複素関数・同演習 第 27 回
〜定積分計算への留数定理の応用, 留数定理 (2)〜

かつらだ　まさし
桂田 祐史
https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2022/

2023 年 1 月 11 日

目次

本日の内容・連絡事項

- 留数定理の定積分計算への応用を解説する。
- 宿題 13 を出します。

13 定積分計算への留数の応用

もともと Cauchy が複素関数論を考えだした動機は、(主に実関数の) 定積分の計算を、なるべく統一的な方法を使って行えるようにするためだったそうであるが (岡本・長岡 [1])、そうして創られた理論は、定積分計算という当初の目的を大きく超えて発展することになった。

13 定積分計算への留数の応用

もともと Cauchy が複素関数論を考えだした動機は、(主に実関数の) 定積分の計算を、なるべく統一的な方法を使って行えるようにするためだったそうであるが (岡本・長岡 [1])、そうして創られた理論は、定積分計算という当初の目的を大きく超えて発展することになった。

一方でこの §13 で説明するような (留数計算に基づく) 定積分の計算法は、使いこなすために関数論の堅実な理解が必要で、自分の知識に不十分なところがないかのチェックのための良い演習問題 (センセーにとっては試験問題) を提供してくれる。

13.1 有理関数の $\mathbb{R}$ 上の積分

記号の約束

$$\mathbb{C}[z] := z \text{ の複素係数多項式全体}.$$

$P(z) \in \mathbb{C}[z]$ に対して

$$\deg P(z) := P(z) \text{ の次数 (degree)}.$$

13.1 有理関数の $\mathbb{R}$ 上の積分

記号の約束

$$\mathbb{C}[z] := z \text{ の複素係数多項式全体.}$$

$P(z) \in \mathbb{C}[z]$ に対して

$$\deg P(z) := P(z) \text{ の次数 (degree).}$$

定理 27.1 (有理関数の $\mathbb{R}$ 上の積分)

$P(z), Q(z) \in \mathbb{C}[z]$, $f(z) = \dfrac{Q(z)}{P(z)}$, $\deg P(z) \geq \deg Q(z) + 2$, 任意の実数 x に対して $P(x) \neq 0$ とするとき

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\, c>0} \mathrm{Res}(f; c).$$

ここで $\displaystyle\sum_{\mathrm{Im}\, c>0}$ は、f の極 c のうち、$\mathrm{Im}\, c > 0$ を満たすものすべてについての和を取ることを意味する。

13.1 有理関数の $\mathbb{R}$ 上の積分

注意事項を 3 つ。

13.1 有理関数の $\mathbb{R}$ 上の積分

注意事項を 3 つ。

1. このように $\mathbb{R}$ 全体での積分が頻出する。これらはいわゆる広義積分で

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R_1,R_2\to+\infty} \int_{-R_1}^{R_2} f(x)\,dx.$$

上の定理の場合は (証明をみれば分かるように) 絶対収束するので

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,dx.$$

13.1 有理関数の $\mathbb{R}$ 上の積分

注意事項を 3 つ。

1. このように $\mathbb{R}$ 全体での積分が頻出する。これらはいわゆる広義積分で

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R_1,R_2\to+\infty} \int_{-R_1}^{R_2} f(x)\,dx.$$

上の定理の場合は (証明をみれば分かるように) 絶対収束するので

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,dx.$$

2. 微積分で、有理関数の原始関数は初等関数の範囲で求まることを学んだ (はずである)。だから上の定理の公式を使わなくても、積分は原理的には計算出来るが、上の定理を使う方がずっと見通しが良い。

13.1 有理関数の $\mathbb{R}$ 上の積分

注意事項を 3 つ。

1. このように $\mathbb{R}$ 全体での積分が頻出する。これらはいわゆる広義積分で
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R_1,R_2\to+\infty}\int_{-R_1}^{R_2} f(x)\,dx.$$
上の定理の場合は (証明をみれば分かるように) 絶対収束するので
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\,dx.$$
2. 微積分で、有理関数の原始関数は初等関数の範囲で求まることを学んだ (はずである)。だから上の定理の公式を使わなくても、積分は原理的には計算出来るが、上の定理を使う方がずっと見通しが良い。
3. 下半平面にある留数の和を取るとどうなるか？

13.1 有理関数の $\mathbb{R}$ 上の積分

注意事項を 3 つ。

1. このように $\mathbb{R}$ 全体での積分が頻出する。これらはいわゆる広義積分で
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R_1,R_2\to+\infty}\int_{-R_1}^{R_2} f(x)\,dx.$$
上の定理の場合は (証明をみれば分かるように) 絶対収束するので
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\,dx.$$

2. 微積分で、有理関数の原始関数は初等関数の範囲で求まることを学んだ (はずである)。だから上の定理の公式を使わなくても、積分は原理的には計算出来るが、上の定理を使う方がずっと見通しが良い。

3. 下半平面にある留数の和を取るとどうなるか？実は値が -1 倍になる。つまり
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = -2\pi i \sum_{\operatorname{Im} c<0} \operatorname{Res}(f;c).$$
(実は $\sum_{c} \operatorname{Res}(f;c) = 0$ が成り立つ。)

例 27.2

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 1} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

13.1 有理関数の $\mathbb{R}$ 上の積分

例 27.2

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^4+1}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

$P(z):=z^4+1$, $Q(z):=1$ とおくと、定理 27.1 の条件が成り立つ。実際、

例 27.2

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^4+1}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

$P(z):=z^4+1$, $Q(z):=1$ とおくと、定理 27.1 の条件が成り立つ。実際、$\deg P(z)=4$, $\deg Q(z)=0$ であるから、$\deg P(z)\geq\deg Q(z)+2$,

例 27.2

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^4+1}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

$P(z):=z^4+1$, $Q(z):=1$ とおくと、定理 27.1 の条件が成り立つ。実際、$\deg P(z)=4$, $\deg Q(z)=0$ であるから、$\deg P(z)\geq \deg Q(z)+2$, また任意の $x\in\mathbb{R}$ に対して $P(x)=x^4+1\geq 0+1=1$ であるから $P(x)\neq 0$.

例 27.2

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^4+1}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

$P(z):=z^4+1$, $Q(z):=1$ とおくと、定理 27.1 の条件が成り立つ。実際、$\deg P(z)=4$, $\deg Q(z)=0$ であるから、$\deg P(z)\geq\deg Q(z)+2$, また任意の $x\in\mathbb{R}$ に対して $P(x)=x^4+1\geq 0+1=1$ であるから $P(x)\neq 0$.

c が $\dfrac{Q}{P}$ の極 $\Leftrightarrow P(c)=0\Leftrightarrow c=e^{i\left(\frac{\pi}{4}+k\frac{2\pi}{4}\right)}$ $(k=0,1,2,3)\Leftrightarrow c=\frac{1+i}{\sqrt{2}},\frac{1-i}{\sqrt{2}},\frac{-1+i}{\sqrt{2}},\frac{-1-i}{\sqrt{2}}.$

例 27.2

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^4+1}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

$P(z):=z^4+1$, $Q(z):=1$ とおくと、定理 27.1 の条件が成り立つ。実際、$\deg P(z)=4$, $\deg Q(z)=0$ であるから、$\deg P(z)\ge\deg Q(z)+2$, また任意の $x\in\mathbb{R}$ に対して $P(x)=x^4+1\ge 0+1=1$ であるから $P(x)\ne 0$.

c が $\dfrac{Q}{P}$ の極 $\Leftrightarrow P(c)=0\Leftrightarrow c=e^{i\left(\frac{\pi}{4}+k\frac{2\pi}{4}\right)}$ $(k=0,1,2,3)$ $\Leftrightarrow c=\frac{1+i}{\sqrt{2}},\frac{1-i}{\sqrt{2}},\frac{-1+i}{\sqrt{2}},\frac{-1-i}{\sqrt{2}}.$

$\operatorname{Im} c>0$ となるのは、$c_1:=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$, $c_2:=\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$. これらは $c^4=-1$ を満たし、P の 1 位の零点であるから

$$\operatorname{Res}\left(\frac{Q}{P};c_j\right)=\frac{Q(c_j)}{P'(c_j)}=\frac{1}{4c_j^3}=\frac{c_j}{4c_j^4}=-\frac{c_j}{4}.$$

例 27.2

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

$P(z) := z^4 + 1$, $Q(z) := 1$ とおくと、定理 27.1 の条件が成り立つ。実際、$\deg P(z) = 4$, $\deg Q(z) = 0$ であるから、$\deg P(z) \geq \deg Q(z) + 2$, また任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $P(x) = x^4 + 1 \geq 0 + 1 = 1$ であるから $P(x) \neq 0$.

c が $\dfrac{Q}{P}$ の極 $\Leftrightarrow P(c) = 0 \Leftrightarrow c = e^{i\left(\frac{\pi}{4} + k\frac{2\pi}{4}\right)}$ $(k = 0, 1, 2, 3) \Leftrightarrow c = \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \frac{1-i}{\sqrt{2}}, \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, \frac{-1-i}{\sqrt{2}}$.

$\operatorname{Im} c > 0$ となるのは、$c_1 := \frac{1+i}{\sqrt{2}}$, $c_2 := \frac{-1+i}{\sqrt{2}}$. これらは $c^4 = -1$ を満たし、P の 1 位の零点であるから

$$\operatorname{Res}\left(\frac{Q}{P}; c_j\right) = \frac{Q(c_j)}{P'(c_j)} = \frac{1}{4c_j^3} = \frac{c_j}{4c_j^4} = -\frac{c_j}{4}.$$

定理 27.1 から、

$$I = 2\pi i \left(\operatorname{Res}\left(\frac{Q}{P}; c_1\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{Q}{P}; c_2\right)\right)$$

例 27.2

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^4+1}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

$P(z):=z^4+1$, $Q(z):=1$ とおくと、定理 27.1 の条件が成り立つ。実際、$\deg P(z)=4$, $\deg Q(z)=0$ であるから、$\deg P(z)\ge\deg Q(z)+2$, また任意の $x\in\mathbb{R}$ に対して $P(x)=x^4+1\ge 0+1=1$ であるから $P(x)\ne 0$.

c が $\dfrac{Q}{P}$ の極 $\Leftrightarrow P(c)=0\Leftrightarrow c=e^{i\left(\frac{\pi}{4}+k\frac{2\pi}{4}\right)}$ $(k=0,1,2,3)\Leftrightarrow c=\frac{1+i}{\sqrt{2}},\frac{1-i}{\sqrt{2}},\frac{-1+i}{\sqrt{2}},\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$.

$\operatorname{Im} c>0$ となるのは、$c_1:=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$, $c_2:=\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$. これらは $c^4=-1$ を満たし、P の 1 位の零点であるから

$$\operatorname{Res}\left(\frac{Q}{P};c_j\right)=\frac{Q(c_j)}{P'(c_j)}=\frac{1}{4c_j^3}=\frac{c_j}{4c_j^4}=-\frac{c_j}{4}.$$

定理 27.1 から、

$$I=2\pi i\left(\operatorname{Res}\left(\frac{Q}{P};c_1\right)+\operatorname{Res}\left(\frac{Q}{P};c_2\right)\right)=2\pi i\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)(c_1+c_2)=-\frac{\pi i}{2}\cdot\frac{2i}{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

定理 27.1 の証明

仮定からある定数 M, $R^*(\geq 1)$ が存在して次式が成り立つ。

$$(\forall z \in \mathbb{C}: |z| \geq R^*) \quad P(z) \neq 0 \wedge |f(z)| \leq \frac{M}{|z|^2}.$$

定理 27.1 の証明

仮定からある定数 M, $R^*(\geq 1)$ が存在して次式が成り立つ。

$$(\forall z \in \mathbb{C} : |z| \geq R^*) \quad P(z) \neq 0 \wedge |f(z)| \leq \frac{M}{|z|^2}.$$

(証明: $P(z) = a_0 z^n + \cdots + a_n$, $a_0 \neq 0$, $Q(z) = b_0 z^m + \cdots + b_m$, $b_0 \neq 0$ とする。仮定から $n - m \geq 2$ である。

$$\left|z^{n-m} f(z)\right| = \left|z^{n-m}\frac{Q(z)}{P(z)}\right| = \left|z^{n-m}\frac{b_0 z^m + \cdots + b_m}{a_0 z^n + \cdots + a_n}\right| \to \left|\frac{b_0}{a_0}\right| \quad (z \to \infty)$$

が分かる

定理 27.1 の証明

　仮定からある定数 M, $R^*(\geq 1)$ が存在して次式が成り立つ。

$$(\forall z \in \mathbb{C} : |z| \geq R^*) \quad P(z) \neq 0 \wedge |f(z)| \leq \frac{M}{|z|^2}.$$

(証明: $P(z) = a_0 z^n + \cdots + a_n$, $a_0 \neq 0$, $Q(z) = b_0 z^m + \cdots + b_m$, $b_0 \neq 0$ とする。仮定から $n - m \geq 2$ である。

$$\left|z^{n-m} f(z)\right| = \left|z^{n-m} \frac{Q(z)}{P(z)}\right| = \left|z^{n-m} \frac{b_0 z^m + \cdots + b_m}{a_0 z^n + \cdots + a_n}\right| \to \left|\frac{b_0}{a_0}\right| \quad (z \to \infty)$$

が分かるから、$M := 2\left|\dfrac{b_0}{a_0}\right|$ とおくと、ある $R^*(\geq 1)$ が存在して

$$\left|z^{n-m} f(z)\right| \leq M \quad (|z| \geq R^*).$$

定理 27.1 の証明

　仮定からある定数 M, $R^*(\geq 1)$ が存在して次式が成り立つ。

$$(\forall z \in \mathbb{C} : |z| \geq R^*) \quad P(z) \neq 0 \land |f(z)| \leq \frac{M}{|z|^2}.$$

(証明: $P(z) = a_0 z^n + \cdots + a_n$, $a_0 \neq 0$, $Q(z) = b_0 z^m + \cdots + b_m$, $b_0 \neq 0$ とする。仮定から $n - m \geq 2$ である。

$$\left|z^{n-m} f(z)\right| = \left|z^{n-m} \frac{Q(z)}{P(z)}\right| = \left|z^{n-m} \frac{b_0 z^m + \cdots + b_m}{a_0 z^n + \cdots + a_n}\right| \to \left|\frac{b_0}{a_0}\right| \quad (z \to \infty)$$

が分かるから、$M := 2\left|\dfrac{b_0}{a_0}\right|$ とおくと、ある $R^*(\geq 1)$ が存在して

$$\left|z^{n-m} f(z)\right| \leq M \quad (|z| \geq R^*).$$

ゆえに

$$|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^{n-m}} \leq \frac{M}{|z|^2} \quad (|z| \geq R^*)$$

が成り立つ。)

13.1 有理関数の $\mathbb{R}$ 上の積分

証明 (つづき)

ゆえに積分は絶対収束し

$$I = \lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\,dx. \quad (\text{一般には } \lim_{R_1,R_2\to+\infty}\int_{-R_1}^{R_2} \text{ だけど…深入りしない})$$

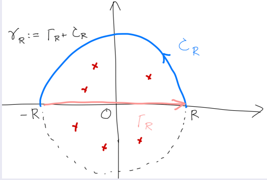
証明 (つづき)

ゆえに積分は絶対収束し

$$I = \lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\,dx. \quad (\text{一般には} \lim_{R_1,R_2\to+\infty}\int_{-R_1}^{R_2} \text{だけど}\cdots\text{深入りしない})$$

複素平面内の曲線 Γ_R, C_R, γ_R を次式で定める。

$$\Gamma_R\colon z = x \quad (x\in[-R,R]),$$
$$C_R\colon z = Re^{i\theta} \quad (\theta\in[0,\pi]),$$
$$\gamma_R := \Gamma_R + C_R.$$



証明 (つづき)

ゆえに積分は絶対収束し

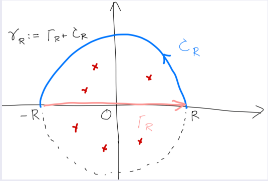
$$I=\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R}f(x)\,dx.\quad (\text{一般には }\lim_{R_1,R_2\to+\infty}\int_{-R_1}^{R_2}\text{ だけど}\cdots\text{深入りしない})$$

複素平面内の曲線 Γ_R, C_R, γ_R を次式で定める。

$$\Gamma_R\colon z=x\quad (x\in[-R,R]),$$

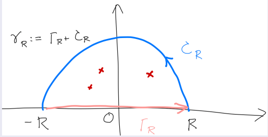
$$C_R\colon z=Re^{i\theta}\quad (\theta\in[0,\pi]),$$

$$\gamma_R:=\Gamma_R+C_R.$$



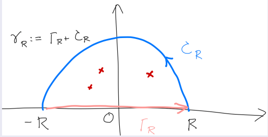
$R\geq R^*$ を満たす任意の R に対して、P の任意の零点 c は $|z|<R$ に含まれる。そのうち $\operatorname{Im}c>0$ を満たすものは γ_R の内部に含まれる。

証明 (つづき)



$$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \int_{\Gamma_R} f(z)\,dz + \int_{C_R} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int_{C_R} f(z)\,dz.$$

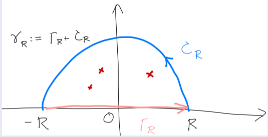
証明 (つづき)



$$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \int_{\Gamma_R} f(z)\,dz + \int_{C_R} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int_{C_R} f(z)\,dz.$$

$$\left|\int_{C_R} f(z)\,dz\right| \le \int_{C_R} |f(z)|\,|dz| \le \frac{M}{R^2}\int_{C_R} |dz| = \frac{M}{R^2}\cdot\pi R = \frac{\pi M}{R} \to 0 \quad (R \to +\infty).$$

証明 (つづき)



$$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \int_{\Gamma_R} f(z)\,dz + \int_{C_R} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int_{C_R} f(z)\,dz.$$

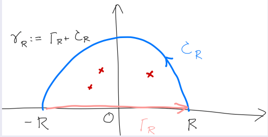
$$\left|\int_{C_R} f(z)\,dz\right| \le \int_{C_R} |f(z)|\,|dz| \le \frac{M}{R^2}\int_{C_R} |dz| = \frac{M}{R^2}\cdot \pi R = \frac{\pi M}{R} \to 0 \quad (R \to +\infty).$$

一方、留数定理より

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} c>0} \operatorname{Res}(f; c).$$

13.1 有理関数の $\mathbb{R}$ 上の積分

証明 (つづき)



$$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \int_{\Gamma_R} f(z)\,dz + \int_{C_R} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int_{C_R} f(z)\,dz.$$

$$\left|\int_{C_R} f(z)\,dz\right| \le \int_{C_R} |f(z)|\,|dz| \le \frac{M}{R^2}\int_{C_R} |dz| = \frac{M}{R^2}\cdot \pi R = \frac{\pi M}{R} \to 0 \quad (R\to+\infty).$$

一方、留数定理より

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} c>0} \operatorname{Res}(f;c).$$

ゆえに

$$\int_{-R}^{R} f(x)\,dx = \int_{\gamma_R} f(z)\,dz - \int_{C_R} f(z)\,dz \to 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} c>0} \operatorname{Res}(f;c) \quad (R\to+\infty). \qquad \square$$

13.2 有理関数 $\times e^{iax}$ の $\mathbb{R}$ 上の積分

f を有理関数とするとき、指数関数を含んだ積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax}\, dx$$

の計算についての定理を紹介する。この場合は (有理関数の定積分とは異なり)、原始関数を求めることが難しいことが多い。非常にありがたい定理である。

13.2 有理関数 $\times e^{iax}$ の $\mathbb{R}$ 上の積分

f を有理関数とするとき、指数関数を含んだ積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax}\,dx$$

の計算についての定理を紹介する。この場合は (有理関数の定積分とは異なり)、原始関数を求めることが難しいことが多い。非常にありがたい定理である。

これは応用上非常に重要な Fourier 変換、共役 Fourier 変換

$$(\mathcal{F}) \qquad \widehat{f}(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi}\,dx \quad (\xi \in \mathbb{R}),$$

$$(\mathcal{F}^*) \qquad \widetilde{g}(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)e^{ix\xi}\,d\xi \quad (x \in \mathbb{R})$$

を求めることに利用できる。

13.2 有理関数 $\times e^{iax}$ の $\mathbb{R}$ 上の積分

f を有理関数とするとき、指数関数を含んだ積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax}\,dx$$

の計算についての定理を紹介する。この場合は (有理関数の定積分とは異なり)、原始関数を求めることが難しいことが多い。非常にありがたい定理である。

これは応用上非常に重要な Fourier 変換、共役 Fourier 変換

$$(\mathcal{F}) \qquad \widehat{f}(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi}\,dx \quad (\xi\in\mathbb{R}),$$

$$(\mathcal{F}^*) \qquad \widetilde{g}(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)e^{ix\xi}\,d\xi \quad (x\in\mathbb{R})$$

を求めることに利用できる。

念のため:

$$(\forall\theta\in\mathbb{R})\quad \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta},\quad \cos\theta = \operatorname{Re} e^{i\theta},\quad \sin\theta = \operatorname{Im} e^{i\theta},\quad \left|e^{i\theta}\right| = 1$$

を思い出しておこう。

13.2 有理関数 $\times e^{iax}$ の $\mathbb{R}$ 上の積分

定理 27.3 (有理関数 $\times e^{iax}$ の $\mathbb{R}$ 上の積分)

$$P(z), Q(z) \in \mathbb{C}[z],\ f(z) = \frac{Q(z)}{P(z)},\ \deg P(z) \geq \deg Q(z) + 1,\ (\forall x \in \mathbb{R})$$

$P(x) \neq 0$, $a > 0$ とするとき、

$$(1) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{iax}\, dx = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\, c > 0} \mathrm{Res}\left(f(z)e^{iaz}; c\right).$$

ここで $\displaystyle\sum_{\mathrm{Im}\, c>0}$ は、f の極 (あるいは $f(z)e^{iaz}$ の極と言っても同じこと) c のうち、$\mathrm{Im}\, c > 0$ を満たすものすべてについての和を取ることを意味する。

13.2 有理関数 $\times e^{iax}$ の $\mathbb{R}$ 上の積分

定理 27.3 (有理関数 $\times e^{iax}$ の $\mathbb{R}$ 上の積分)

$$P(z), Q(z) \in \mathbb{C}[z],\ f(z) = \frac{Q(z)}{P(z)},\ \deg P(z) \geq \deg Q(z) + 1,\ (\forall x \in \mathbb{R})$$

$P(x) \neq 0$, $a > 0$ とするとき、

(1)
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{iax}\, dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} c > 0} \operatorname{Res}\left(f(z)e^{iaz}; c\right).$$

ここで $\displaystyle\sum_{\operatorname{Im} c>0}$ は、f の極 (あるいは $f(z)e^{iaz}$ の極と言っても同じこと) c のうち、$\operatorname{Im} c > 0$ を満たすものすべてについての和を取ることを意味する。

証明

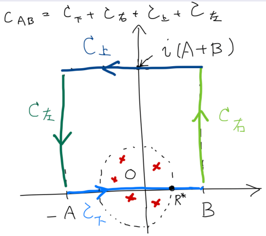
定理 27.1 の証明と同様にして、ある定数 M, $R^*(\geq 1)$ が存在して次式が成り立つ。

$$(\forall z \in \mathbb{C} : |z| \geq R^*) \quad P(z) \neq 0 \wedge |f(z)| \leq \frac{M}{|z|}.$$

(つづく)

証明 (つづき)

任意の $A, B > R^*$ に対して、曲線 $C_{下}$, $C_{右}$, $C_{上}$, $C_{左}$, C_{AB} を次のように定める。



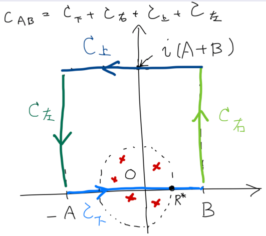
$$
\begin{aligned}
&C_{下}: z = x \quad (x \in [-A, B]),\\
&C_{右}: z = B + iy \quad (y \in [0, A+B]),\\
&C_{上}: z = -x + i(A+B) \quad (x \in [-B, A]),\\
&C_{左}: z = -A - iy \quad (y \in [-(A+B), 0]),\\
&C_{AB} := C_{下} + C_{右} + C_{上} + C_{左}.
\end{aligned}
$$

13.2 有理関数 $\times e^{iax}$ の $\mathbb{R}$ 上の積分

証明 (つづき)

任意の $A, B > R^*$ に対して、曲線 $C_{\text{下}}$, $C_{\text{右}}$, $C_{\text{上}}$, $C_{\text{左}}$, C_{AB} を次のように定める。

$$
\begin{aligned}
C_{\text{下}} &: z = x \quad (x \in [-A, B]),\\
C_{\text{右}} &: z = B + iy \quad (y \in [0, A+B]),\\
C_{\text{上}} &: z = -x + i(A+B) \quad (x \in [-B, A]),\\
C_{\text{左}} &: z = -A - iy \quad (y \in [-(A+B), 0]),\\
C_{AB} &:= C_{\text{下}} + C_{\text{右}} + C_{\text{上}} + C_{\text{左}}.
\end{aligned}
$$



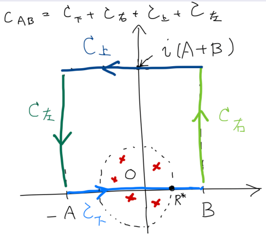
P の零点はすべて $|z| < R^*$ に含まれ、上半平面に属するものは C_{AB} の内部にある (実軸上にはないので C_{AB} 上にもない)。

13.2 有理関数 $\times e^{iax}$ の $\mathbb{R}$ 上の積分

証明 (つづき)

任意の $A, B > R^*$ に対して、曲線 $C_{下}$, $C_{右}$, $C_{上}$, $C_{左}$, C_{AB} を次のように定める。

$$
\begin{aligned}
&C_{下}: z = x \quad (x \in [-A, B]),\\
&C_{右}: z = B + iy \quad (y \in [0, A+B]),\\
&C_{上}: z = -x + i(A+B) \quad (x \in [-B, A]),\\
&C_{左}: z = -A - iy \quad (y \in [-(A+B), 0]),\\
&C_{AB} := C_{下} + C_{右} + C_{上} + C_{左}.
\end{aligned}
$$



P の零点はすべて $|z| < R^*$ に含まれ、上半平面に属するものは C_{AB} の内部にある (実軸上にはないので C_{AB} 上にもない)。ゆえに留数定理によって

$$
\int_{C_{AB}} f(z)e^{iax}\,dz = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} c>0} \operatorname{Res}\left(f(z)e^{iaz}; c\right).
$$

(つづく)

証明 (つづき)

$C_{下}$ に沿う積分は ($z=x$ ($x\in[-A,B]$) が $C_{下}$ のパラメーター付けとなるので)

$$\int_{C_{下}} f(z)e^{iaz}\,dz=\int_{-A}^{B} f(x)e^{iax}\,dx.$$

証明 (つづき)

$C_{\text{下}}$ に沿う積分は $(z = x \ (x \in [-A, B])$ が $C_{\text{下}}$ のパラメーター付けとなるので)

$$\int_{C_{\text{下}}} f(z) e^{iaz}\, dz = \int_{-A}^{B} f(x) e^{iax}\, dx.$$

$C_{\text{右}}$ では

$$|z| = \sqrt{B^2 + y^2} \geq B, \quad |f(z)| \leq \frac{M}{|z|} \leq \frac{M}{B},$$

$$\mathrm{Re}(iaz) = \mathrm{Re}\left[ia(B + iy)\right] = -ay, \quad \left|e^{iaz}\right| = e^{\mathrm{Re}(iaz)} = e^{-ay}$$

証明 (つづき)

$C_{下}$ に沿う積分は $(z = x\ (x \in [-A, B])$ が $C_{下}$ のパラメーター付けとなるので)

$$\int_{C_{下}} f(z)e^{iaz}\,dz = \int_{-A}^{B} f(x)e^{iax}\,dx.$$

$C_{右}$ では

$$|z| = \sqrt{B^2 + y^2} \ge B, \quad |f(z)| \le \frac{M}{|z|} \le \frac{M}{B},$$

$$\mathrm{Re}(iaz) = \mathrm{Re}\,[ia(B+iy)] = -ay, \quad \left|e^{iaz}\right| = e^{\mathrm{Re}(iaz)} = e^{-ay}$$

であるから

$$\left|\int_{C_{右}} f(z)e^{iaz}\right| \le \frac{M}{B}\int_0^{A+B} e^{-ay}dy \le \frac{M}{B}\int_0^{\infty} e^{-ay}\,dy = \frac{M}{aB}.$$

証明 (つづき)

$C_{下}$ に沿う積分は ($z=x$ ($x\in[-A,B]$) が $C_{下}$ のパラメーター付けとなるので)

$$\int_{C_{下}} f(z)e^{iaz}\,dz=\int_{-A}^{B} f(x)e^{iax}\,dx.$$

$C_{右}$ では

$$|z|=\sqrt{B^2+y^2}\ge B,\quad |f(z)|\le\frac{M}{|z|}\le\frac{M}{B},$$
$$\mathrm{Re}(iaz)=\mathrm{Re}\left[ia(B+iy)\right]=-ay,\quad \left|e^{iaz}\right|=e^{\mathrm{Re}(iaz)}=e^{-ay}$$

であるから

$$\left|\int_{C_{右}} f(z)e^{iaz}\right|\le\frac{M}{B}\int_0^{A+B} e^{-ay}dy\le\frac{M}{B}\int_0^{\infty} e^{-ay}\,dy=\frac{M}{aB}.$$

$C_{左}$ でもほぼ同様にして

$$\left|\int_{C_{右}} f(z)e^{iaz}\right|\le\frac{M}{aA}.$$

(つづく)

証明 (つづき)

$C_上$ では

$$|z| = \sqrt{(-x)^2 + (A+B)^2} \geq A+B, \quad |f(z)| \leq \frac{M}{|z|} \leq \frac{M}{A+B},$$

$$\mathrm{Re}(iaz) = \mathrm{Re}[ia(-x+i(A+B))] = -a(A+B), \quad \left|e^{iaz}\right| = e^{-a(A+B)},$$

$$\left|\int_{C_上} f(z)e^{iaz}\,dz\right| \leq \frac{M}{A+B}\int_{-A}^{B} e^{-a(A+B)}\,dx = Me^{-a(A+B)}.$$

13.2 有理関数 $\times e^{iax}$ の $\mathbb{R}$ 上の積分

証明 (つづき)

$C_{上}$ では

$$|z| = \sqrt{(-x)^2 + (A+B)^2} \geq A+B, \quad |f(z)| \leq \frac{M}{|z|} \leq \frac{M}{A+B},$$

$$\mathrm{Re}(iaz) = \mathrm{Re}[ia(-x+i(A+B))] = -a(A+B), \quad \left|e^{iaz}\right| = e^{-a(A+B)},$$

$$\left|\int_{C_{上}} f(z)e^{iaz}\,dz\right| \leq \frac{M}{A+B}\int_{-A}^{B} e^{-a(A+B)}\,dx = Me^{-a(A+B)}.$$

ゆえに

$$I = \lim_{A,B\to+\infty}\int_{-A}^{B} f(x)e^{iax}\,dx = \lim_{A,B\to+\infty}\left(\int_{C_{AB}} - \int_{C_{右}} - \int_{C_{上}} - \int_{C_{左}}\right)$$

$$= \lim_{A,B\to+\infty}\left(2\pi i\sum_{\mathrm{Im}\,c>0}\mathrm{Res}\left(f(z)e^{iaz}; c\right) - \int_{C_{右}} - \int_{C_{左}} - \int_{C_{上}}\right)$$

$$= 2\pi i\sum_{\mathrm{Im}\,c>0}\mathrm{Res}\left(f(z)e^{iaz}; c\right).$$ (注: 広義積分の収束も同時に証明できている) □

次の注意は細かいので、講義では軽く触れるにとどめる (飛ばすかもしれない)。

注意 27.4 (定理 27.3 の仮定と証明法について)

仮定 $\deg P(z) \geq \deg Q(z) + 1$ は、定理 27.1 の条件 ($\deg P(z) \geq \deg Q(z) + 2$) より弱い。

強い条件 $\deg P(z) \geq \deg Q(z) + 2$ を仮定した場合は (そういうテキストが少なくない)、$a \geq 0$ に対して (つまり $a = 0$ も OK になる) 広義積分が絶対収束であることも簡単に示せるし、積分路として、定理 27.1 の証明で用いた簡単な $\gamma_R = \Gamma_R + C_R$ が採用できる。また

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z) e^{iaz}\, dz = 0$$

の証明も

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{R} \int_0^{\pi} e^{-aR\sin\theta}\, d\theta = 0$$

に帰着され、簡単である ($0 < e^{-aR\sin\theta} \leq 1$ より $0 < \int_0^{\pi} e^{-aR\sin\theta} d\theta \leq \pi$ が導かれる)。

Cf. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$ は発散、$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ は絶対収束, $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$ は条件収束 (絶対収束しない)。 □

13.2 有理関数 $\times e^{iax}$ の $\mathbb{R}$ 上の積分

次の系は細かいようであるが、Fourier 変換への応用を考えると重要である。

上で述べた定理 27.3 の証明を検討すると、$a \le 0$ のときは、(1) が成立しないことが分かる。$a < 0$ の場合は、代わりに次が成り立つ。

13.2 有理関数 $\times e^{iax}$ の $\mathbb{R}$ 上の積分

次の系は細かいようであるが、Fourier 変換への応用を考えると重要である。

上で述べた定理 27.3 の証明を検討すると、$a \le 0$ のときは、(1) が成立しないことが分かる。$a < 0$ の場合は、代わりに次が成り立つ。

系 27.5 ($a < 0$ の場合の公式)

$P(z), Q(z) \in \mathbb{C}[z]$, $f(z) = \dfrac{Q(z)}{P(z)}$, $\deg P(z) \ge \deg Q(z) + 1$, $(\forall x \in \mathbb{R})$ $P(x) \ne 0$, $a < 0$ とするとき、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{iax}\, dx = -2\pi i \sum_{\operatorname{Im} c < 0} \operatorname{Res}\left(f(z)e^{iaz}; c\right). \tag{2}$$

13.2 有理関数 $\times e^{iax}$ の $\mathbb{R}$ 上の積分

次の系は細かいようであるが、Fourier 変換への応用を考えると重要である。

上で述べた定理 27.3 の証明を検討すると、$a \le 0$ のときは、(1) が成立しないことが分かる。$a < 0$ の場合は、代わりに次が成り立つ。

系 27.5 ($a < 0$ の場合の公式)

$P(z), Q(z) \in \mathbb{C}[z]$, $f(z) = \dfrac{Q(z)}{P(z)}$, $\deg P(z) \ge \deg Q(z) + 1$, $(\forall x \in \mathbb{R})$ $P(x) \ne 0$, $a < 0$ とするとき、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax}\,dx = -2\pi i \sum_{\operatorname{Im} c < 0} \operatorname{Res}\left(f(z)e^{iaz}; c\right). \tag{2}$$

しかし、系 27.5 を使うのでなく、計算の工夫により、定理 27.3 に帰着できる例を説明するテキストが多い。これについては、以下の例を見よ。

例 27.6

(3)
$$(\forall a \in \mathbb{R}) \quad I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{x^2+1}\,dx = \pi e^{-|a|}.$$

例 27.6

(3)
$$(\forall a \in \mathbb{R}) \quad I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{x^2+1}dx = \pi e^{-|a|}.$$

$a > 0$ の場合は、定理 27.3 から

$$I = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^{iaz}}{z^2+1}; i\right) = 2\pi i \left.\frac{e^{iaz}}{(z^2+1)'}\right|_{z=i} = 2\pi i \left.\frac{e^{iaz}}{2z}\right|_{z=i} = \pi e^{-a}.$$

13.2 有理関数 $\times e^{iax}$ の $\mathbb{R}$ 上の積分

例 27.6

(3) $$(\forall a \in \mathbb{R}) \quad I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{x^2+1} dx = \pi e^{-|a|}.$$

$a > 0$ の場合は、定理 27.3 から

$$I = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^{iaz}}{z^2+1}; i\right) = 2\pi i \left.\frac{e^{iaz}}{(z^2+1)'}\right|_{z=i} = 2\pi i \left.\frac{e^{iaz}}{2z}\right|_{z=i} = \pi e^{-a}.$$

$a = 0$ の場合は、定理 27.1 から

$$I = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2+1}; i\right) = 2\pi i \left.\frac{1}{2z}\right|_{z=i} = \pi.$$

例 27.6

(3)
$$(\forall a \in \mathbb{R})\quad I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{x^2+1}dx = \pi e^{-|a|}.$$

$a > 0$ の場合は、定理 27.3 から

$$I = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^{iaz}}{z^2+1}; i\right) = 2\pi i \left.\frac{e^{iaz}}{(z^2+1)'}\right|_{z=i} = 2\pi i \left.\frac{e^{iaz}}{2z}\right|_{z=i} = \pi e^{-a}.$$

$a = 0$ の場合は、定理 27.1 から

$$I = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2+1}; i\right) = 2\pi i \left.\frac{1}{2z}\right|_{z=i} = \pi.$$

$a < 0$ のとき、$e^{iax} = \overline{e^{-iax}}$, $-a > 0$ に注意して、定理 27.3 から

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\overline{e^{-iax}}}{x^2+1}\, dx$$

例 27.6

(3)
$$(\forall a \in \mathbb{R}) \quad I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{x^2+1} dx = \pi e^{-|a|}.$$

$a > 0$ の場合は、定理 27.3 から

$$I = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^{iaz}}{z^2+1}; i\right) = 2\pi i \left.\frac{e^{iaz}}{(z^2+1)'}\right|_{z=i} = 2\pi i \left.\frac{e^{iaz}}{2z}\right|_{z=i} = \pi e^{-a}.$$

$a = 0$ の場合は、定理 27.1 から

$$I = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2+1}; i\right) = 2\pi i \left.\frac{1}{2z}\right|_{z=i} = \pi.$$

$a < 0$ のとき、$e^{iax} = \overline{e^{-iax}}$, $-a > 0$ に注意して、定理 27.3 から

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\frac{e^{-iax}}{x^2+1}}\, dx = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iax}}{x^2+1}\, dx}$$

13.2 有理関数 $\times e^{iax}$ の $\mathbb{R}$ 上の積分

例 27.6

(3)
$$(\forall a\in\mathbb{R})\quad I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iax}}{x^2+1}dx=\pi e^{-|a|}.$$

$a>0$ の場合は、定理 27.3 から
$$I=2\pi i\,\mathrm{Res}\left(\frac{e^{iaz}}{z^2+1};i\right)=2\pi i\left.\frac{e^{iaz}}{(z^2+1)'}\right|_{z=i}=2\pi i\left.\frac{e^{iaz}}{2z}\right|_{z=i}=\pi e^{-a}.$$

$a=0$ の場合は、定理 27.1 から
$$I=2\pi i\,\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^2+1};i\right)=2\pi i\left.\frac{1}{2z}\right|_{z=i}=\pi.$$

$a<0$ のとき、$e^{iax}=\overline{e^{-iax}}$, $-a>0$ に注意して、定理 27.3 から
$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\overline{\frac{e^{-iax}}{x^2+1}}\,dx=\overline{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-iax}}{x^2+1}\,dx}=\overline{2\pi i\,\mathrm{Res}\left(\frac{e^{-iaz}}{z^2+1};i\right)}$$

例 27.6

(3)
$$(\forall a\in\mathbb{R})\quad I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iax}}{x^2+1}dx=\pi e^{-|a|}.$$

$a>0$ の場合は、定理 27.3 から

$$I=2\pi i\,\mathrm{Res}\left(\frac{e^{iaz}}{z^2+1};i\right)=2\pi i\left.\frac{e^{iaz}}{(z^2+1)'}\right|_{z=i}=2\pi i\left.\frac{e^{iaz}}{2z}\right|_{z=i}=\pi e^{-a}.$$

$a=0$ の場合は、定理 27.1 から

$$I=2\pi i\,\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^2+1};i\right)=2\pi i\left.\frac{1}{2z}\right|_{z=i}=\pi.$$

$a<0$ のとき、$e^{iax}=\overline{e^{-iax}}$, $-a>0$ に注意して、定理 27.3 から

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\overline{\frac{e^{-iax}}{x^2+1}}\,dx=\overline{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-iax}}{x^2+1}\,dx}=\overline{2\pi i\,\mathrm{Res}\left(\frac{e^{-iaz}}{z^2+1};i\right)}=\overline{2\pi i\cdot\left.\frac{e^{-iaz}}{2z}\right|_{z=i}}$$

13.2 有理関数 $\times e^{iax}$ の $\mathbb{R}$ 上の積分

例 27.6

(3)
$$(\forall a\in\mathbb{R})\quad I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iax}}{x^2+1}dx=\pi e^{-|a|}.$$

$a>0$ の場合は、定理 27.3 から

$$I=2\pi i\operatorname{Res}\left(\frac{e^{iaz}}{z^2+1};i\right)=2\pi i\left.\frac{e^{iaz}}{(z^2+1)'}\right|_{z=i}=2\pi i\left.\frac{e^{iaz}}{2z}\right|_{z=i}=\pi e^{-a}.$$

$a=0$ の場合は、定理 27.1 から

$$I=2\pi i\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2+1};i\right)=2\pi i\left.\frac{1}{2z}\right|_{z=i}=\pi.$$

$a<0$ のとき、$e^{iax}=\overline{e^{-iax}}$, $-a>0$ に注意して、定理 27.3 から

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\overline{\frac{e^{-iax}}{x^2+1}}\,dx=\overline{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-iax}}{x^2+1}\,dx}=\overline{2\pi i\operatorname{Res}\left(\frac{e^{-iaz}}{z^2+1};i\right)}=\overline{2\pi i\cdot\left.\frac{e^{-iaz}}{2z}\right|_{z=i}}$$
$$=\overline{\pi e^{a}}=\pi e^{a}.$$

例 27.6 (つづき)

以上をまとめて (3) を得る。

なお、 (3) の実部を取ると

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ax)}{x^2+1}\, dx = \pi e^{-|a|}$$

が得られる。 □

例 27.6 (つづき)

以上をまとめて (3) を得る。

なお、 (3) の実部を取ると

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ax)}{x^2+1}\,dx = \pi e^{-|a|}$$

が得られる。 □

余談 27.7 (Mathematica で検算するときに)

Mathematica で計算する際に、a の符号を教えるには、例えば

```
Assuming[a>0, Integrate[Exp[I a x]/(x^2+1),{x,-Infinity,Infinity}]
```

のようにすれば良い。 □

例 27.8

$$I = \int_0^\infty \frac{x \sin x}{x^2 + 1}\, dx = \frac{\pi}{2e}.$$

例 27.8

$$I=\int_0^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2+1}\,dx=\frac{\pi}{2e}.$$

被積分関数が偶関数であることと、$\sin x=\operatorname{Im}e^{ix}$ であることから

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2+1}\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{Im}\frac{xe^{ix}}{x^2+1}\,dx=\frac{1}{2}\operatorname{Im}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{ix}}{x^2+1}\,dx.$$

例 27.8

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi}{2e}.$$

被積分関数が偶関数であることと、$\sin x = \mathrm{Im}\, e^{ix}$ であることから

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Im}\,\frac{xe^{ix}}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{ix}}{x^2+1}\,dx.$$

$P(z) := z^2+1$, $Q(z) := z$, $a := 1$ とすると、定理 27.3 の条件が成り立つ。

例 27.8

$$I = \int_0^\infty \frac{x\sin x}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi}{2e}.$$

被積分関数が偶関数であることと、$\sin x = \operatorname{Im} e^{ix}$ であることから

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{x\sin x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \operatorname{Im}\frac{xe^{ix}}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{Im}\int_{-\infty}^\infty \frac{xe^{ix}}{x^2+1}\,dx.$$

$P(z) := z^2+1$, $Q(z) := z$, $a := 1$ とすると、定理 27.3 の条件が成り立つ。ゆえに

$$I = \frac{1}{2}\operatorname{Im}\left(2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{z}{z^2+1}e^{iz}; i\right)\right) = \operatorname{Im}\left(\pi i\cdot \left.\frac{ze^{iz}}{2z}\right|_{z=i}\right) = \frac{1}{2}\operatorname{Im}\left(\pi i e^{i^2}\right) = \frac{\pi}{2e}. \qquad \square$$

13.3 三角関数の有理関数の周期積分

まず例から始める。

例 27.9

$$I := \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 - 4\cos\theta}$$ を求めよ。

13.3 三角関数の有理関数の周期積分

まず例から始める。

例 27.9

$$I := \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 - 4\cos\theta}$$ を求めよ。

(解答) $z = e^{i\theta}$ $(\theta \in [0, 2\pi])$ とおくと、$dz = ie^{i\theta} d\theta$ であるから $d\theta = \dfrac{dz}{ie^{i\theta}} = \dfrac{dz}{iz}$.

13.3 三角関数の有理関数の周期積分

まず例から始める。

例 27.9

$I := \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5-4\cos\theta}$ を求めよ。

(解答) $z = e^{i\theta}$ $(\theta \in [0,2\pi])$ とおくと、$dz = ie^{i\theta}d\theta$ であるから $d\theta = \dfrac{dz}{ie^{i\theta}} = \dfrac{dz}{iz}$. また

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} = \frac{z+1/z}{2}.$$

であるから

13.3 三角関数の有理関数の周期積分

まず例から始める。

例 27.9

$$I := \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 - 4\cos\theta}$$ を求めよ。

(解答) $z = e^{i\theta}$ $(\theta \in [0, 2\pi])$ とおくと、$dz = ie^{i\theta} d\theta$ であるから $d\theta = \dfrac{dz}{ie^{i\theta}} = \dfrac{dz}{iz}$. また

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{z + 1/z}{2}.$$

であるから

$$I = \int_{|z|=1} \frac{1}{5 - 4 \cdot \dfrac{z + z^{-1}}{2}} \cdot \frac{1}{iz} dz$$

13.3 三角関数の有理関数の周期積分

まず例から始める。

例 27.9

$$I := \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 - 4\cos\theta}$$ を求めよ。

(解答) $z = e^{i\theta}$ $(\theta \in [0, 2\pi])$ とおくと、$dz = ie^{i\theta}d\theta$ であるから $d\theta = \dfrac{dz}{ie^{i\theta}} = \dfrac{dz}{iz}$. また

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{z + 1/z}{2}.$$

であるから

$$I = \int_{|z|=1} \frac{1}{5 - 4 \cdot \dfrac{z + z^{-1}}{2}} \cdot \frac{1}{iz} dz = \frac{1}{i} \int_{|z|=1} \frac{1}{5z - 2(z^2 + 1)} dz$$

$$= i \int_{|z|=1} \frac{dz}{2z^2 - 5z + 2} = i \int_{|z|=1} \frac{dz}{(2z - 1)(z - 2)}$$

13.3 三角関数の有理関数の周期積分

まず例から始める。

例 27.9

$$I := \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5-4\cos\theta}$$ を求めよ。

(解答) $z = e^{i\theta}$ $(\theta \in [0,2\pi])$ とおくと、$dz = ie^{i\theta}d\theta$ であるから $d\theta = \dfrac{dz}{ie^{i\theta}} = \dfrac{dz}{iz}$. また

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} = \frac{z+1/z}{2}.$$

であるから

$$\begin{aligned}
I &= \int_{|z|=1} \frac{1}{5-4\cdot\dfrac{z+z^{-1}}{2}}\cdot\frac{1}{iz}dz = \frac{1}{i}\int_{|z|=1}\frac{1}{5z-2(z^2+1)}dz \\
&= i\int_{|z|=1}\frac{dz}{2z^2-5z+2} = i\int_{|z|=1}\frac{dz}{(2z-1)(z-2)} \\
&= i\cdot 2\pi i\sum_{|c|<1}\mathrm{Res}\left(\frac{1}{(2z-1)(z-2)};c\right) = -2\pi\,\mathrm{Res}\left(\frac{1}{(2z-1)(z-2)};\frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

まず例から始める。

例 27.9

$$I := \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 - 4\cos\theta}$$ を求めよ。

(解答) $z = e^{i\theta}$ $(\theta \in [0, 2\pi])$ とおくと、$dz = ie^{i\theta} d\theta$ であるから $d\theta = \dfrac{dz}{ie^{i\theta}} = \dfrac{dz}{iz}$. また

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{z + 1/z}{2}.$$

であるから

$$\begin{aligned} I &= \int_{|z|=1} \frac{1}{5 - 4 \cdot \dfrac{z + z^{-1}}{2}} \cdot \frac{1}{iz} dz = \frac{1}{i} \int_{|z|=1} \frac{1}{5z - 2(z^2+1)} dz \\ &= i \int_{|z|=1} \frac{dz}{2z^2 - 5z + 2} = i \int_{|z|=1} \frac{dz}{(2z-1)(z-2)} \\ &= i \cdot 2\pi i \sum_{|c|<1} \operatorname{Res}\left(\frac{1}{(2z-1)(z-2)}; c\right) = -2\pi \operatorname{Res}\left(\frac{1}{(2z-1)(z-2)}; \frac{1}{2}\right) \\ &= -2\pi \lim_{z \to \frac{1}{2}} \left(z - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{(2z-1)(z-2)} = -2\pi \frac{1}{2(\frac{1}{2} - 2)} = \frac{2\pi}{3}. \end{aligned}$$

13.3 三角関数の有理関数の周期積分

$\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z-1/z}{2i}$ があっても OK.

13.3 三角関数の有理関数の周期積分

$\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z-1/z}{2i}$ があっても OK.

例 27.10

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3+\sin\theta}$$

13.3 三角関数の有理関数の周期積分

$\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z-1/z}{2i}$ があっても OK.

例 27.10

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3+\sin\theta}$$

$z = e^{i\theta}$ $(\theta \in [0, 2\pi])$ とおくと、$dz = ie^{i\theta}d\theta$ であるから $d\theta = \dfrac{dz}{ie^{i\theta}} = \dfrac{dz}{iz}$. また

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z-1/z}{2i}$$

であるから

$\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z-1/z}{2i}$ があっても OK.

例 27.10

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3+\sin\theta}$$

$z = e^{i\theta}$ $(\theta \in [0, 2\pi])$ とおくと、$dz = ie^{i\theta}d\theta$ であるから $d\theta = \dfrac{dz}{ie^{i\theta}} = \dfrac{dz}{iz}$. また

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z-1/z}{2i}$$

であるから

$$\begin{aligned}
I &= \int_{|z|=1} \frac{1}{3+\frac{1}{2i}(z-1/z)}\cdot\frac{dz}{iz} = 2\int_{|z|=1}\frac{dz}{z^2+6iz-1} \\
&= 2\cdot 2\pi i \sum_{|c|<1} \mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^2+6iz-1}; c\right) = 4\pi i\,\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^2+6iz+1}; (-3+2\sqrt{2})i\right) \\
&= 4\pi i \lim_{z\to(-3+2\sqrt{2})i} \frac{1}{z-(-3-2\sqrt{2})i} = 4\pi i\cdot\frac{1}{4\sqrt{2}i} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \quad \square
\end{aligned}$$

13.3 三角関数の有理関数の周期積分

$\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z-1/z}{2i}$ があっても OK.

例 27.10

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3+\sin\theta}$$

$z = e^{i\theta}$ $(\theta \in [0, 2\pi])$ とおくと、$dz = ie^{i\theta}d\theta$ であるから $d\theta = \dfrac{dz}{ie^{i\theta}} = \dfrac{dz}{iz}$. また

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z-1/z}{2i}$$

であるから

$$\begin{aligned}
I &= \int_{|z|=1} \frac{1}{3+\frac{1}{2i}(z-1/z)} \cdot \frac{dz}{iz} = 2\int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2+6iz-1} \\
&= 2\cdot 2\pi i \sum_{|c|<1} \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2+6iz-1}; c\right) = 4\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2+6iz+1}; (-3+2\sqrt{2})i\right) \\
&= 4\pi i \lim_{z\to(-3+2\sqrt{2})i} \frac{1}{z-(-3-2\sqrt{2})i} = 4\pi i \cdot \frac{1}{4\sqrt{2}i} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \quad \square
\end{aligned}$$

結局 $\cos\theta$, $\sin\theta$ の有理式の $[0, 2\pi]$ における積分は、このやり方で計算できることが分かる。

13.3 三角関数の有理関数の周期積分

一応定理の形にまとめておくが、一般の形で証明しておく必要はないであろう。

定理 27.11 (三角関数の有理関数の周期積分)

$r(x,y)$ を x, y の有理式とするとき、

(4a) $$\int_0^{2\pi} r(\cos\theta, \sin\theta)\, d\theta = 2\pi i \sum_{|c|<1} \mathrm{Res}(f; c).$$

ただし f は

(4b) $$f(z) := \frac{1}{iz}\, r\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\right)$$

で定義し、$f(z)$ は単位円周 $|z|=1$ 上に極を持たないとする。また $\displaystyle\sum_{|c|<1}$ は、f の極 c のうち、単位円盤内 $|z|<1$ に属するものすべてについての和を意味する。

13.3 三角関数の有理関数の周期積分

一応定理の形にまとめておくが、一般の形で証明しておく必要はないであろう。

定理 27.11 (三角関数の有理関数の周期積分)

$r(x,y)$ を x, y の有理式とするとき、

(4a) $$\int_0^{2\pi} r(\cos\theta,\sin\theta)\,d\theta = 2\pi i\sum_{|c|<1}\mathrm{Res}(f;c).$$

ただし f は

(4b) $$f(z) := \frac{1}{iz}\,r\left(\frac{z^2+1}{2z},\frac{z^2-1}{2iz}\right)$$

で定義し、$f(z)$ は単位円周 $|z|=1$ 上に極を持たないとする。また $\displaystyle\sum_{|c|<1}$ は、f の極 c のうち、単位円盤内 $|z|<1$ に属するものすべてについての和を意味する。

注意　: $\cos\theta = \frac{z+\overline{z}}{2}$, $\sin\theta = \frac{z-\overline{z}}{2i}$ であるが、そう変形してしまうと、z の正則関数ではなくなるので、留数定理が使えなくなる。$\overline{z}$ でなくて、z^{-1} を使うのがポイント。

例 27.12

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2+\cos\theta+\sin\theta}$$

$z=e^{i\theta}$ $(\theta\in[0,2\pi])$ とおくと、これは $|z|=1$ のパラメーター表示であり、

$$\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}=\frac{z+z^{-1}}{2},\quad \sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}=\frac{z-z^{-1}}{2i}.$$

また $dz=ie^{i\theta}d\theta$ より、$d\theta=\dfrac{dz}{iz}$. ゆえに $\left(\dfrac{1}{1+i}=\dfrac{1-i}{2}\right.$ に注意して)

$$I=\int_{|z|=1}\frac{1}{2+\frac{z+z^{-1}}{2}+\frac{z-z^{-1}}{2i}}\cdot\frac{1}{iz}dz=\int_{|z|=1}\frac{dz}{2iz+i(z^2+1)/2+(z^2-1)/2}$$
$$=2\int_{|z|=1}\frac{dz}{(i+1)z^2+4iz+(i-1)}=(1-i)\int_{|z|=1}\frac{dz}{z^2+2(1+i)z+i}.$$

ここからどうするか。閉曲線に沿う線積分だから、留数定理の利用を考える。特異点を探せ。それは分母の零点だ。それを求めよう。それから閉曲線の中に入っているものを探す。そして留数を計算する。図を描いて考える。 (つづく)

例 27.12 (つづき)

$z^2+2(1+i)z+i=0$ の根は

$$z=-(1+i)\pm\sqrt{(1+i)^2-i}=-(1+i)\pm\sqrt{i}=-(1+i)\pm\frac{1+i}{\sqrt{2}}$$
$$=-1-\frac{1}{\sqrt{2}}+i\left(-1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right),-1+\frac{1}{\sqrt{2}}+i\left(-1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

前者を α, 後者を β とすると、このうち $|z|<1$ にあるのは β.

$$\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^2+2(1+i)z+i};\beta\right)=\lim_{z\to\beta}\left((z-\beta)\frac{1}{(z-\alpha)(z-\beta)}\right)=\frac{1}{\beta-\alpha}=\frac{1}{\sqrt{2}\,(1+i)}.$$

ゆえに

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2+\cos\theta+\sin\theta}=(1-i)\cdot 2\pi i\frac{1}{\sqrt{2}\,(1+i)}=\sqrt{2}\pi. \quad \square$$

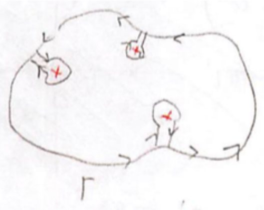
定積分計算の話題に詳しいテキストとして、一松 [2] をあげておく。色々面白い例が載っている。

11.2.3 留数定理の直観的な証明

多くの本に次のストーリーの留数定理の証明が載っている。

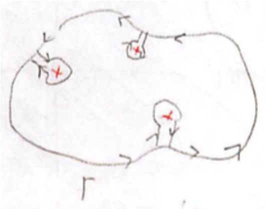
11.2.3 留数定理の直観的な証明

多くの本に次のストーリーの留数定理の証明が載っている。Γ を次のような曲線とする。



11.2.3 留数定理の直観的な証明

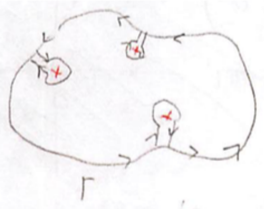
多くの本に次のストーリーの留数定理の証明が載っている。Γ を次のような曲線とする。



Γ の内部に×はないので $\displaystyle\int_\Gamma f(z)\,dz = 0.$

11.2.3 留数定理の直観的な証明

多くの本に次のストーリーの留数定理の証明が載っている。Γ を次のような曲線とする。



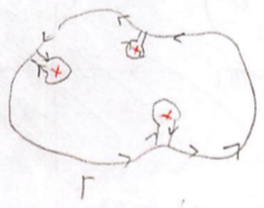
Γ の内部に×はないので $\displaystyle\int_\Gamma f(z)\,dz = 0.$

Γ の各パートに沿う積分に分解する:

$$\int_C f(z)\,dz - \int_{\text{往復通路の和}} f(z)\,dz - \sum_{j=1}^{N} \int_{|z-c_j|=\varepsilon} f(z)\,dz = 0.$$

11.2.3 留数定理の直観的な証明

多くの本に次のストーリーの留数定理の証明が載っている。Γ を次のような曲線とする。



Γ の内部に×はないので $\displaystyle\int_\Gamma f(z)\,dz = 0$.

Γ の各パートに沿う積分に分解する:

$$\int_C f(z)\,dz - \int_{\text{往復通路の和}} f(z)\,dz - \sum_{j=1}^N \int_{|z-c_j|=\varepsilon} f(z)\,dz = 0.$$

一般に往復するとキャンセルするので、$\displaystyle\int_{\text{往復通路の和}} f(z)\,dz = 0$. ゆえに

$$\int_C f(z)\,dz - \sum_{j=1}^N \int_{|z-c_j|=\varepsilon} f(z)\,dz = 0.$$

11.2.3 直観的な証明 (つづき)

これから

$$\int_C f(z)\,dz = \sum_{j=1}^N \int_{|z-c_j|=\varepsilon} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^N \mathrm{Res}(f; c_j).$$

(最後の等号 $=$ は、Laurent 展開の係数についての公式で、$n=-1$ の場合を用いた。)

11.2.3 直観的な証明 (つづき)

これから

$$\int_C f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{N} \int_{|z-c_j|=\varepsilon} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{N} \mathrm{Res}(f;c_j).$$

(最後の等号 $=$ は、Laurent 展開の係数についての公式で、$n=-1$ の場合を用いた。)

しかし、曲線 C が複雑だったり、N が大きい場合に、この証明は通用するだろうか？実は私は厳密な証明が書ける自信がない (読んだこともない)。以下ではこれとは違うやり方をする。

11.2.4 留数定理の証明

証明

十分小さい正の数 ε を取ると、任意の j に対して $\overline{D}(c_j; 2\varepsilon) \subset \Omega$ かつ $D(c_j; 2\varepsilon)$ 内に c_k $(k \neq j)$ は含まれない。

11.2.4 留数定理の証明

証明

十分小さい正の数 ε を取ると、任意の j に対して $\overline{D}(c_j;2\varepsilon)\subset\Omega$ かつ $D(c_j;2\varepsilon)$ 内に c_k $(k\neq j)$ は含まれない。

各 j に対して、f は $0<|z-c_j|<\varepsilon$ で正則であるから、c_j の周りで Laurent 展開できる:

$$\left(\exists\{a_n^{(j)}\}_{n\in\mathbb{Z}}\right)\quad f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n^{(j)}(z-c_j)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}^{(j)}}{(z-c_j)^n}\quad (0<|z-c_j|<\varepsilon).$$

11.2.4 留数定理の証明

証明

十分小さい正の数 ε を取ると、任意の j に対して $\overline{D}(c_j;2\varepsilon)\subset\Omega$ かつ $D(c_j;2\varepsilon)$ 内に c_k $(k\neq j)$ は含まれない。

各 j に対して、f は $0<|z-c_j|<\varepsilon$ で正則であるから、c_j の周りで Laurent 展開できる:

$$(\exists\{a_n^{(j)}\}_{n\in\mathbb{Z}})\quad f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n^{(j)}(z-c_j)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}^{(j)}}{(z-c_j)^n}\quad(0<|z-c_j|<\varepsilon).$$

この主部 $f_j(z):=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}^{(j)}}{(z-c_j)^n}$ $(j=1,2,\cdots,N)$ は $\mathbb{C}\setminus\{c_j\}$ で正則である。

11.2.4 留数定理の証明

証明

十分小さい正の数 ε を取ると、任意の j に対して $\overline{D}(c_j;2\varepsilon)\subset\Omega$ かつ $D(c_j;2\varepsilon)$ 内に c_k $(k\neq j)$ は含まれない。

各 j に対して、f は $0<|z-c_j|<\varepsilon$ で正則であるから、c_j の周りで Laurent 展開できる:

$$(\exists\{a_n^{(j)}\}_{n\in\mathbb{Z}})\quad f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n^{(j)}(z-c_j)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}^{(j)}}{(z-c_j)^n}\quad (0<|z-c_j|<\varepsilon).$$

この主部 $f_j(z):=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}^{(j)}}{(z-c_j)^n}$ $(j=1,2,\cdots,N)$ は $\mathbb{C}\setminus\{c_j\}$ で正則である。

$$g(z):=f(z)-\sum_{k=1}^{N}f_k(z)\quad (z\in\Omega\setminus\{c_1,\dots,c_N\})$$

とおくと g は $\Omega\setminus\{c_1,\dots,c_N\}$ で正則である。さらに任意の j に対して、c_j は g の除去可能特異点である。

(続く)

証明 (つづき)

(実際

$$g(z)=f(z)-\sum_{k=1}^{N}f_k(z)=\left(f(z)-f_j(z)\right)-\sum_{\substack{1\le k\le N\\ k\ne j}}f_k(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n^{(j)}(z-c_j)^n-\sum_{\substack{1\le k\le N\\ k\ne j}}f_k(z)$$

が成り立ち、右辺第 1 項は $D(c_j;\varepsilon)$ で収束する冪級数であり、右辺第 2 項 $\displaystyle\sum_{\substack{1\le k\le N\\ k\ne j}}f_k(z)$ は $\mathbb{C}\setminus\{c_1,\cdots,c_{j-1},c_{j+1},\cdots,c_N\}$ で正則である。)

11.2.4 留数定理の証明 (つづき)

証明 (つづき)

(実際

$$g(z)=f(z)-\sum_{k=1}^{N}f_k(z)=\left(f(z)-f_j(z)\right)-\sum_{\substack{1\le k\le N\\ k\ne j}}f_k(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n^{(j)}(z-c_j)^n-\sum_{\substack{1\le k\le N\\ k\ne j}}f_k(z)$$

が成り立ち、右辺第 1 項は $D(c_j;\varepsilon)$ で収束する冪級数であり、右辺第 2 項 $\displaystyle\sum_{\substack{1\le k\le N\\ k\ne j}}f_k(z)$ は $\mathbb{C}\setminus\{c_1,\cdots,c_{j-1},c_{j+1},\cdots,c_N\}$ で正則である。)

ゆえに g は Ω で正則として良い。Green の定理に基づく Cauchy の積分定理より

$$0=\int_C g(z)\,dz$$

証明 (つづき)

(実際

$$g(z)=f(z)-\sum_{k=1}^{N}f_k(z)=\left(f(z)-f_j(z)\right)-\sum_{\substack{1\le k\le N\\ k\ne j}}f_k(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n^{(j)}(z-c_j)^n-\sum_{\substack{1\le k\le N\\ k\ne j}}f_k(z)$$

が成り立ち、右辺第 1 項は $D(c_j;\varepsilon)$ で収束する冪級数であり、右辺第 2 項 $\displaystyle\sum_{\substack{1\le k\le N\\ k\ne j}}f_k(z)$ は $\mathbb{C}\setminus\{c_1,\cdots,c_{j-1},c_{j+1},\cdots,c_N\}$ で正則である。)

ゆえに g は Ω で正則として良い。Green の定理に基づく Cauchy の積分定理より

$$0=\int_C g(z)\,dz=\int_C f(z)\,dz-\sum_{j=1}^{N}\int_C f_j(z)\,dz,$$

11.2.4 留数定理の証明 (つづき)

証明 (つづき)

(実際

$$g(z) = f(z) - \sum_{k=1}^{N} f_k(z) = \left(f(z) - f_j(z)\right) - \sum_{\substack{1\le k\le N\\ k\ne j}} f_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(j)}(z-c_j)^n - \sum_{\substack{1\le k\le N\\ k\ne j}} f_k(z)$$

が成り立ち、右辺第 1 項は $D(c_j;\varepsilon)$ で収束する冪級数であり、右辺第 2 項 $\displaystyle\sum_{\substack{1\le k\le N\\ k\ne j}} f_k(z)$ は $\mathbb{C}\setminus\{c_1,\cdots,c_{j-1},c_{j+1},\cdots,c_N\}$ で正則である。)

ゆえに g は Ω で正則として良い。Green の定理に基づく Cauchy の積分定理より

$$0 = \int_C g(z)\,dz = \int_C f(z)\,dz - \sum_{j=1}^{N}\int_C f_j(z)\,dz,$$

$$\int_C f_j(z)\,dz = \int_C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}^{(j)}}{(z-c_j)^n}dz = \sum_{n=1}^{\infty}\int_C \frac{a_{-n}^{(j)}}{(z-c_j)^n}dz = a_{-1}^{(j)}\int_C \frac{dz}{z-c_j}.$$

証明 (つづき)

(実際

$$g(z)=f(z)-\sum_{k=1}^{N}f_k(z)=\left(f(z)-f_j(z)\right)-\sum_{\substack{1\le k\le N\\ k\ne j}}f_k(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n^{(j)}(z-c_j)^n-\sum_{\substack{1\le k\le N\\ k\ne j}}f_k(z)$$

が成り立ち、右辺第 1 項は $D(c_j;\varepsilon)$ で収束する冪級数であり、右辺第 2 項 $\displaystyle\sum_{\substack{1\le k\le N\\ k\ne j}}f_k(z)$ は $\mathbb{C}\setminus\{c_1,\cdots,c_{j-1},c_{j+1},\cdots,c_N\}$ で正則である。)

ゆえに g は Ω で正則として良い。Green の定理に基づく Cauchy の積分定理より

$$0=\int_C g(z)\,dz=\int_C f(z)\,dz-\sum_{j=1}^{N}\int_C f_j(z)\,dz,$$

$$\int_C f_j(z)\,dz=\int_C\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}^{(j)}}{(z-c_j)^n}dz=\sum_{n=1}^{\infty}\int_C\frac{a_{-n}^{(j)}}{(z-c_j)^n}dz=a_{-1}^{(j)}\int_C\frac{dz}{z-c_j}.$$

($=$ について: $n\ne 1$ のとき、$\dfrac{1}{(z-c_j)^n}$ は原始関数を持つので、閉曲線 C に沿う線積分は 0 である。)

(つづく)

11.2.4 留数定理の証明 (つづき)

証明 (つづき)

ゆえに

$$\int_C f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{N} a_{-1}^{(j)} \int_C \frac{dz}{z-c_j} = \sum_{j=1}^{N} \mathrm{Res}(f;c_j) \int_C \frac{dz}{z-c_j}.$$

各 j につき、$\displaystyle\int_C \frac{dz}{z-c_j}$ の積分路 C を、$|z-c_j|=\varepsilon$ で置き換えられるのを認めれば、値は $2\pi i$ であるから、

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{N} \mathrm{Res}(f;c_j). \quad \square$$

(以上を振り返ると、良くある積分路を変形を用いる証明に対して、被積分関数の変形を用いる証明である、と短くまとめられるだろう。)

定義 27.13 (整関数)

$\mathbb{C}$ 全体で正則な関数を**整関数** (entire function) と呼ぶ。

定義 27.13 (整関数)

$\mathbb{C}$ 全体で正則な関数を**整関数** (entire function) と呼ぶ。

例えば、多項式関数, e^z, $\cos z$, $\sin z$, $\cosh z$, $\sinh z$ は整関数である。

定義 27.13 (整関数)

$\mathbb{C}$ 全体で正則な関数を**整関数** (entire function) と呼ぶ。

例えば、多項式関数, e^z, $\cos z$, $\sin z$, $\cosh z$, $\sinh z$ は整関数である。

定理 27.14 (Liouville の定理)

有界な整関数は定数関数である。

定義 27.13 (整関数)

$\mathbb{C}$ 全体で正則な関数を**整関数** (entire function) と呼ぶ。

例えば、多項式関数, e^z, $\cos z$, $\sin z$, $\cosh z$, $\sinh z$ は整関数である。

定理 27.14 (Liouville の定理)

有界な整関数は定数関数である。

証明

$f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ は正則で、ある実数 M が存在して

$$(\forall z \in \mathbb{C}) \quad |f(z)| \le M$$

を満たすとする。

定義 27.13 (整関数)

$\mathbb{C}$ 全体で正則な関数を**整関数** (entire function) と呼ぶ。

例えば、多項式関数, e^z, $\cos z$, $\sin z$, $\cosh z$, $\sinh z$ は整関数である。

定理 27.14 (Liouville の定理)

有界な整関数は定数関数である。

証明

$f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ は正則で、ある実数 M が存在して

$$(\forall z \in \mathbb{C}) \quad |f(z)| \leq M$$

を満たすとする。

正則性の仮定より、f は原点で冪級数展開出来て、その収束半径は $+\infty$ である。すなわち、ある複素数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ が存在して

(5)
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (z \in \mathbb{C}).$$

証明 (つづき).

任意の正の数 R, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta.$$

証明 (つづき).

任意の正の数 R, 任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して、

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=R}\frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}d\zeta.$$

ゆえに

$$|a_n|\le\frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta|=R}\frac{|f(\zeta)|}{|\zeta|^{n+1}}|d\zeta|\le\frac{M}{2\pi R^{n+1}}\int_{|\zeta|=R}|d\zeta|=\frac{M}{R^n}.$$

(この不等式を Cauchy の評価式と呼ぶ。)

証明 (つづき).

任意の正の数 R, 任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して、

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=R}\frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}d\zeta.$$

ゆえに

$$|a_n|\le\frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta|=R}\frac{|f(\zeta)|}{|\zeta|^{n+1}}|d\zeta|\le\frac{M}{2\pi R^{n+1}}\int_{|\zeta|=R}|d\zeta|=\frac{M}{R^n}.$$

(この不等式を Cauchy の評価式と呼ぶ。)

$R\to+\infty$ として $|a_n|\le 0$. ゆえに $a_n=0$ ($n\in\mathbb{N}$ より $n\ge 1$ であることに注意).

9.4 Liouville の定理と代数学の基本定理

証明 (つづき).

任意の正の数 R, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=R}\frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}d\zeta.$$

ゆえに

$$|a_n| \le \frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta|=R}\frac{|f(\zeta)|}{|\zeta|^{n+1}}|d\zeta| \le \frac{M}{2\pi R^{n+1}}\int_{|\zeta|=R}|d\zeta| = \frac{M}{R^n}.$$

(この不等式を Cauchy の評価式と呼ぶ。)

$R \to +\infty$ として $|a_n| \le 0$. ゆえに $a_n = 0$ ($n \in \mathbb{N}$ より $n \ge 1$ であることに注意).
(5) に代入して

$$f(z) = a_0 \quad (z \in \mathbb{C}).$$

ゆえに f は定数関数である。 □

9.4 Liouville の定理と代数学の基本定理

定理 27.15 (代数学の基本定理)

$P(z)$ が複素係数多項式で、次数が 1 以上ならば、$P(z)$ は少なくとも 1 つの複素数の根を持つ。

定理 27.15 (代数学の基本定理)

$P(z)$ が複素係数多項式で、次数が 1 以上ならば、$P(z)$ は少なくとも 1 つの複素数の根を持つ。

(この定理を認めれば、後は因数定理と帰納法によって、$P(z)$ は次数に等しい個数の 1 次因子の積に因数分解できることがすぐ分かる。)

9.4 Liouville の定理と代数学の基本定理

定理 27.15 (代数学の基本定理)

$P(z)$ が複素係数多項式で、次数が 1 以上ならば、$P(z)$ は少なくとも 1 つの複素数の根を持つ。

(この定理を認めれば、後は因数定理と帰納法によって、$P(z)$ は次数に等しい個数の 1 次因子の積に因数分解できることがすぐ分かる。)

証明.

背理法を用いる。$P(z)$ が根を持たない、すなわち

$$(\forall z \in \mathbb{C}) \quad P(z) \neq 0$$

を満たすと仮定する。

9.4 Liouville の定理と代数学の基本定理

定理 27.15 (代数学の基本定理)

$P(z)$ が複素係数多項式で、次数が 1 以上ならば、$P(z)$ は少なくとも 1 つの複素数の根を持つ。

(この定理を認めれば、後は因数定理と帰納法によって、$P(z)$ は次数に等しい個数の 1 次因子の積に因数分解できることがすぐ分かる。)

証明.

背理法を用いる。$P(z)$ が根を持たない、すなわち

$$(\forall z \in \mathbb{C}) \quad P(z) \neq 0$$

を満たすと仮定する。すると

$$f(z) := \frac{1}{P(z)} \quad (z \in \mathbb{C})$$

で定義した f は $\mathbb{C}$ 全体で正則である。

定理 27.15 (代数学の基本定理)

$P(z)$ が複素係数多項式で、次数が 1 以上ならば、$P(z)$ は少なくとも 1 つの複素数の根を持つ。

(この定理を認めれば、後は因数定理と帰納法によって、$P(z)$ は次数に等しい個数の 1 次因子の積に因数分解できることがすぐ分かる。)

証明.

背理法を用いる。$P(z)$ が根を持たない、すなわち

$$(\forall z \in \mathbb{C}) \quad P(z) \neq 0$$

を満たすと仮定する。すると

$$f(z) := \frac{1}{P(z)} \quad (z \in \mathbb{C})$$

で定義した f は $\mathbb{C}$ 全体で正則である。

実は f は有界である。実際、$\lim_{z\to\infty} |P(z)| = +\infty$ であるから、ある実数 R が存在して

$$(\forall z \in \mathbb{C} : |z| \geq R) \quad |P(z)| \geq 1.$$

証明 (つづき).

ゆえに

$$(\forall z \in \mathbb{C} : |z| \geq R) \quad |f(z)| \leq 1.$$

証明 (つづき).

ゆえに

$$(\forall z \in \mathbb{C} : |z| \geq R) \quad |f(z)| \leq 1.$$

一方、$|f|$ は $\mathbb{C}$ 全体で連続であるから、有界閉集合 $\overline{D}(0; R)$ における $|f|$ の最大値 M が存在する (Weierstrass の最大値定理)。$M' := \max\{1, M\}$ とおくと

$$(\forall z \in \mathbb{C}) \quad |f(z)| \leq M'.$$

証明 (つづき).

ゆえに

$$(\forall z \in \mathbb{C} : |z| \geq R) \quad |f(z)| \leq 1.$$

一方、$|f|$ は $\mathbb{C}$ 全体で連続であるから、有界閉集合 $\overline{D}(0;R)$ における $|f|$ の最大値 M が存在する (Weierstrass の最大値定理)。$M' := \max\{1, M\}$ とおくと

$$(\forall z \in \mathbb{C}) \quad |f(z)| \leq M'.$$

以上より、f は有界な整関数であるから、Liouville の定理によって、f は定数関数である。ゆえに P も定数関数である。これは $P(z)$ が次数 1 以上の多項式であることに矛盾する。 □

9.4 Liouville の定理と代数学の基本定理

証明 (つづき).

ゆえに

$$(\forall z \in \mathbb{C} : |z| \ge R) \quad |f(z)| \le 1.$$

一方、$|f|$ は $\mathbb{C}$ 全体で連続であるから、有界閉集合 $\overline{D}(0; R)$ における $|f|$ の最大値 M が存在する (Weierstrass の最大値定理)。$M' := \max\{1, M\}$ とおくと

$$(\forall z \in \mathbb{C}) \quad |f(z)| \le M'.$$

以上より、f は有界な整関数であるから、Liouville の定理によって、f は定数関数である。ゆえに P も定数関数である。これは $P(z)$ が次数 1 以上の多項式であることに矛盾する。 □

上で用いた $\lim_{z\to\infty} |P(z)| = +\infty$ の証明は分かるだろうか。当たり前に感じる？しかし、例えば $\lim_{z\to\infty} |e^z| = \infty$ は成り立たない。念のため $\lim_{z\to\infty} |P(z)| = +\infty$ を証明しておこう。

9.4 Liouville の定理と代数学の基本定理

補題 27.16 (多項式の $z \to \infty$ のときの漸近挙動)

$n \in \mathbb{N}$, $f(z) = a_0 z^n + \cdots + a_{n-1} z + a_n$ $(a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{C},\ a_0 \neq 0)$ とするとき

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists R \in \mathbb{R})\,(\forall z \in \mathbb{C} : |z| \geq R) \quad (1-\varepsilon)\,|a_0|\,|z|^n \leq |f(z)| \leq (1+\varepsilon)\,|a_0|\,|z|^n.$$

9.4 Liouville の定理と代数学の基本定理

補題 27.16 (多項式の $z\to\infty$ のときの漸近挙動)

$n\in\mathbb{N}$, $f(z)=a_0z^n+\cdots+a_{n-1}z+a_n$ $(a_0,a_1,\cdots,a_n\in\mathbb{C},\ a_0\neq 0)$ とするとき

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists R\in\mathbb{R})(\forall z\in\mathbb{C}:|z|\geq R)\quad (1-\varepsilon)|a_0||z|^n\leq|f(z)|\leq(1+\varepsilon)|a_0||z|^n.$$

証明.

$z\to\infty$ のとき

$$\frac{f(z)}{a_0z^n}=1+\frac{a_1}{a_0z}+\cdots+\frac{a_n}{a_0z^n}\to 1.$$

補題 27.16 (多項式の $z \to \infty$ のときの漸近挙動)

$n \in \mathbb{N}$, $f(z) = a_0 z^n + \cdots + a_{n-1} z + a_n$ $(a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{C},\ a_0 \neq 0)$ とするとき

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists R \in \mathbb{R})\,(\forall z \in \mathbb{C} : |z| \geq R) \quad (1-\varepsilon)\,|a_0|\,|z|^n \leq |f(z)| \leq (1+\varepsilon)\,|a_0|\,|z|^n.$$

証明.

$z \to \infty$ のとき

$$\frac{f(z)}{a_0 z^n} = 1 + \frac{a_1}{a_0 z} + \cdots + \frac{a_n}{a_0 z^n} \to 1.$$

ゆえに

$$\frac{|f(z)|}{|a_0 z^n|} \to 1.$$

9.4 Liouville の定理と代数学の基本定理

補題 27.16 (多項式の $z \to \infty$ のときの漸近挙動)

$n \in \mathbb{N}$, $f(z) = a_0 z^n + \cdots + a_{n-1} z + a_n$ $(a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{C},\ a_0 \neq 0)$ とするとき

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists R \in \mathbb{R})\,(\forall z \in \mathbb{C} : |z| \geq R) \quad (1-\varepsilon)\,|a_0|\,|z|^n \leq |f(z)| \leq (1+\varepsilon)\,|a_0|\,|z|^n.$$

証明.

$z \to \infty$ のとき

$$\frac{f(z)}{a_0 z^n} = 1 + \frac{a_1}{a_0 z} + \cdots + \frac{a_n}{a_0 z^n} \to 1.$$

ゆえに

$$\frac{|f(z)|}{|a_0 z^n|} \to 1.$$

ゆえに任意の正の数 ε に対して、ある実数 R が存在して

$$(\forall z \in \mathbb{C} : |z| \geq R) \quad \left| \frac{|f(z)|}{|a_0 z^n|} - 1 \right| < \varepsilon.$$

9.4 Liouville の定理と代数学の基本定理

補題 27.16 (多項式の $z \to \infty$ のときの漸近挙動)

$n \in \mathbb{N}$, $f(z) = a_0 z^n + \cdots + a_{n-1} z + a_n$ $(a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{C},\ a_0 \neq 0)$ とするとき

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists R \in \mathbb{R})\,(\forall z \in \mathbb{C} : |z| \geq R) \quad (1-\varepsilon)\,|a_0|\,|z|^n \leq |f(z)| \leq (1+\varepsilon)\,|a_0|\,|z|^n .$$

証明.

$z \to \infty$ のとき

$$\frac{f(z)}{a_0 z^n} = 1 + \frac{a_1}{a_0 z} + \cdots + \frac{a_n}{a_0 z^n} \to 1.$$

ゆえに

$$\frac{|f(z)|}{|a_0 z^n|} \to 1.$$

ゆえに任意の正の数 ε に対して、ある実数 R が存在して

$$(\forall z \in \mathbb{C} : |z| \geq R) \quad \left| \frac{|f(z)|}{|a_0 z^n|} - 1 \right| < \varepsilon.$$

これから

$$(1-\varepsilon)\,|a_0|\,|z|^n \leq |f(z)| \leq (1+\varepsilon)\,|a_0|\,|z|^n .$$

9.5 平均値の定理と最大値原理

定理 27.17 (平均値の定理 (the mean-value property))

Ω は $\mathbb{C}$ の領域で、$f\colon\Omega\to\mathbb{C}$ は正則、$c\in\Omega$ とするとき、$\overline{D}(c;r)\subset\Omega$ を満たす任意の $r>0$ に対して

$$f(c)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(c+re^{i\theta})d\theta.$$

(右辺は、円周 $|z-c|=r$ における f の平均値であることに注意)

定理 27.17 (平均値の定理 (the mean-value property))

Ω は $\mathbb{C}$ の領域で、$f\colon\Omega\to\mathbb{C}$ は正則、$c\in\Omega$ とするとき、$\overline{D}(c;r)\subset\Omega$ を満たす任意の $r>0$ に対して

$$f(c)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(c+re^{i\theta})d\theta.$$

(右辺は、円周 $|z-c|=r$ における f の平均値であることに注意)

証明.

Cauchy の積分公式を用い、積分路を $\zeta=c+re^{i\theta}$ $(\theta\in[0,2\pi])$ とパラメーターづけすると

$$f(c)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-c|=r}\frac{f(\zeta)}{\zeta-c}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(c+re^{i\theta})}{re^{i\theta}}\cdot ire^{i\theta}\,d\theta$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(c+re^{i\theta})d\theta.$$

□

定理 27.18 (最大値原理 (the maximum principle, maximum-modulus theorem))

Ω は $\mathbb{C}$ の領域、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は正則、$z_0 \in \Omega$,

$$(\forall z \in \Omega) \quad |f(z)| \le |f(z_0)| \quad (|f(z_0)| \text{ は } |f| \text{ の最大値である、ということ})$$

が成り立つならば、f は定数関数である。
(正則関数の絶対値が、ある内点で最大値を取れば、その関数は実は定数関数である。)

証明

$M := |f(z_0)|$ とおく。
Ω は開集合であるから、$(\exists \varepsilon > 0)\ D(z_0;\varepsilon) \subset \Omega$.
$\rho := \varepsilon/2$ とおくと、$\overline{D}(z_0;\rho) \subset \Omega$.
$0 < r \le \rho$ なる任意の r に対して、平均値の定理から

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})\,d\theta.$$

ゆえに

$$M = |f(z_0)| \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left| f(z_0 + re^{i\theta}) \right| d\theta \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} M\,d\theta = M.$$

(つづく)

証明 (続き)

左辺と右辺が一致したから、不等号はすべて等号である。特に

$$\int_0^{2\pi} \left| f(z_0 + re^{i\theta}) \right| d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M \, d\theta.$$

証明 (続き)

左辺と右辺が一致したから、不等号はすべて等号である。特に

$$\int_0^{2\pi} \left| f(z_0 + re^{i\theta}) \right| d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M \, d\theta.$$

$\theta \mapsto \left| f(z_0 + re^{i\theta}) \right|$ は連続で、$\left| f(z_0 + re^{i\theta}) \right| \le M$ であるから

$$\left| f(z_0 + re^{i\theta}) \right| = M \quad (\theta \in [0, 2\pi]).$$

証明 (続き)

左辺と右辺が一致したから、不等号はすべて等号である。特に

$$\int_0^{2\pi}\left|f(z_0+re^{i\theta})\right|d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}M\,d\theta.$$

$\theta\mapsto\left|f(z_0+re^{i\theta})\right|$ は連続で、$\left|f(z_0+re^{i\theta})\right|\le M$ であるから

$$\left|f(z_0+re^{i\theta})\right|=M\quad(\theta\in[0,2\pi]).$$

すなわち $|f(z)|=M$ $(|z-z_0|=r)$.
($\because$ どこか 1 点 θ_0 で $\left|f(z_0+re^{i\theta_0})\right|<M$ であれば、連続性から θ_0 の十分小さな近傍で $\left|f(z_0+re^{i\theta})\right|<M$). すると上の等式は成り立たなくなり矛盾が生じる。

9.5 平均値の定理と最大値原理

証明 (続き)

左辺と右辺が一致したから、不等号はすべて等号である。特に

$$\int_0^{2\pi} \left| f(z_0 + re^{i\theta}) \right| d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M \, d\theta.$$

$\theta \mapsto \left| f(z_0 + re^{i\theta}) \right|$ は連続で、$\left| f(z_0 + re^{i\theta}) \right| \le M$ であるから

$$\left| f(z_0 + re^{i\theta}) \right| = M \quad (\theta \in [0, 2\pi]).$$

すなわち $|f(z)| = M$ $(|z - z_0| = r)$.

($\because$ どこか 1 点 θ_0 で $\left| f(z_0 + re^{i\theta_0}) \right| < M$ であれば、連続性から θ_0 の十分小さな近傍で $\left| f(z_0 + re^{i\theta}) \right| < M$). すると上の等式は成り立たなくなり矛盾が生じる。

r の任意性から $|f(z) = M|$ $(|z - z_0| \le \rho)$.

証明 (続き)

左辺と右辺が一致したから、不等号はすべて等号である。特に

$$\int_0^{2\pi} \left| f(z_0 + re^{i\theta}) \right| d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M\, d\theta.$$

$\theta \mapsto \left| f(z_0 + re^{i\theta}) \right|$ は連続で、$\left| f(z_0 + re^{i\theta}) \right| \le M$ であるから

$$\left| f(z_0 + re^{i\theta}) \right| = M \quad (\theta \in [0, 2\pi]).$$

すなわち $|f(z)| = M$ $(|z - z_0| = r)$.
($\because$ どこか 1 点 θ_0 で $\left| f(z_0 + re^{i\theta_0}) \right| < M$ であれば、連続性から θ_0 の十分小さな近傍で $\left| f(z_0 + re^{i\theta}) \right| < M$). すると上の等式は成り立たなくなり矛盾が生じる。

r の任意性から $|f(z) = M|$ $(|z - z_0| \le \rho)$.
ゆえに f 自身が $D(z_0; \rho)$ で定数関数 C に等しい ($\because$ Cauchy-Riemman のところで「絶対値が定数ならば関数自身が定数」を示した)。

証明 (続き)

左辺と右辺が一致したから、不等号はすべて等号である。特に

$$\int_0^{2\pi} \left| f(z_0 + re^{i\theta}) \right| d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M \, d\theta.$$

$\theta \mapsto \left| f(z_0 + re^{i\theta}) \right|$ は連続で、$\left| f(z_0 + re^{i\theta}) \right| \le M$ であるから

$$\left| f(z_0 + re^{i\theta}) \right| = M \quad (\theta \in [0, 2\pi]).$$

すなわち $|f(z)| = M$ $(|z - z_0| = r)$.

($\because$ どこか 1 点 θ_0 で $\left| f(z_0 + re^{i\theta_0}) \right| < M$ であれば、連続性から θ_0 の十分小さな近傍で $\left| f(z_0 + re^{i\theta}) \right| < M$). すると上の等式は成り立たなくなり矛盾が生じる。

r の任意性から $|f(z) = M|$ $(|z - z_0| \le \rho)$.

ゆえに f 自身が $D(z_0; \rho)$ で定数関数 C に等しい ($\because$ Cauchy-Riemman のところで「絶対値が定数ならば関数自身が定数」を示した)。

一致の定理により Ω 全体で $f = C$. $\square$

9.5 平均値の定理と最大値原理

証明 (続き)

左辺と右辺が一致したから、不等号はすべて等号である。特に

$$\int_0^{2\pi} \left| f(z_0 + re^{i\theta}) \right| d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M\, d\theta.$$

$\theta \mapsto \left| f(z_0 + re^{i\theta}) \right|$ は連続で、$\left| f(z_0 + re^{i\theta}) \right| \le M$ であるから

$$\left| f(z_0 + re^{i\theta}) \right| = M \quad (\theta \in [0, 2\pi]).$$

すなわち $|f(z)| = M$ ($|z - z_0| = r$).
($\because$ どこか 1 点 θ_0 で $\left| f(z_0 + re^{i\theta_0}) \right| < M$ であれば、連続性から θ_0 の十分小さな近傍で $\left| f(z_0 + re^{i\theta}) \right| < M$). すると上の等式は成り立たなくなり矛盾が生じる。

r の任意性から $|f(z) = M|$ ($|z - z_0| \le \rho$).
ゆえに f 自身が $D(z_0; \rho)$ で定数関数 C に等しい ($\because$ Cauchy-Riemman のところで「絶対値が定数ならば関数自身が定数」を示した)。
一致の定理により Ω 全体で $f = C$. □

余談: 実は調和関数についても、平均値の定理と最大値原理が成り立ち、様々な応用がある。

定理 27.19 (Riemann の除去可能特異点定理)

$c\in\mathbb{C}$, $\varepsilon>0$, $f\colon\{z\in\mathbb{C}\mid 0<|z-c|<\varepsilon\}\to\mathbb{C}$ は正則かつ有界とする。このとき c は f の除去可能特異点である。

定理 27.19 (Riemann の除去可能特異点定理)

$c \in \mathbb{C}$, $\varepsilon > 0$, $f\colon \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z-c| < \varepsilon\} \to \mathbb{C}$ は正則かつ有界とする。このとき c は f の除去可能特異点である。

証明

仮定より、ある $M \in \mathbb{R}$ が存在して

$$(\forall z \in \mathbb{C} : 0 < |z-c| < \varepsilon) \quad |f(z)| \le M.$$

定理 27.19 (Riemann の除去可能特異点定理)

$c \in \mathbb{C}$, $\varepsilon > 0$, $f\colon \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z-c| < \varepsilon\} \to \mathbb{C}$ は正則かつ有界とする。このとき c は f の除去可能特異点である。

証明

仮定より、ある $M \in \mathbb{R}$ が存在して

$$(\forall z \in \mathbb{C} : 0 < |z-c| < \varepsilon) \quad |f(z)| \le M.$$

f が $A(c;0,\varepsilon)$ で正則なことから、ある複素数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ が存在して

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-c)^n} \quad (z \in A(c;0,\varepsilon)).$$

そして、任意の $n \in \mathbb{Z}$ と $0 < r < \varepsilon$ を満たす任意の r に対して

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - c| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - c)^{n+1}} d\zeta.$$

10.4.1 Riemann の除去可能特異点定理

証明.

(つづき) ゆえに

$$|a_n| \le \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta - c| = r} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - c|^{n+1}} \, |d\zeta| \le \frac{M}{2\pi r^{n+1}} \int_{|\zeta - c| = r} |d\zeta| = \frac{M}{r^n}.$$

証明.

(つづき) ゆえに

$$|a_n| \le \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta-c|=r} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta-c|^{n+1}} |d\zeta| \le \frac{M}{2\pi r^{n+1}} \int_{|\zeta-c|=r} |d\zeta| = \frac{M}{r^n}.$$

特に $n \in \mathbb{N}$ のとき

$$|a_{-n}| \le \frac{M}{r^{-n}} = Mr^n \quad (0 < r < \varepsilon).$$

10.4.1 Riemann の除去可能特異点定理

証明.

(つづき) ゆえに

$$|a_n| \le \frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta-c|=r}\frac{|f(\zeta)|}{|\zeta-c|^{n+1}}|d\zeta| \le \frac{M}{2\pi r^{n+1}}\int_{|\zeta-c|=r}|d\zeta| = \frac{M}{r^n}.$$

特に $n\in\mathbb{N}$ のとき

$$|a_{-n}| \le \frac{M}{r^{-n}} = Mr^n \quad (0<r<\varepsilon).$$

$r\to 0$ とすると $|a_{-n}|=0$. ゆえに $a_{-n}=0$.

10.4.1 Riemann の除去可能特異点定理

証明.

(つづき) ゆえに

$$|a_n| \le \frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta-c|=r}\frac{|f(\zeta)|}{|\zeta-c|^{n+1}}|d\zeta| \le \frac{M}{2\pi r^{n+1}}\int_{|\zeta-c|=r}|d\zeta| = \frac{M}{r^n}.$$

特に $n\in\mathbb{N}$ のとき

$$|a_{-n}| \le \frac{M}{r^{-n}} = Mr^n \quad (0<r<\varepsilon).$$

$r\to 0$ とすると $|a_{-n}|=0$. ゆえに $a_{-n}=0$.

ゆえに f の c における Laurent 展開の主部は 0 である。すなわち c は f の除去可能特異点である。 □

10.4.1 Riemann の除去可能特異点定理

証明.

(つづき) ゆえに

$$|a_n| \le \frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta-c|=r}\frac{|f(\zeta)|}{|\zeta-c|^{n+1}}|d\zeta| \le \frac{M}{2\pi r^{n+1}}\int_{|\zeta-c|=r}|d\zeta| = \frac{M}{r^n}.$$

特に $n \in \mathbb{N}$ のとき

$$|a_{-n}| \le \frac{M}{r^{-n}} = Mr^n \quad (0 < r < \varepsilon).$$

$r \to 0$ とすると $|a_{-n}| = 0$. ゆえに $a_{-n} = 0$.

ゆえに f の c における Laurent 展開の主部は 0 である。すなわち c は f の除去可能特異点である。 □

Liouville の定理 (定理 27.14) の証明と並べてみると、類似点が分かって面白く感じられるかもしれない。

定理 27.20 (Casorati-Weierstrass)

c が f の孤立真性特異点ならば

$$(\forall\beta\in\mathbb{C})(\exists\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}})((\forall\in\mathbb{N})z_n\neq c)\wedge\lim_{n\to\infty}z_n=c\wedge\lim_{n\to\infty}f(z_n)=\beta.$$

10.4.2 Casorati-Weierstrass の定理

定理 27.20 (Casorati-Weierstrass)

c が f の孤立真性特異点ならば

$$(\forall\beta\in\mathbb{C})(\exists\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}})((\forall\in\mathbb{N})z_n\neq c)\wedge\lim_{n\to\infty}z_n=c\wedge\lim_{n\to\infty}f(z_n)=\beta.$$

特に $\displaystyle\lim_{\substack{z\to c\\ z\neq c}}f(z)$ は確定しない。

10.4.2 Casorati-Weierstrass の定理

定理 27.20 (Casorati-Weierstrass)

c が f の孤立真性特異点ならば

$$(\forall\beta\in\mathbb{C})(\exists\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}})((\forall\in\mathbb{N})z_n\neq c)\land\lim_{n\to\infty}z_n=c\land\lim_{n\to\infty}f(z_n)=\beta.$$

特に $\displaystyle\lim_{\substack{z\to c\\ z\neq c}}f(z)$ は確定しない。

証明

$\beta\in\mathbb{C}$ とする。次を示せば良い。

$$(\star)\qquad (\forall\varepsilon>0)(\forall r\in(0,R))(\exists z\in A(c;0,r))\quad |f(z)-\beta|<\varepsilon$$

10.4.2 Casorati-Weierstrass の定理

定理 27.20 (Casorati-Weierstrass)

c が f の孤立真性特異点ならば

$$(\forall\beta\in\mathbb{C})(\exists\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}})((\forall\in\mathbb{N})z_n\ne c)\wedge\lim_{n\to\infty}z_n=c\wedge\lim_{n\to\infty}f(z_n)=\beta.$$

特に $\displaystyle\lim_{\substack{z\to c\\ z\ne c}}f(z)$ は確定しない。

証明

$\beta\in\mathbb{C}$ とする。次を示せば良い。

$$(\star)\qquad (\forall\varepsilon>0)(\forall r\in(0,R))(\exists z\in A(c;0,r))\quad |f(z)-\beta|<\varepsilon$$

(($\star$) を示せば良いことの確認: $n=1,2,\cdots$ に対して、$\varepsilon=r=\min\{\frac{1}{n},R\}$ として用いると、

$$(\exists z_n):0<|z_n-c|<\frac{1}{n}\wedge|f(z_n)-\beta|<\frac{1}{n}.$$

こうして作った $\{z_n\}$ に対して、$n\to\infty$ のとき $z_n\to c$ かつ $f(z_n)\to\beta$ が成り立つ。)

(つづく)

10.4.2 Casorati-Weierstrass の定理

証明 (続き)

$(\star)$ を背理法で示す。それが成り立たない、すなわち

$$(\exists\varepsilon > 0)(\exists r \in (0, R))(\forall z \in A(c; 0, r)) \quad |f(z) - \beta| \geq \varepsilon$$

と仮定する。

10.4.2 Casorati-Weierstrass の定理

証明 (続き)

(⋆) を背理法で示す。それが成り立たない、すなわち

$$(\exists\varepsilon > 0)(\exists r \in (0, R))(\forall z \in A(c; 0, r)) \quad |f(z) - \beta| \geq \varepsilon$$

と仮定する。

$$(*) \qquad g(z) := \frac{1}{f(z) - \beta} \quad (z \in A(c; 0, r))$$

とおくと、

証明 (続き)

$(\star)$ を背理法で示す。それが成り立たない、すなわち

$$(\exists\varepsilon>0)(\exists r\in(0,R))(\forall z\in A(c;0,r))\quad |f(z)-\beta|\geq\varepsilon$$

と仮定する。

$$(*)\qquad g(z):=\frac{1}{f(z)-\beta}\quad (z\in A(c;0,r))$$

とおくと、g は $A(c;e,r)$ で正則であり (分母が 0 にならないから)、また $g(z)\neq 0$. 特に c は g の孤立特異点である。

10.4.2 Casorati-Weierstrass の定理

証明 (続き)

$(\star)$ を背理法で示す。それが成り立たない、すなわち

$$(\exists\varepsilon > 0)(\exists r \in (0, R))(\forall z \in A(c; 0, r)) \quad |f(z) - \beta| \geq \varepsilon$$

と仮定する。

$$(*) \qquad g(z) := \frac{1}{f(z) - \beta} \quad (z \in A(c; 0, r))$$

とおくと、g は $A(c; e, r)$ で正則であり (分母が 0 にならないから)、また $g(z) \neq 0$. 特に c は g の孤立特異点である。さらに $|g(z)| \leq \frac{1}{\varepsilon}$ が成り立つので、Riemann の除去可能特異点定理によって、c は g の除去可能特異点である。

証明 (続き)

$(\star)$ を背理法で示す。それが成り立たない、すなわち

$$(\exists\varepsilon>0)(\exists r\in(0,R))(\forall z\in A(c;0,r))\quad |f(z)-\beta|\geq\varepsilon$$

と仮定する。

$$(*)\qquad g(z):=\frac{1}{f(z)-\beta}\quad (z\in A(c;0,r))$$

とおくと、g は $A(c;e,r)$ で正則であり (分母が 0 にならないから)、また $g(z)\neq 0$. 特に c は g の孤立特異点である。さらに $|g(z)|\leq\frac{1}{\varepsilon}$ が成り立つので、Riemann の除去可能特異点定理によって、c は g の除去可能特異点である。ゆえに g は $D(c;r)$ で正則であるように拡張できる。

10.4.2 Casorati-Weierstrass の定理

証明 (続き)

$(\star)$ を背理法で示す。それが成り立たない、すなわち

$$(\exists \varepsilon > 0)(\exists r \in (0, R))(\forall z \in A(c; 0, r)) \quad |f(z) - \beta| \geq \varepsilon$$

と仮定する。

$$(*) \qquad g(z) := \frac{1}{f(z) - \beta} \quad (z \in A(c; 0, r))$$

とおくと、g は $A(c; e, r)$ で正則であり (分母が 0 にならないから)、また $g(z) \neq 0$. 特に c は g の孤立特異点である。さらに $|g(z)| \leq \frac{1}{\varepsilon}$ が成り立つので、Riemann の除去可能特異点定理によって、c は g の除去可能特異点である。ゆえに g は $D(c; r)$ で正則であるように拡張できる。

$(*)$ を $f(z)$ について解く。

$$f(z) = \beta + \frac{1}{g(z)} \quad (z \in A(c; 0, r)).$$

(つづく)

証明 (続き).

場合分けする。

1. (i) $g(c) \neq 0$ ならば c は f の除去可能特異点である。
2. (ii) $g(c) = 0$ ならば、c は g の零点である。その位数を k とすると、c は f の k 位の極である。

どちらも、c が f の真性特異点であることに矛盾する。 □

10.4.3 孤立特異点の lim による特徴づけ

定理 27.21 (孤立特異点の lim による特徴づけ)

c が f の孤立特異点とするとき、次の (1), (2), (3) が成立する。

1. c が f の除去可能特異点 $\Leftrightarrow$ $\displaystyle\lim_{\substack{z\to c\\ z\neq c}} f(z)$ は収束。すなわち $(\exists A\in\mathbb{C})$ $\displaystyle\lim_{\substack{z\to c\\ z\neq c}} f(z)=A$.
2. c が f の極 $\Leftrightarrow$ $\displaystyle\lim_{\substack{z\to c\\ z\neq c}} f(z)=\infty$.
3. c が f の真性特異点 $\Leftrightarrow$ $\displaystyle\lim_{\substack{z\to c\\ z\neq c}} f(z)$ は収束しないし、∞ に発散もしない。

10.4.3 孤立特異点の lim による特徴づけ

定理 27.21 (孤立特異点の lim による特徴づけ)

c が f の孤立特異点とするとき、次の (1), (2), (3) が成立する。

1. c が f の除去可能特異点 $\Leftrightarrow$ $\displaystyle\lim_{\substack{z\to c\\ z\neq c}} f(z)$ は収束。すなわち $(\exists A\in\mathbb{C})$ $\displaystyle\lim_{\substack{z\to c\\ z\neq c}} f(z)=A$.
2. c が f の極 $\Leftrightarrow$ $\displaystyle\lim_{\substack{z\to c\\ z\neq c}} f(z)=\infty$.
3. c が f の真性特異点 $\Leftrightarrow$ $\displaystyle\lim_{\substack{z\to c\\ z\neq c}} f(z)$ は収束しないし、∞ に発散もしない。

証明.

(1), (2) の $\Rightarrow$ は証明済みである (比較的簡単)。

Casorati-Weierstrass の定理により、(3) の $\Rightarrow$ が成立することも分かった。

任意の孤立特異点は、除去可能特異点、極、真性特異点のいずれかであるので、(1), (2), (3) の $\Leftarrow$ が成立する。 □

10.4.3 孤立特異点の lim による特徴づけ

Cf. 分類になっているとき、$\Rightarrow$ から $\Leftarrow$ が導かれる、という論法は、次の定理の証明でも使える。

実係数の 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ について、$D := b^2 - 4ac$ とおくとき

- $D > 0 \Leftrightarrow$ 2 つの相異なる実根を持つ。
- $D = 0 \Leftrightarrow$ 1 つの実根 (重根) を持つ。
- $D < 0 \Leftrightarrow$ 2 つの相異なる虚根を持つ。

以上で、例年説明していることはほぼすべて説明できた。

以上で、例年説明していることはほぼすべて説明できた。

長い話、最後まで視聴してくれた人、お疲れさまです。

「複素関数・同演習」の後に

- この先の関数論について。キーワードの紹介くらい。

  留数定理のさらなる応用、*Riemann* 球面 $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, *Riemann* の写像定理、楕円関数、代数関数、*Riemann* 面、特殊関数、多変数関数論、佐藤超函数論、などなど

  関数論はなかなか広大。

「複素関数・同演習」の後に

- この先の関数論について。キーワードの紹介くらい。

  留数定理のさらなる応用、*Riemann* 球面 $\widehat{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$, *Riemann* の写像定理、楕円関数、代数関数、*Riemann* 面、特殊関数、多変数関数論、佐藤超函数論、などなど

  関数論はなかなか広大。
- 現象数理学科には「応用複素関数」という科目がある。上に書いた関数論の続きというよりは、応用事例の紹介が主な内容である(「コンピューター数理」の科目)。留数定理による級数の和の計算、流体のポテンシャル流、ポテンシャル問題、等角写像の数値計算、数値積分の誤差解析、佐藤の超函数の紹介、などなど (毎年迷いながらやっている)。

参考文献

[1] 岡本久, 長岡亮介：関数とは何か — 近代数学史からのアプローチ, 近代科学社 (2014/7/28).

[2] 一松 信(ひとつまつしん)：留数解析 — 留数による定積分と級数の計算, 共立出版 (1979), 第 5 章は数値積分の高橋-森理論の解説。