半径を求めよ。

問題 78. 冪級数 $\sum_{n=1}^{\infty} z^{n!} = z + z^2 + z^6 + z^{24} + \dots$ について、以下の間に答えよ。

(1) $|z| < 1$ ならば収束することを示せ。 (2) $|z| \geq 1$ ならば収束しないことを示せ。 (3) 収束半径を求めよ。

(3) は (1), (2) からすぐ分かる。ちなみに d'Alembert の公式は使えない。lim sup を知っているのならば、問 80 の Cauchy-Hadamard の公式を使うことが出来る。))

次の 2 問は、上極限 \limsup を学んでいる人向けのものである。

問題 79. $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = S$ とはどういうことか定義を述べよ。

問題 80. 「冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$ の収束半径は、 $\rho := \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$ である」 (Cauchy-Hadamard の公式) を示せ。

問題 81. (教科書の演習問題 p. 46) 以下の冪級数の収束半径を求めよ。

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^n \quad (2) \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{2^n} \quad (3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n} z^n \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} z^{n!}$$

問題 82. (1) 任意の自然数 k に対して $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^k} = 1$ を示せ。 (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$ を示せ。

(Cauchy-Hadamard の公式の利用は、この講義としては特に推奨しない¹。用いるためには、いくつか準備をしておく必要があり、この間の結果もそれらのうちのの一つ。)

問題 83. 次の冪級数はいずれも収束半径が 1 であるが、収束円周 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ 上の点での収束・発散を調べよ。

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} z^n \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2} \quad (3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

((2) が解けて欲しい。「 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ が収束 $\Leftrightarrow \alpha > 1$ 」は忘れないこと (解析学の常識)。 (3) は Abel の級数変形法を使う²。)

一様収束

収束の問題はうるさく言わないことにするが (定理の証明は講義し、それを理解するよう努力してもらおうが、試験でそういう問題の比重は低い)、理解の手助けのために。

問題 84. 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、 $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f_n(x) := \begin{cases} -1 & (x < -\frac{1}{n} \text{ のとき}) \\ nx & (-\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n} \text{ のとき}) \\ 1 & (x > \frac{1}{n} \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定めるとき、任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して、極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ を求めよ。 $\{f_n\}$ は一様収束するかどうか答えよ。

問題 85. $K := [0, 1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$, $f_n(x) := x^n$ ($n \in \mathbb{N}$, $x \in K$) とするとき、以下の間に答えよ。

(1) $x \in K$ とするとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ を求めよ。 (2) $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は K では一様収束しないが、 $0 < R < 1$ なる任意の R に対して、 $[0, R]$ では一様収束することを示せ。

¹複素関数論としては、他に学ぶべき重要なことがたくさんあり、そちらの学習に時間を割くことを勧める。

²ちょっと高級。数学系の学科では、院試で出題されたりします。

解答

解答 66. 以下 $a \equiv b$ は $a \equiv b \pmod{4}$ という合同式の略記とする。

(1) $f(x) = \sin x$ とおく。

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \sin x & (n \equiv 0) \\ \cos x & (n \equiv 1) \\ -\sin x & (n \equiv 2) \\ -\cos x & (n \equiv 3) \end{cases}, \quad f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & (n \equiv 0) \\ 1 & (n \equiv 1) \\ 0 & (n \equiv 2) \\ -1 & (n \equiv 3) \end{cases} = \begin{cases} 0 & (n \text{ が偶数}) \\ (-1)^k & (n \text{ が奇数, } n = 2k + 1) \end{cases}$$

であるから

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad (\text{収束半径は } \infty).$$

(2) $f(x) = \cos x$ とおく。

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \cos x & (n \equiv 0) \\ -\sin x & (n \equiv 1) \\ -\cos x & (n \equiv 2) \\ \sin x & (n \equiv 3) \end{cases}, \quad f^{(n)}(0) = \begin{cases} 1 & (n \equiv 0) \\ 0 & (n \equiv 1) \\ -1 & (n \equiv 2) \\ 0 & (n \equiv 3) \end{cases} = \begin{cases} 0 & (n \text{ が奇数}) \\ (-1)^k & (n \text{ が偶数, } n = 2k) \end{cases}$$

であるから

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad (\text{収束半径は } \infty).$$

(3) $f(x) = e^x$ とおく。 $f'(x) = e^x$ より $f^{(n)}(x) = e^x$, $f^{(n)}(0) = 1$ であるから、

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \quad (\text{収束半径は } \infty).$$

(4) $f(x) = x^\alpha$ とおく。

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}, \\ f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)$$

であるから、

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \quad (\text{収束半径は } 1).$$

ただし $\binom{\alpha}{n}$ は次式で定義される一般 2 項係数である:

$$\binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$$

(5) $f(x) = \log(1+x)$ とおく。 $f'(x) = \frac{1}{x+1} = (x+1)^{-1}$ であるから、

$$f^{(n)}(x) = (-1)(-2)\cdots(-n+1)(x+1)^{-n} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & (n=0) \\ (-1)^{n-1}(n-1)! & (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

ゆえに

$$\log(x+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \quad (\text{収束半径は } 1).$$

(6) 等比級数の和の公式から

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \quad (|x| < 1).$$

項別積分することで (これは微積分の範囲外になるかもしれない)

$$(b) \quad \arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad (|x| < 1).$$

あるいは (項別積分を避けたければ)

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} = \frac{1 - (-x^2)^{n+1}}{1 - (-x^2)}$$

を積分して

$$\arctan x = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} + \int_0^x \frac{(-t^2)^{n+1}}{1+t^2} dt.$$

ここで $|x| < 1$ に範囲を限定して、 $n \rightarrow \infty$ とすることで (h) が得られる (右辺第 1 項は交代級数だから収束するとか、右辺第 2 項の積分は 0 に収束するとか、少し議論が必要であるが、難しくない)。

一般に「関数が収束する冪級数に展開されたら、その関数は Taylor 展開が可能で、その冪級数が Taylor 展開に一致する」という命題が成り立つので、(h) が $\arctan x$ の Taylor 展開である。■

得られた級数の収束半径のチェックと (これは比較的簡単)、剰余項が 0 に収束することの証明も良い演習問題である。後者は (1), (2), (3), (5) は比較的簡単で、(4) は難し目。(6) は等式が成り立つことは示してあるので、剰余項が 0 に収束することを証明する必要がない (Lagrange の剰余項は書くのが難しいが、しないで済むので問題ない)。■

解答 67. (1) 2 項定理 $(1+h)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} h^k$ により、 $n \geq 2$ のとき $(1+h)^n = 1 + nh + \dots$ 。右辺の \dots の各項は 0 以上であるから、 $(1+h)^n \geq 1 + nh$ 。 $n = 1$ のときも成り立つ。

(2) $h := r - 1$ とおくと、 $h > 0$, $r = 1 + h$ 。ゆえに $r^n = (1+h)^n \geq 1 + nh$ 。 $\lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty$ であるから、 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + nh) = +\infty$ 。ゆえに $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = +\infty$ 。

(3) $h := 1/r - 1$ とおくと、 $h > 0$, $r = \frac{1}{1+h}$ であるから、 $0 \leq r^n = \frac{1}{(1+h)^n} \leq \frac{1}{1+nh} \leq \frac{1}{nh}$ 。 $n \rightarrow \infty$ のとき、 $\frac{1}{nh} \rightarrow 0$ であるから、はさみ打ちの原理により、 $r^n \rightarrow 0$ 。(4) (1) と同様にして、 $n \geq 2$ のとき、 $(1+h)^n \geq n(n-1)h^2/2$ が示せる。 $h := 1/r - 1$ とおくと、 $h > 0$, $r = \frac{1}{1+h}$ であるから、 $0 \leq nr^n = \frac{n}{(1+h)^n} \leq \frac{2n}{n(n-1)h^2} = \frac{2}{(n-1)h^2}$ 。 $n \rightarrow \infty$ のとき、 $\frac{1}{(n-1)h^2} \rightarrow 0$ であるから、はさみ打ちの原理により、 $nr^n \rightarrow 0$ 。■

解答 68.

(1) まず結果を述べる。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \begin{cases} 0 & (|r| < 1 \text{ のとき}) \\ 1 & (r = 1 \text{ のとき}) \\ \text{発散} & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

- $|r| < 1$ の場合は $|r^n - 0| = |r|^n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) であるから $r^n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$)。
- $r = 1$ の場合は $r^n = 1 \rightarrow 1$ ($n \rightarrow \infty$) は明らか。
- $|r| = 1$ かつ $r \neq 1$ の場合は、

$$|r^n - r^{n+1}| = |r^n| |1 - r| = |1 - r| \neq 0$$

であるから、 $n \rightarrow \infty$ のとき r^n は収束しない (もしも $\exists c \in \mathbb{C}$ s.t. $r^n \rightarrow c$ ならば、 $|r^n - r^{n+1}| \rightarrow |c - c| = 0$ となるはずで矛盾する)。

- $|r| > 1$ の場合は $|r^n| = |r|^n \rightarrow \infty$ であるから、 r^n は発散する (もしも $\exists c \in \mathbb{C}$ s.t. $r^n \rightarrow c$ ならば、 $|r^n| \rightarrow |c|$ であり、矛盾する。)

(2) 等比数列の和の公式から、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\sum_{j=0}^n r^j = \begin{cases} \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} & (r \neq 1 \text{ のとき}) \\ n + 1 & (r = 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

が成り立つので (1) の結果から

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \begin{cases} \frac{1}{1 - r} & (|r| < 1 \text{ のとき}) \\ \text{発散} & (|r| \geq 1 \text{ のとき}). \blacksquare \end{cases}$$

解答 69. (数学解析講義ノート³ が参考になる。)

- (1) 収束列が有界というのは、実数列の場合に命題 2.9 (p. 20) で述べて、証明も書いてある。それと同様にやれば良い。
 (2) Cauchy 列の有界性は独立した命題としては書いていなかった (命題 5.11 の証明の中で証明してある) ようなので、ここには書いておく。 $\{a_n\}$ が Cauchy 列であれば、ある自然数 N が取れて

$$(\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N)(\forall m \in \mathbb{N} : m \geq N) \quad |a_n - a_m| < 1$$

が成り立つ。これから $n \geq N$ を満たす任意の n に対して (特に $m = N$ と選ぶことで)

$$(\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N) \quad |a_n - a_N| < 1.$$

これから

$$|a_n| = |a_n - a_N + a_N| \leq |a_n - a_N| + |a_N| < 1 + |a_N|.$$

そこで

$$M := \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{N-1}|, 1 + |a_N|\}$$

とおくと、 $M \in \mathbb{R}$ であり、任意の自然数 n に対して

$$|a_n| \leq M$$

が成り立つ。ゆえに $\{a_n\}$ は有界である。 ■

解答 70. (1) $s_n := \sum_{k=1}^n a_k$ とおくと、 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束して和が s であるとは、 $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$ ということの意味する。今の場合、仮定から $(\exists s \in \mathbb{C}) \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$. このとき、 $a_n = s_n - s_{n-1}$ であるから $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n - \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1} = s - s = 0$. (2) これは (1) の対偶であるから成り立つ。(3) $a_n = \frac{1}{n}$ とするとき、 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束しないが、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. ■

解答 71. (1) 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ が収束するとき、級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は絶対収束するという。(2) (準備中。講義ノートには書いてあります。) ■

解答 72. (1) 「 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は複素数列で、2 条件 (i) $(\forall n \in \mathbb{N}) |a_n| \leq b_n$, (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ は収束する、を満たすならば、 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は絶対収束する。」

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ の n 項までの部分 and をそれぞれ S_n, T_n とおく: $S_n := \sum_{k=1}^n a_k, T_n := \sum_{k=1}^n |a_k|$. $n > m$ のとき

$$|S_n - S_m| = \left| \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^m a_k \right| = \left| \sum_{k=m+1}^n a_k \right| \leq \sum_{k=m+1}^n |a_k| = \sum_{k=n}^n |a_k| - \sum_{k=n}^m |a_k| = T_n - T_m.$$

同様に $n < m$ のとき、 $|S_n - S_m| \leq T_m - T_n$. ゆえに n, m の大小によらず

$$|S_n - S_m| \leq |T_n - T_m|.$$

仮定から $\{T_n\}$ は収束するので、 $\{T_n\}$ は Cauchy 列である。上の不等式から、 $\{S_n\}$ も Cauchy 列である。 \mathbb{C} は完備であるから、 $\{S_n\}$ は収束列である。すなわち $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する。 ■

³<https://m-katsurada.sakura.ne.jp/kaiseki/kaiseki-2019.pdf>

解答 73. (1) $A_n := a_n z^n$, $B_n := M|z|^n$ とおくと、 $|A_n| = |a_n||z|^n \leq M|z|^n$. $\sum_{n=0}^{\infty} B_n = \sum_{n=0}^{\infty} M|z|^n$ は、公比 $|z|$ の等比級数であり、 $|z| < 1$ のときこの公比は 1 より小さいので、 $\sum_{n=0}^{\infty} B_n$ は収束する (和は $\frac{M}{1-|z|}$)。ゆえに、優級数の定理により、 $\sum_{n=0}^{\infty} A_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ は絶対収束する。

(2) (宿題にしてあるのでしばらくは見せない。) ■

解答 74. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ が冪級数とするとき、次の (i), (ii), (iii) のいずれか一つが成立する。

(i) $(\forall z \in \mathbb{C}: z \neq c) \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ は収束しない。

(ii) $(\exists r \in \mathbb{R}: r > 0) (\forall z \in \mathbb{C}) \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ は $|z-c| < r$ ならば収束し、かつ $|z-c| > r$ ならば発散する。

(iii) $(\forall z \in \mathbb{C}) \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ は収束する。

(i) のとき収束半径は 0, (ii) のとき収束半径は r , (iii) のとき収束半径は $+\infty$ という。 ■

解答 75. (準備中)

解答 76.

(1) $a_n = \frac{1}{n^2}$ とおくと、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^2 = 1.$$

ゆえに収束半径は 1 である。収束円は $D(0; 1)$ 。

(2) $a_n = n!$ とおくと、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

ゆえに収束半径は 0 である。収束円は \emptyset 。

(3) これは宿題にして、そちらで解説したので後回し。結果だけ書いておくと、収束半径は ∞ で、収束円は \mathbb{C} 。

(4) $a_n = \frac{2^n}{n}$ とおくと、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n(n+1)}{2^{n+1}n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+1/n}{2} = \frac{1}{2}.$$

ゆえに収束半径は $\frac{1}{2}$ である。収束円は $D(1; 1/2)$. ■

解答 77. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{2n}$ は $\zeta = z^2$ とおくと、 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \zeta^n$ となるので、 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{2n}$ の収束半径が ρ であることから、

$$|\zeta| < \rho \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \zeta^n \text{ 収束}, \quad |\zeta| > \rho \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \zeta^n \text{ 発散}.$$

ゆえに

$$|z^2| < \rho \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{2n} \text{ 収束}, \quad |z^2| > \rho \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{2n} \text{ 発散}.$$

すなわち

$$|z| < \sqrt{\rho} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{2n} \text{ 収束}, \quad |z| > \sqrt{\rho} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{2n} \text{ 発散}.$$

したがって $\sqrt{\rho}$ が収束半径である。

後半は Cauchy-Hadamard 使わないとちょっと難しいかな。使わせてもらう。

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ の収束半径が ρ であることから、

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\rho}.$$

正数 r に対して、 $\sqrt[n]{r^2} = (r^2)^{1/n} = (r^{1/n})^2$ であるから、

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n^2|} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[n]{|a_n|} \right)^2 = \frac{1}{\rho^2}.$$

従って収束半径 ρ' は $\frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{\rho'}$ より $\rho' = \rho^2$. ■

解答 78. この冪級数を $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ と書くと、

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = k! \text{ となる } k \in \mathbb{N} \text{ が存在するとき}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

である。 $(k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots)$ とするとき、 $k! = 1, 2, 6, 24, 120, 720, \dots$ であるから、 $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 1, a_4 = a_5 = 0, a_6 = 1, a_7 = a_8 = \dots = a_{23} = 0, a_{24} = 1, \dots$

(1) $|z| < 1$ とするとき、

$$|a_n z^n| = |a_n| |z|^n \leq 1 \cdot |z|^n = |z|^n.$$

$b_n := |z|^n$ とおくと、 $\{b_n\}$ は $\{a_n z^n\}$ の優級数で、 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ は収束するので、 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ は収束する。

(2) 任意の自然数 n に対して、 $a_{n!} = 1$ であるから、

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\exists m \in \mathbb{N} : m \geq n) \quad a_m = 1$$

が成り立つ ($m = n!$ とすれば良い)。特に $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ではない。ゆえにこの冪級数は $z = 1$ で収束しない (実際、一般項 $a_n z^n = a_n$ は 0 に収束しないから)。

(3) (1), (2) から $\rho := 1$ とするとき、 $|z| < \rho$ で収束、 $|z| > \rho$ で発散するので、収束半径は 1 である。 ■

解答 79. 実数列 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ と実数 a に対して、

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

であるとは、次の (a), (b) が成り立つことをいう。

(a) $(\forall \varepsilon > 0) (\exists N \in \mathbb{N}) (\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N) a_n < a + \varepsilon.$

(b) $(\forall \varepsilon > 0) (\forall k \in \mathbb{N}) (\exists n \in \mathbb{N} : n \geq k) a_n > a - \varepsilon$

(言い換えると、任意の正数 ε に対して $a_n > a - \varepsilon$ を満たす n が無限個存在する。) ■

解答 80. (準備中)

解答 81.

(1) $a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ とおくと、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2(n+1))! (n!)^2}{[(n+1)!]^2 (2n)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2+2/n)(2+1/n)}{(1+1/n)^2} = 4.$$

収束半径は 4.

(2) これは問 78 と同様に解ける (そのあらずじ: $z = 1$ に対して $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n z^n = 0$ は成り立たないので、 $z = 1$ で収束しないが、 $|z| < 1$ を満たす任意の z に対して $|a_n z^n| \leq n |z|^n$ ($n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) で、 $\sum_{n=0}^{\infty} n |z|^n$ は収束するので、 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ は絶対収束する。以上から収束半径は 1.)。ここでは Cauchy-Hadamard の公式を使って解答してみる。

この冪級数の n 次の係数を a_n とする (すなわち $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ が成り立つとする) と、

$$a_n = \begin{cases} n & (\exists k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ s.t. } n = 2^k) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

ゆえに

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} \sqrt[n]{n} & (\exists k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ s.t. } n = 2^k) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

これから $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$. (証明: $\sqrt[n]{|a_n|} \leq \sqrt[n]{n}$ であるから、 $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$. 一方 $\forall \varepsilon > 0, \forall k \in \mathbb{N}$ に対して、 $n := 2^k$ とおくと $n \geq k$, $\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{n} > 1 - \varepsilon$ であるから、 $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$.) ゆえに収束半径は $1/1 = 1$.

(3) $a_n := \frac{\log n}{n}$ とおくと、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{n} \frac{n+1}{\log(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \frac{\log n}{\log n + \log \left(1 + \frac{1}{n} \right)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \frac{1}{1 + \frac{\log(1 + 1/n)}{\log n}} = 1 \cdot \frac{1}{1 + 0/\infty} = 1. \end{aligned}$$

(4) おっと、これは 39 と同じだ (笑)。■

解答 82.

(1) 講義ノートの 1.1.4 に書いてある。

(2) 階乗 (より一般にはガンマ関数) を近似するスターリングの公式 (Stirling's approximation, Stirling's formula)

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e} \right)^n \quad (n \rightarrow \infty)$$

(この意味は、 $n \rightarrow \infty$ のとき $\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}(n/e)^n} \rightarrow 1$ という事) を知っていれば直接証明するのは簡単だけど、微積分で習ったかな…

というわけで、スターリングの公式を使わないでやってみよう。冪級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} n! z^n$$

を考える。この冪級数の収束半径は、 $a_n := n!$ とおくと

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

であることから 0 である。Cauchy-Hadamard の公式から

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{0} = +\infty.$$

$\{\sqrt[n]{|a_n|}\}$ は単調増加数列である。実際

$$\left(\frac{\sqrt[n+1]{|a_{n+1}|}}{\sqrt[n]{|a_n|}} \right)^{n(n+1)} = \frac{((n+1)!)^n}{(n!)^{n+1}} = \frac{(n+1)^n \cdot (n!)^n}{n! \cdot (n!)^n} = \frac{(n+1)^n}{n!} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n+1}{n-1} \cdots \frac{n+1}{2} \cdot \frac{n+1}{1} > 1$$

であるから、 $\sqrt[n+1]{|a_{n+1}|} > \sqrt[n]{|a_n|}$. ゆえに

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty. \blacksquare$$

解答 83.

(1) 一般に、級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するならば $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ であることを思い出そう。 $a_n = z^n$ についてこれを用いる。

$|z| = 1$ のとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} |z^n| = 1$ であるので、 $\lim_{n \rightarrow \infty} z^n = 0$ は成り立たない。ゆえに $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ は収束しない。

(2) $M_n := \frac{1}{n^2}$ とおくと、

- $|z| = 1$ を満たす任意の z と、 $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して、 $\left| \frac{z^n}{n^2} \right| = \frac{1}{n^2} \leq M_n$. (等号が成り立つけれど、定理にあてはめるため、不等号で書いてみた。どちらで書いても間違いではない。)
- $\sum_{n=1}^{\infty} M_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ は収束する (これは常識、和が $\pi^2/6$ であることは忘れても、収束することは忘れてはいけない)。

Weierstrass の M-test (という定理) により、 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ は $|z| = 1$ で一様に絶対収束する。

(3) 結果だけ先に書いておくと、 $z = 1$ では発散、 $|z| = 1$ かつ $z \neq 1$ では収束する。

$|z| = 1$ とするとき、 $\left| \frac{z^n}{n} \right| = \frac{1}{n}$ で、 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ は収束しないので、 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ は絶対収束しない。だから微妙なケースである。 $z = 1$ では ($\frac{z^n}{n} = \frac{1}{n}$ なので) 収束しないが、 $z = -1$ のとき

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots$$

はいわゆる交代級数に関する Leibniz の定理により収束することが分かる (実は和は $-\log 2$)。Abel の級数変形法 (これは講義できない年度もある) を用いると、 $|z| = 1, z \neq 1$ を満たす任意の z に対して $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ は収束することを示せる。■