複素関数・同演習 第 24 回

～Laurent 展開, 孤立特異点～

かつらだ まさし
桂田 祐史
https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2022/

2022 年 12 月 20 日

目次

本日の内容・連絡事項

- これからこの講義科目が終わるまでを強引に 1 行にまとめると

　孤立特異点とその留数を導入し、留数定理により色々なことができる となる。

　孤立特異点というのは、これまで授業でたびたび出て来た「赤いバッテン」のことである。それをちゃんと定義する。

　今回は「円環領域で正則な関数は **Laurent**(ローラン) **展開**できる」という定理を紹介し、簡単な例を説明する。

　さらに、その定理を用いて孤立特異点を 3 つに分類し、その留数を定義し、色々な性質を学ぶ。今週 (今年) の到達点はそのあたりまでになるかな。講義ノート [1] の§10.1, 10.2, 10.3 の内容である。

円盤で正則な関数は冪級数展開できることが分かった。円盤を円環に置き換えてみる。

定義 24.1 (円環領域)

$c \in \mathbb{C}$, $0 \le R_1 < R_2 \le +\infty$ に対して

$$A(c; R_1, R_2) := \{z \in \mathbb{C} \mid R_1 < |z - c| < R_2\}$$

を c を中心とする**円環領域** (annulus, annular domain) と呼ぶ。さらに次のようにおく。

$$\overline{A}(c; R_1, R_2) := \{z \in \mathbb{C} \mid R_1 \le |z - c| \le R_2\} \quad (\text{ただし } R_2 < +\infty).$$

(注意: $R_2 = +\infty$ のときは、$z \in \mathbb{C}$ であるから $|z - c| < +\infty$ ということになる。)

円盤で正則な関数は冪級数展開できることが分かった。円盤を円環に置き換えてみる。

定義 24.1 (円環領域)

$c \in \mathbb{C}$, $0 \le R_1 < R_2 \le +\infty$ に対して

$$A(c; R_1, R_2) := \{z \in \mathbb{C} \mid R_1 < |z - c| < R_2\}$$

を c を中心とする**円環領域** (annulus, annular domain) と呼ぶ。さらに次のようにおく。

$$\overline{A}(c; R_1, R_2) := \{z \in \mathbb{C} \mid R_1 \le |z - c| \le R_2\} \quad (\text{ただし } R_2 < +\infty).$$

(注意: $R_2 = +\infty$ のときは、$z \in \mathbb{C}$ であるから $|z - c| < +\infty$ ということになる。)

「円環」という言葉にふさわしいのは、$0 < R_1 < R_2 < +\infty$ の場合だけだろう。しかし、以下で紹介する Laurent 級数の収束・発散を扱うときは、(収束円のときと同様に) $R_1 = 0$ や $R_2 = +\infty$ の場合も考えるのが有効である。

円盤で正則な関数は冪級数展開できることが分かった。円盤を円環に置き換えてみる。

定義 24.1 (円環領域)

$c \in \mathbb{C}$, $0 \le R_1 < R_2 \le +\infty$ に対して

$$A(c; R_1, R_2) := \{z \in \mathbb{C} \mid R_1 < |z-c| < R_2\}$$

を c を中心とする**円環領域** (annulus, annular domain) と呼ぶ。さらに次のようにおく。

$$\overline{A}(c; R_1, R_2) := \{z \in \mathbb{C} \mid R_1 \le |z-c| \le R_2\} \quad (\text{ただし } R_2 < +\infty).$$

(注意: $R_2 = +\infty$ のときは、$z \in \mathbb{C}$ であるから $|z-c| < +\infty$ ということになる。)

「円環」という言葉にふさわしいのは、$0 < R_1 < R_2 < +\infty$ の場合だけだろう。しかし、以下で紹介する Laurent 級数の収束・発散を扱うときは、(収束円のときと同様に) $R_1 = 0$ や $R_2 = +\infty$ の場合も考えるのが有効である。

実は $R_1 = 0$ の場合が頻出する。このとき $A(c; R_1, R_2)$ は円盤 $D(c; R_2)$ から中心 c を除いたものである。すなわち

$$A(c; 0, R_2) = D(c; R_2) \setminus \{c\}.$$

10.1 円環領域における正則関数の Laurent 展開, 留数

定理 24.2 (円環領域で正則な関数は Laurent 展開出来る)

$c\in\mathbb{C}$, $0\le R_1<R_2\le+\infty$, $f\colon A(c;R_1,R_2)\to\mathbb{C}$ は正則とするとき、ある複素数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}\in\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ が一意的に存在して

$$(1)\qquad f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-c)^n}\quad(z\in A(c;R_1,R_2)).$$

右辺の級数は、$R_1<r_1<r_2<R_2$ を満たす任意の r_1, r_2 に対して、$\overline{A}(c;r_1,r_2)=\{z\in\mathbb{C}\mid r_1\le|z-c|\le r_2\}$ で一様絶対収束する。

(1) が成り立つとき、$R_1<r<R_2$ を満たす任意の r に対して

$$(2)\qquad a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-c|=r}\frac{f(z)}{(z-c)^{n+1}}dz\quad(n\in\mathbb{Z}).$$

(「円盤領域で正則な関数は Taylor 展開 (冪級数展開) 出来る」と比較しよう。)

10.1 円環領域における正則関数の Laurent 展開, 留数

定理 24.2 (円環領域で正則な関数は Laurent 展開出来る)

$c \in \mathbb{C}$, $0 \le R_1 < R_2 \le +\infty$, $f\colon A(c;R_1,R_2) \to \mathbb{C}$ は正則とするとき、ある複素数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ が一意的に存在して

(1)
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-c)^n} \quad (z \in A(c;R_1,R_2)).$$

右辺の級数は、$R_1 < r_1 < r_2 < R_2$ を満たす任意の r_1, r_2 に対して、$\overline{A}(c;r_1,r_2) = \{z \in \mathbb{C} \mid r_1 \le |z-c| \le r_2\}$ で一様絶対収束する。

(1) が成り立つとき、$R_1 < r < R_2$ を満たす任意の r に対して

(2)
$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-c|=r} \frac{f(z)}{(z-c)^{n+1}}\,dz \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

(「円盤領域で正則な関数は Taylor 展開 (冪級数展開) 出来る」と比較しよう。)

この定理の証明はやや重いが、級数の一様収束や項別積分の部分を抜きにした式変形の部分だけでも読み取って欲しい。

定義 24.3 (Laurent 展開)

$c \in \mathbb{C}$, $0 \le R_1 < R_2 \le +\infty$, $f \colon A(c; R_1, R_2) \to \mathbb{C}$ は正則とするとき

$$(3) \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-c)^n} \quad (z \in A(c; R_1, R_2))$$

を満たす $\{a_n\}$ が一意的に存在する。(3) を、f の $A(c; R_1, R_2)$ における **Laurent 級数展開** (あるいは短く Laurent 展開) と呼ぶ。

特に $R_1 = 0$ のとき、f の c のまわりの (c における) **Laurent 級数展開**と呼ぶ。また、このとき $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-c)^n}$ を f の Laurent 級数展開の**主部** (**主要部**, the principal part) と呼ぶ。また、a_{-1} を f の c における**留数** (residue) と呼び、$\mathrm{Res}(f; c)$ あるいは $\displaystyle\operatorname*{Res}_{z=c} f(z)\,dz$ で表す。

10.1 円環領域における正則関数の Laurent 展開, 留数

注意

1. Laurent 展開は Taylor 展開の一般化である。Taylor 展開は Laurent 展開でもある。

注意

1. Laurent 展開は Taylor 展開の一般化である。Taylor 展開は Laurent 展開でもある。
(解説) f が $D(c;R)$ で正則と仮定すると、Taylor 展開できる:

$$(\exists\{a_n\}_{n\geq 0})\quad f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n\quad (|z-c|<R).$$

(この式は、もちろん $0<|z-c|<R$ でも成り立つ。)

注意

1. Laurent 展開は Taylor 展開の一般化である。Taylor 展開は Laurent 展開でもある。
(解説) f が $D(c;R)$ で正則と仮定すると、Taylor 展開できる:

$$(\exists\{a_n\}_{n\ge 0})\quad f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n\quad(|z-c|<R).$$

(この式は、もちろん $0<|z-c|<R$ でも成り立つ。)

このとき、f は $A(c;0,R)$ で正則でもあるので、上の定理 24.2 から、Laurent 級数展開できる:

$$(\exists\{a'_n\}_{n\in\mathbb{Z}})\quad f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a'_n(z-c)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a'_{-n}}{(z-c)^n}\quad(0<|z-c|<R).$$

Laurent 展開の一意性から、$n\ge 0$ のとき $a'_n=a_n$, $n<0$ のとき $a'_n=0$.

10.1 円環領域における正則関数の Laurent 展開, 留数

注意

1. Laurent 展開は Taylor 展開の一般化である。Taylor 展開は Laurent 展開でもある。
(解説) f が $D(c;R)$ で正則と仮定すると、Taylor 展開できる:

$$(\exists\{a_n\}_{n\ge 0})\quad f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n\quad (|z-c|<R).$$

(この式は、もちろん $0<|z-c|<R$ でも成り立つ。)

このとき、f は $A(c;0,R)$ で正則でもあるので、上の定理 24.2 から、Laurent 級数展開できる:

$$(\exists\{a'_n\}_{n\in\mathbb{Z}})\quad f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a'_n(z-c)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a'_{-n}}{(z-c)^n}\quad (0<|z-c|<R).$$

Laurent 展開の一意性から、$n\ge 0$ のとき $a'_n=a_n$, $n<0$ のとき $a'_n=0$.

Taylor 展開では

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-c|=r}\frac{f(z)}{(z-c)^{n+1}}dz=\frac{f^{(n)}(c)}{n!}$$

が成り立つが、Laurent 級数展開では $f^{(n)}(c)$ が存在しない場合があることに注意。

例 24.4 (簡単な有理関数の例でゆっくりと説明)

(4)
$$f(z) = \frac{1}{z-2} \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \{2\}).$$

例 24.4 (簡単な有理関数の例でゆっくりと説明)

(4) $$f(z)=\frac{1}{z-2}\quad (z\in\mathbb{C}\setminus\{2\}).$$

まず $c=2$ の周りの Laurent 展開を求めよう。実は (4) 自身が f の $A(2;0,+\infty)$ での Laurent 展開である。

例 24.4 (簡単な有理関数の例でゆっくりと説明)

(4)
$$f(z)=\frac{1}{z-2}\quad (z\in\mathbb{C}\setminus\{2\}).$$

まず $c=2$ の周りの Laurent 展開を求めよう。実は (4) 自身が f の $A(2;0,+\infty)$ での Laurent 展開である。

(実際、$a_{-1}=1$, $a_n=0$ $(n\in\mathbb{Z}\setminus\{-1\})$ とおくと、$\displaystyle\frac{1}{z-2}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-c)^n$.)

例 24.4 (簡単な有理関数の例でゆっくりと説明)

(4)
$$f(z) = \frac{1}{z-2} \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \{2\}).$$

まず $c = 2$ の周りの Laurent 展開を求めよう。実は (4) 自身が f の $A(2; 0, +\infty)$ での Laurent 展開である。

(実際、$a_{-1} = 1$, $a_n = 0$ $(n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\})$ とおくと、$\dfrac{1}{z-2} = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-c)^n$.)

$c = 0$ の周りの Laurent 展開は？

例 24.4 (簡単な有理関数の例でゆっくりと説明)

(4) $$f(z)=\frac{1}{z-2}\quad (z\in\mathbb{C}\setminus\{2\}).$$

まず $c=2$ の周りの Laurent 展開を求めよう。実は (4) 自身が f の $A(2;0,+\infty)$ での Laurent 展開である。

(実際、$a_{-1}=1$, $a_n=0$ $(n\in\mathbb{Z}\setminus\{-1\})$ とおくと、$\dfrac{1}{z-2}=\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-c)^n$.)

$c=0$ の周りの Laurent 展開は？f は $D(0;2)$ で正則であるから、そこで冪級数展開出来る。実際

$$f(z)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}\quad (収束 \Leftrightarrow |z|<2)).$$

もちろん (範囲を狭めても当然成り立つので)

(5) $$f(z)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}\quad (0<|z|<2,\ \text{i.e. } z\in A(0;0,2)).$$

例 24.4 (つづき)

(スライドをめくったので、もう一度表示)

(5) $$f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} \quad (0 < |z| < 2, \text{ i.e. } z \in A(0;0,2)).$$

これが $A(0;0,2)$ における (あるいは 0 の周りの) f の Laurent 展開である。

(実際、$a_n = -\dfrac{1}{2^{n+1}}$ $(n \geq 0)$, $a_n = 0$ $(n < 0)$ とおくと $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{z^n}$.)

一方、f は $2 < |z| < +\infty$ つまり $A(0;2,+\infty)$ でも正則であるから、そこで Laurent 展開出来るはずである。実際 (やはり等比級数の和の公式を用いて)

(6) $$f(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{z}} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{z^n}$$
$$(2 < |z| < +\infty \text{ i.e. } z \in A(0;2,+\infty)). \quad \square$$

(5) と (6) を見て違いを理解しよう。

注意 (続き)

2. 係数の公式 (2)
$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-c|=r}\frac{f(z)}{(z-c)^{n+1}}\,dz$$
は、$D(c;R)$ で正則な関数の Taylor 展開の係数の式と同じ形である (Taylor 展開のときは n の範囲が $n\geq 0$, Laurent 展開のときは n の範囲がすべての整数)。1 つ覚えれば両方で使えるのでおトク、というわけでもないが覚えよう。

この式を使って (線積分を具体的に計算することによって) a_n を求めることは稀である。

むしろ後で $n=-1$ の場合の
$$a_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-c|=r}f(z)\,dz$$
を利用して積分を計算する、と逆方向に利用することが多い。

係数の一意性の証明に使えることが大事なのかもしれない。

注意 (続き)

3. (1) を $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-c)^n$ と書く (1 つの $\sum$ で済ませる) こともあるが、あくまで
$$\lim_{N_1,N_2\to+\infty}\sum_{n=-N_1}^{N_2} a_n(z-c)^n$$
という意味である。Fourier 級数の場合の
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}=\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}$$
とは異なる。その意味では $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-c)^n}$ と分けて書く方が誤解が生じにくい。

4. 負の番号の項からなる級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-c)^n}$ について、次のどれか 1 つ (だけ) が成立する。
   (i) 任意の $z \in \mathbb{C} \setminus \{c\}$ に対して収束する。
   (ii) ある $R \in (0, +\infty)$ が存在して、$|z-c| > R$ ならば収束、$|z-c| < R$ ならば発散する。
   (iii) 任意の $z \in \mathbb{C} \setminus \{c\}$ に対して発散する。

   (i) のとき $R = 0$, (iii) のとき $R = +\infty$ とすると、いずれの時も

$$|z-c| > R \text{ ならば収束、} |z-c| < R \text{ ならば発散する}$$

   とまとめられる。

   冪級数と比べてみよう。

   おおざっぱに言うと、冪級数のときとは、不等号の向きが反対、である。

4. (つづき) さらに

$$(\forall r > R) \quad \overline{A}(c; r, +\infty) = \{z \in \mathbb{R} \mid |z-c| \ge r\} \text{ で一様絶対収束}$$

が成り立つ。実際 $\zeta := \dfrac{1}{z-c}$ とおくと

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-c)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \zeta^n.$$

右辺は ζ についての冪級数であるから、$0 \le \rho \le +\infty$ を満たすある ρ が存在して

> $|\zeta| < \rho$ ならば収束、$|\zeta| > \rho$ ならば発散、$0 < r < \rho$ を満たす任意の r に対して $\overline{D}(0; r) = \{\zeta \in \mathbb{C} \mid |\zeta| \le r\}$ で一様に絶対収束する。

ゆえに

> $|z-c| > \dfrac{1}{\rho}$ ならば収束、$|z-c| < \dfrac{1}{\rho}$ ならば発散、$\dfrac{1}{\rho} < r < +\infty$ を満たす任意の r に対して $|z-c| \ge r$ の範囲で一様に絶対収束する。

ゆえに $R := \frac{1}{\rho}$ とおけば良い。 □

実は Laurent 展開は項別微分もできる。

例 24.5

$$g(z) := \frac{1}{(z-2)^2}$$

の 0 の周りの Laurent 展開は？ $g(z) = -f'(z)$ (例 24.4 $f(z) = \dfrac{1}{z-2}$) であるから、f の Laurent 展開を項別に微分して -1 をかければよい。すなわち

$$g(z) = -f'(z) = -\left(-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nz^{n-1}}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)z^n}{2^{n+2}}$$

$$(z \in A(0;0,2)).$$

(要チェック) 同様にして、任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して、$\dfrac{1}{(z-2)^m}$ の Laurent 展開も求められる。 □

定理 24.2 の証明　(係数の一意性) 最初に係数についての等式 (2) を証明する。

定理 24.2 の証明　(係数の一意性) 最初に係数についての等式 (2) を証明する。

m を任意の整数とする。(1) $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-c)^n$ の両辺を $(z-c)^{m+1}$ で割って

(7)
$$\frac{f(z)}{(z-c)^{m+1}}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-c)^{n-m-1}\quad(z\in A(c;R_1,R_2)).$$

定理 24.2 の証明　(係数の一意性) 最初に係数についての等式 (2) を証明する。

m を任意の整数とする。(1) $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-c)^n$ の両辺を $(z-c)^{m+1}$ で割って

$$(7) \qquad \frac{f(z)}{(z-c)^{m+1}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-c)^{n-m-1} \quad (z \in A(c; R_1, R_2)).$$

$R_1 < r < R_2$ を満たす任意の r に対して、円周 $|z-c| = r$ 上で Laurent 級数が一様収束するので、有界な $\frac{1}{(z-c)^{m+1}}$ をかけた (7) も一様収束する。ゆえに、項別積分が可能であり

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-c|=r} \frac{f(z)}{(z-c)^{m+1}}\,dz &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-c|=r} a_n(z-c)^{n-m-1}\,dz \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\delta_{nm} = a_m.\end{aligned}$$

これから、(2) が成立することと、その積分の値が r に依らないこと、さらに (1) を満たす $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ が一意的である (存在すればただ一つしかない) ことが分かる。

10.1 Laurent 展開

(存在) 以下、(1) を満たす $\{a_n\}$ が存在することを示す。

10.1 Laurent 展開

(存在) 以下、(1) を満たす $\{a_n\}$ が存在することを示す。

r_1, r_2 を $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$ を満たす任意の数とする。$D := A(c; r_1, r_2)$ とおくと、f が $\overline{D}$ を含む開集合 $A(c; R_1, R_2)$ で正則であるからことから、

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \quad (z \in A(c; r_1, r_2))$$

が導かれる (Cauchy の積分公式)。

(存在) 以下、(1) を満たす $\{a_n\}$ が存在することを示す。

r_1, r_2 を $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$ を満たす任意の数とする。$D := A(c; r_1, r_2)$ とおくと、f が $\overline{D}$ を含む開集合 $A(c; R_1, R_2)$ で正則であるからことから、

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \quad (z \in A(c; r_1, r_2))$$

が導かれる (Cauchy の積分公式)。

ゆえに

$$I := \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - c| = r_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, \quad J := -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - c| = r_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

とおくと

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = I + J.$$

10.1 Laurent 展開

(存在) 以下、(1) を満たす $\{a_n\}$ が存在することを示す。

　r_1, r_2 を $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$ を満たす任意の数とする。$D := A(c; r_1, r_2)$ とおくと、f が $\overline{D}$ を含む開集合 $A(c; R_1, R_2)$ で正則であるからことから、

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta \quad (z \in A(c; r_1, r_2))$$

が導かれる (Cauchy の積分公式)。

　ゆえに

$$I := \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta - c| = r_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta, \quad J := -\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta - c| = r_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta$$

とおくと

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = I + J.$$

　I は円盤における正則関数の Taylor 展開と (まったく) 同じ議論で、

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - c)^n, \quad a_n := \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta - c| = r_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\,d\zeta.$$

この級数は $|z - c| < r_2$ で収束する。

10.1 Laurent 展開

J については、$|\zeta - c| = r_1$ のとき $\left|\dfrac{\zeta - c}{z - c}\right| = \dfrac{r_1}{|z - c|} < 1$ であるから (等比級数の和の公式より)

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - c) - (z - c)} = \frac{-1}{z - c} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\zeta - c}{z - c}} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\zeta - c)^{n-1}}{(z - c)^n}$$

が成り立ち

$$J = +\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - c| = r_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\zeta - c)^{n-1}}{(z - c)^n} f(\zeta) d\zeta. \tag{8}$$

J については、$|\zeta - c| = r_1$ のとき $\left|\dfrac{\zeta - c}{z - c}\right| = \dfrac{r_1}{|z - c|} < 1$ であるから (等比級数の和の公式より)

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - c) - (z - c)} = \frac{-1}{z - c} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\zeta - c}{z - c}} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\zeta - c)^{n-1}}{(z - c)^n}$$

が成り立ち

$$J = +\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - c| = r_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\zeta - c)^{n-1}}{(z - c)^n} f(\zeta) d\zeta. \tag{8}$$

Weierstrass の最大値定理によって、$M := \max_{|\zeta - c| = r_1} |f(\zeta)|$ が存在し、$|\zeta - c| = r_1$ ならば

$$\left|\frac{(\zeta - c)^{n-1}}{(z - c)^n} f(\zeta)\right| \le \frac{M}{r_1}\left(\frac{r_1}{|z - c|}\right)^n, \quad \left|\frac{r_1}{|z - c|}\right| < 1$$

が成り立つので、Weierstrass M-test が適用できて、(8) の右辺に現れる級数は、円周 $|\zeta - c| = r_1$ 上で一様収束する。

ゆえに項別積分が可能で

$$J = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{|\zeta-c|=r_1}\frac{(\zeta-c)^{n-1}}{(z-c)^n}f(\zeta)\,d\zeta$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-c|=r_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-c)^{-n+1}}\,d\zeta\frac{1}{(z-c)^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-c)^n}.$$

この級数は $|z-c|>r_1$ で収束する。

ゆえに項別積分が可能で

$$J = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{|\zeta-c|=r_1}\frac{(\zeta-c)^{n-1}}{(z-c)^n}f(\zeta)\,d\zeta$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-c|=r_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-c)^{-n+1}}\,d\zeta\frac{1}{(z-c)^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-c)^n}.$$

この級数は $|z-c| > r_1$ で収束する。

まとめると

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-c)^n} \quad (r_1 < |z-c| < r_2).$$

r_1, r_2 $(R_1 < r_1 < r_2 < R_2)$ が任意であることから、この級数は $A(c; R_1, R_2)$ で収束する。 □

注意: r_1, r_2 を決めてから a_n を持ち出したが、実は a_n は r_1, r_2 に依らないので、$r_1 \to R_1$, $r_2 \to R_2$ とできる。

補足: 定理の展開可能性の証明の骨格部分

(要点を 1 枚にまとめてみた。)

$R_1 < r_1 < r_2 < R_2$ となる r_1, r_2 を取って、円環領域 $D' = A(c; r_1, r_2)$ で考える。$r_1 < |z-c| < r_2$ を満たす z に対して、Cauchy の積分公式から

$$(\sharp) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-c|=r_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-c|=r_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta.$$

$|\zeta - c| = r_2$ のとき、$\left|\frac{z-c}{\zeta-c}\right| = \frac{|z-c|}{r_2} = (\zeta$ によらない定数$) < 1$ であるから

$$(\heartsuit) \quad \frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta-c)-(z-c)} = \frac{1}{\zeta - c}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-c}{\zeta-c}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-c)^n}{(\zeta-c)^{n+1}}$$

$|\zeta - c| = r_1$ のとき、$\left|\frac{\zeta-c}{z-c}\right| = \frac{r_1}{|z-c|} = (\zeta$ によらない定数$) < 1$ であるから

$$(\spadesuit) \quad \frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta-c)-(z-c)} = -\frac{1}{z - c}\cdot\frac{1}{1-\frac{\zeta-c}{z-c}} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\zeta-c)^n}{(z-c)^{n+1}}$$

$(\heartsuit)$ と $(\spadesuit)$ に $f(\zeta)$ をかけたものは、それぞれの円周上で一様収束する (Weierstrass M-test)。その 2 式を $(\sharp)$ に代入して項別積分する。 □

定義 24.6 (孤立特異点, 除去可能特異点, 極, 真性特異点)

Ω は $\mathbb{C}$ の開集合、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$, $c \in \mathbb{C}$ とする。c が f の**孤立特異点** (an isolated singularity) とは、ある正の数 ε が存在して、f は $A(c;0,\varepsilon)$ で正則であり、$D(c;\varepsilon)$ では正則でないことをいう。

10.2 孤立特異点, 孤立特異点の分類

定義 24.6 (孤立特異点, 除去可能特異点, 極, 真性特異点)

Ω は $\mathbb{C}$ の開集合、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$, $c \in \mathbb{C}$ とする。c が f の**孤立特異点** (an isolated singularity) とは、ある正の数 ε が存在して、f は $A(c;0,\varepsilon)$ で正則であり、$D(c;\varepsilon)$ では正則でないことをいう。

このとき、ある $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ が一意的に存在して

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-c)^n} \quad (z \in A(c;0,\varepsilon)) \tag{9}$$

が成り立つ (定理 24.2)。

a_{-1} を f の c における**留数** (residue) と呼び、$\mathrm{Res}(f;c)$ で表す。

展開結果 (9) を用いて孤立特異点を 3 つに分類する。

定義 24.6 (孤立特異点, 除去可能特異点, 極, 真性特異点)

Ω は $\mathbb{C}$ の開集合、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$, $c \in \mathbb{C}$ とする。c が f の**孤立特異点** (an isolated singularity) とは、ある正の数 ε が存在して、f は $A(c;0,\varepsilon)$ で正則であり、$D(c;\varepsilon)$ では正則でないことをいう。

このとき、ある $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ が一意的に存在して

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-c)^n} \quad (z \in A(c;0,\varepsilon)) \tag{9}$$

が成り立つ (定理 24.2)。

a_{-1} を f の c における**留数** (residue) と呼び、$\operatorname{Res}(f;c)$ で表す。

展開結果 (9) を用いて孤立特異点を 3 つに分類する。

(i) c が f の**除去可能特異点** (removable singularity) であるとは

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad a_{-n} = 0 \quad (\text{つまり } f \text{ の Laurent 展開の主部が } 0)$$

が成り立つことをいう。

定義 24.6 (つづき)

(ii) c が f の**極** (pole) であるとは、

$$(\exists k \in \mathbb{N})\,(a_{-k} \neq 0 \wedge (\forall n \in \mathbb{N} : n > k) \quad a_{-n} = 0)$$

$$\text{つまり}\ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n + \sum_{n=1}^{k} \frac{a_{-n}}{(z-c)^n}, \quad a_{-k} \neq 0.$$

i.e. f の Laurent 展開の主部に 0 でない項が有限個だけ存在する

が成り立つことをいう。またこのとき、k を f の極 c の**位数** (order) と呼び、c は f の k **位の極**であるという。

定義 24.6 (つづき)

(ii) c が f の**極** (pole) であるとは、

$$(\exists k \in \mathbb{N})\left(a_{-k} \neq 0 \wedge (\forall n \in \mathbb{N} : n > k) \quad a_{-n} = 0\right)$$

$$\text{つまり}\ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n + \sum_{n=1}^{k} \frac{a_{-n}}{(z-c)^n}, \quad a_{-k} \neq 0.$$

i.e. f の Laurent 展開の主部に 0 でない項が有限個だけ存在する

が成り立つことをいう。またこのとき、k を f の極 c の**位数** (order) と呼び、c は f の k **位の極**であるという。

(iii) c が f の**真性特異点** (essential singularity) であるとは

$$(\forall k \in \mathbb{N})(\exists n \in \mathbb{N} : n > k) \quad a_{-n} \neq 0$$

i.e. f の Laurent 展開の主部に 0 でない項が無限個ある

が成り立つことをいう。

注意 24.7

注意 24.7

1. この孤立特異点の定義は、教科書 (神保 [2]) の定義とは異なる。[2] では、「ある正の数 ε が存在して、f が $A(c;0,\varepsilon)$ で正則であること」となっていて、f が $D(c;\varepsilon)$ で正則である (つまり悪い点でない, 特異性がない) 場合を除外していない。(我々は c が "悪い" 点でないときは孤立特異点とは言わない。こちらの方が多数派である。)

注意 24.7

1. この孤立特異点の定義は、教科書 (神保 [2]) の定義とは異なる。[2] では、「ある正の数 ε が存在して、f が $A(c;0,\varepsilon)$ で正則であること」となっていて、f が $D(c;\varepsilon)$ で正則である (つまり悪い点でない, 特異性がない) 場合を除外していない。(我々は c が "悪い" 点でないときは孤立特異点とは言わない。こちらの方が多数派である。)
2. (なぜ「除去可能特異点」と呼ぶか) (i) の場合、任意の $z \in D(c;\varepsilon)$ に対して

$$\widetilde{f}(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$$

は収束するので、$\widetilde{f}$ は (c を含んだ) $D(c;\varepsilon)$ で正則で、

$$f(z) = \widetilde{f}(z) \quad (z \in A(c;0,\varepsilon)), \quad \widetilde{f}(z) = \begin{cases} f(z) & (z \in A(c;0,\varepsilon)) \\ a_0 & (z = c). \end{cases}$$

つまり、$z = c$ で f の値を a_0 であるように定義を修正した $\widetilde{f}$ は、$D(c;\varepsilon)$ で正則である。「除去可能」という言葉のニュアンスが分かる。なお、$a_0 = \lim_{\substack{z\to c \\ z\neq c}} f(z)$ であることに注意する。

注意 24.8 (つづき)

3. (なぜ「極」と呼ぶか) (ii) の場合 $\lim_{\substack{z \to c \\ z \neq c}} f(z) = \infty$ が成り立つから。

注意 24.8 (つづき)

3. (なぜ「極」と呼ぶか) (ii) の場合 $\displaystyle\lim_{\substack{z\to c\\ z\neq c}} f(z)=\infty$ が成り立つから。

   実は、c を f の孤立特異点とするとき、

   a. c が f の除去可能特異点 $\Leftrightarrow$ 極限 $\displaystyle\lim_{z\to c} f(z)$ が存在する。
   b. c が f の極 $\Leftrightarrow$ $\displaystyle\lim_{z\to c} f(z)=\infty$.
   c. c が f の真性特異点 $\Leftrightarrow$ $\displaystyle\lim_{z\to c} f(z)$ は確定しない (発散かつ $\neq\infty$)。

   が成り立つ ($\Rightarrow$ だけでなく、逆向き $\Leftarrow$ も言えることが重要である)。

注意 24.8 (つづき)

3. (なぜ「極」と呼ぶか) (ii) の場合 $\lim_{\substack{z\to c\\ z\neq c}} f(z)=\infty$ が成り立つから。

   実は、c を f の孤立特異点とするとき、

   a. c が f の除去可能特異点 $\Leftrightarrow$ 極限 $\lim_{z\to c} f(z)$ が存在する。
   b. c が f の極 $\Leftrightarrow \lim_{z\to c} f(z)=\infty$.
   c. c が f の真性特異点 $\Leftrightarrow \lim_{z\to c} f(z)$ は確定しない (発散かつ $\neq\infty$)。

   が成り立つ ($\Rightarrow$ だけでなく、逆向き $\Leftarrow$ も言えることが重要である)。

   (a), (b) の $\Rightarrow$ の証明は簡単である。実際、

   - 収束冪級数は正則、特に連続なので $\lim_{z\to c}\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n=a_0$
   - $\sum_{n=1}^{k}\frac{a_{-n}}{(z-c)^n}\sim\frac{a_{-k}}{(z-c)^k}\to\infty\ (z\to c).$

注意 24.9 (つづき)

3. (続き) (c) の $\Rightarrow$ の証明には準備 (例えば Riemann の除去可能特異点定理) が必要である (それはこの科目の最後の頃の講義で説明する)。それが出来れば、(a), (b), (c) の $\Leftarrow$ は一斉に証明できる。

注意 24.9 (つづき)

3. (続き) (c) の $\Rightarrow$ の証明には準備 (例えば Riemann の除去可能特異点定理) が必要である (それはこの科目の最後の頃の講義で説明する)。それが出来れば、(a), (b), (c) の $\Leftarrow$ は一斉に証明できる。
4. 真性特異点という言葉は、孤立特異点でない場合にも使われる。ここの条件が成り立つ場合は「孤立真性特異点とは」と呼ぶ方が紛れがないかもしれない。 □

10.2 孤立特異点, 孤立特異点の分類

注意 24.9 (つづき)

3. (続き) (c) の $\Rightarrow$ の証明には準備 (例えば Riemann の除去可能特異点定理) が必要である (それはこの科目の最後の頃の講義で説明する)。それが出来れば、(a), (b), (c) の $\Leftarrow$ は一斉に証明できる。
4. 真性特異点という言葉は、孤立特異点でない場合にも使われる。ここの条件が成り立つ場合は「孤立真性特異点とは」と呼ぶ方が紛れがないかもしれない。 □

以下、例を紹介するが、まずは、

- 実際に孤立特異点の周りで Laurent 展開してみて、それでどの特異点であるかを判定する例から始める。

それから

- Laurent 展開することををサボるやり方を考える。

参考文献

[1] 桂田祐史：複素関数論ノート, 現象数理学科での講義科目「複素関数」の講義ノート. https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2022/complex2022.pdf (2014〜).

[2] 神保(じんぼう)道夫：複素関数入門, 現代数学への入門, 岩波書店 (2003), 丸善 eBook では https://elib.maruzen.co.jp/elib/html/BookDetail/Id/3000006063 でアクセスできる.