複素関数・同演習 第23回
～正則関数の性質 (前半)～

桂田 祐史（かつらだ まさし）
https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2022/

2022年12月14日

目次

本日の内容・連絡事項

- 前回「任意の正則関数は冪級数展開できる」ことが証明できた。それを用いて色々な正則関数の性質が証明できる。急ぐべきものを 2 つ説明する (それで「正則関数の性質 (前半)」としてある)。
  - 正則関数の零点とその位数
    (証明の仕方は違うが、多項式の根の重複度と似ているので、覚えやすいはず。この後の「孤立特異点」の議論に必須。)
  - 一致の定理
    (証明は背理法を使っていて、ちょっと分かりにくいかも。事実自体の理解が重要と考えて下さい。そのため適用例に集中する、というのもありか。)

(2022/12/19 加筆) うっかりして § の番号をダブらせてしまいました。以下の「正則関数の性質」は授業当日は §8 としていましたが、§9 に訂正させてもらいます。

定義 23.1 (正則関数の零点とその位数)

Ω は $\mathbb{C}$ の開集合、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は正則、$c \in \Omega$ とする。

1. c が f の**零点** (zero) であるとは、$f(c) = 0$ が成り立つことをいう。
2. c が f の零点であるとき、
$$f(c) = f'(c) = \cdots = f^{(k-1)}(c) = 0 \wedge f^{(k)}(c) \neq 0$$
を満たす $k \in \mathbb{N}$ を f の零点 c の**位数** (order) と呼ぶ。

(f が恒等的に 0 であれば条件を満たす k は存在しないが、f が恒等的に 0 でなければ上の条件を満たす k が存在することを証明できる。)

命題 23.2 (k 位の零点であるための条件)

Ω は $\mathbb{C}$ の開集合、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は正則、$c \in \Omega$, $k \in \mathbb{N}$ とするとき、次の (i), (ii) は同値である。

(i) c は f の k 位の零点である。

(ii) c を含む開集合 U ($\subset \Omega$) と、U で正則な関数 g が存在して、$f(z) = (z-c)^k g(z)$ ($z \in U$) かつ $g(c) \neq 0$.

9.1 正則関数の零点とその位数

注意 23.3 (多項式の根について復習)

多項式 $f(z)$, $c\in\mathbb{C}$, $k\in\mathbb{N}$ について、以下の 2 条件は互いに同値である。

1. $f(c)=f'(c)=\cdots=f^{(k-1)}(c)=0$ かつ $f^{(k)}(c)\neq 0$.
2. c は $f(z)$ の根で、重複度は k (k 重根 — 単根のとき 1 重根という として). すなわち $(\exists g(z)\in\mathbb{C}[z])\ f(z)=(z-c)^k g(z)$, $g(c)\neq 0$.

証明には、多項式の割り算 ($a(z)=q(z)b(z)+r(z)$, $\deg r(z)<\deg b(z)$ なんとか…) から導かれる因数定理が使われた。

命題 23.2 はこの一般化と言える (証明の方法は — 割り算が出来るわけではないので — 異なる)。 □

例 23.4 (簡単な関数の零点の位数)

1. $f(z) = z^2 + 2z + 1$. $f(z) = (z+1)^2$ であるから、f の零点は -1 のみ。$f'(z) = 2z + 2$ なので $f'(-1) = 0$. $f''(z) = 2$ なので $f''(-1) \neq 0$. -1 の位数は 2.
2. $f(z) = \sin z$ のとき、$f(z) = 0 \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z})\ z = k\pi$. ゆえに f の零点は $k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. 位数は全て 1 である。実際、
$$f(k\pi) = \sin k\pi = 0, \quad f'(k\pi) = \cos k\pi = (-1)^k \neq 0.$$
3. $f(z) = \cos z - 1$ のとき、$f(z) = 0 \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) z = 2k\pi$.
$k \in \mathbb{Z}$ とするとき
$$f(2k\pi) = 1 - 1 = 0,$$
$$f'(2k\pi) = -\sin 2k\pi = 0, \quad f''(2k\pi) = -\cos(2k\pi) = -1 \neq 0$$
であるから $2k\pi$ は 2 位の零点である。

9.1 正則関数の零点とその位数

では、命題 23.2 を証明しよう。多項式でないから割り算に基づく因数定理の証明はできない。それをどう克服するかに注目してほしい ((i)⇒(ii) で冪級数展開を用いる)。

命題 23.2 の証明.

(i) ⇒ (ii)　Ω は開集合であるから、ある $R>0$ が存在して、$\overline{D(c;R)}\subset\Omega$. 正則関数の冪級数展開可能性から

$$(\exists\{a_n\}_{n\ge 0})\quad f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n\quad(|z-c|<R).$$

このとき $a_n=f^{(n)}(c)/n!$ であるから、$a_0=a_1=\cdots=a_{k-1}=0$, $a_k\ne 0$. ゆえに

$$\begin{aligned}f(z)&=\sum_{n=k}^{\infty}a_n(z-c)^n=(z-c)^k\sum_{n=k}^{\infty}a_n(z-c)^{n-k}\\&=(z-c)^k\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+k}(z-c)^n\quad(|z-c|<R).\end{aligned}$$

$g(z):=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+k}(z-c)^n$ とおくと、g は $D(c;R)$ で正則であり、$g(c)=a_k\ne 0$. □

命題 23.2 の証明 (つづき).

(ii) ⇒ (i)　(これは多項式と同じ証明が出来る) $h(z) := (z-c)^k$ とおくと、$f(z) = h(z)g(z)$ であるから

$$f^{(m)}(z) = \sum_{r=0}^{m} \binom{m}{r} h^{(r)}(z) g^{(m-r)}(z).$$

$r \le k-1$ ならば $h^{(r)}(c) = 0$, $h^{(k)}(c) = k!$ であることに注意しよう。

$0 \le m \le k-1$ の場合は、$h^{(r)}(c) = 0$ $(0 \le r \le m)$ であるから

$$f^{(m)}(c) = \sum_{r=0}^{m} 0 = 0.$$

一方、$m = k$ の場合は

$$f^{(k)}(c) = \binom{k}{k} h^{(k)}(c) g^{(0)}(c) = 1 \cdot k! g(c) \neq 0.$$

ゆえに c は f の k 位の零点である。 □

つらだまさし

定理 23.5 (一致の定理 (the identity theorem), 一意接続の定理)

D は $\mathbb{C}$ の領域 (弧連結な開集合)、$f\colon D\to\mathbb{C}$ と $g\colon D\to\mathbb{C}$ は正則、$c\in D$, 複素数列 $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は二条件

(i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} z_n = c$

(ii) $\forall n\in\mathbb{N}$ に対して $z_n\in D$ かつ $z_n\neq c$ かつ $f(z_n)=g(z_n)$

を満たすとするとき、D 全体で $f=g$.

要するに、ある程度たくさんのところで $f=g$ ならば、全体で $f=g$ となる、ということである。

ただし、単に無限個の点 z_n で $f=g$ であるからといって、全体で $f=g$ とは限らない。例えば

$$f(z)=\sin z,\quad g(z)=0,\quad z_n=n\pi$$

とすると、

$$f(z_n)=0=g(z_n)$$

であるが、もちろん $f\neq g$.

9.2 一致の定理

z_n は関数 $F(z) := f(z) - g(z)$ の零点であるので、零点の話と関係する訳である。

一致の定理は上の形で提示されるのが普通だが、次の形で使うことが多い。

- D 内の線分や正則曲線の上で $f = g$ が成り立つならば、$f = g$ が成り立つ。
  (定数曲線 (像は 1 点) というのもあるので「正則曲線」としてある。)
- D 内の空でない開集合内で $f = g$ が成り立つならば、$f = g$ が成り立つ。

この定理を証明する前に、系を 1 つ、定理を使った例を 2 つ見てみよう。

9.2 一致の定理

正則関数の零点に関して、次の事実は重要である。

系 23.6 (定数でない正則関数の零点は孤立している (集積しない))

$\mathbb{C}$ の領域 D における正則関数は定数関数に等しくない限り、その零点は互いに孤立している。すなわち c が定数でない正則関数 $f\colon D \to \mathbb{C}$ の零点ならば、

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall z \in D \cap D(c;\varepsilon) \setminus \{c\}) \quad f(z) \neq 0.$$

(十分小さな正数 ε を取ると、c から距離 ε 未満の範囲では、c 以外に f の零点はない。)

証明.

背理法を用いる。結論を否定すると、

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists z \in D \cap D(c;\varepsilon) \setminus \{c\}) \quad f(z) = 0.$$

各 $n \in \mathbb{N}$ に対して ($\varepsilon = 1/n$ として)、$0 < |z_n - c| < \dfrac{1}{n}$, $f(z_n) = 0$ を満たす $z_n \in D$ が取れる。一致の定理から $f = 0$ in D が導かれる。これは矛盾である。 □

9.2 一致の定理

一致の定理から、$f\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $g\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ が正則で

$$(\forall x\in\mathbb{R})\quad f(x)=g(x)$$

を満たすならば、次式が成り立つ。

$$(\forall z\in\mathbb{C})\quad f(z)=g(z).$$

例 23.7 (実関数を正則に拡張する仕方は 1 つしかない)

この講義では、初等関数を、微積分で得られた Taylor 展開を用いて正則関数に拡張した。例えば

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}\quad (x\in\mathbb{R})$$

から

(☆) $$\cos z:=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n}\quad (z\in\mathbb{C}).$$

上で述べたことから、正則な $f\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ で、$f(x)=\cos x$ $(x\in\mathbb{R})$ を満たすものは、存在するならば一意である ($\cos z$ に等しくないといけない)。言い換えると、$\cos x$ の拡張に、正則性を要求する限り、(☆) とする以外の選択肢はない。 □

9.2 一致の定理

例 23.8 (関数関係不変の原理 (英語では？) の例として指数法則)

例えば実指数関数の指数法則

(1) $$e^{x+y} = e^x e^y \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

が成り立つことは既知として、複素指数関数の指数法則

$$e^{z+w} = e^z e^w \quad (z, w \in \mathbb{C})$$

が成り立つことを示そう。(同様にして三角関数の加法定理など示せる。)

実指数関数と複素指数関数を混同すると分かりにくくなるので、しばらく複素指数関数 e^z は $E(z)$, 実指数関数は e^x と書き分ける。E は e^x の拡張である。つまり

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad E(x) = e^x$$

が成り立つことを認めて議論する [a]。

任意の $y \in \mathbb{R}$ を固定して、関数 $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ を

$$f(z) := E(z+y) - E(z)E(y) \quad (z \in \mathbb{C})$$

で定める。関数 E は正則であるから、f は $\mathbb{C}$ で正則である。

例 23.8 (つづき)

また、$z = x \in \mathbb{R}$ のとき、(1) より

$$f(z) = f(x) = E(x+y) - E(x)E(y) = e^{x+y} - e^x e^y = e^x e^y - e^x e^y = 0.$$

ゆえに一致の定理により $(\forall z \in \mathbb{C})\ f(z) = 0$. すなわち

(2) $$(\forall y \in \mathbb{R})(\forall z \in \mathbb{C}) \quad E(z+y) - E(z)E(y) = 0.$$

次に任意の $z \in \mathbb{C}$ を固定して、関数 $g \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ を

$$g(w) := E(z+w) - E(z)E(w) \quad (w \in \mathbb{C})$$

で定める。この g は $\mathbb{C}$ で正則である。また、$w = y \in \mathbb{R}$ のとき、(2) より

$$g(w) = g(y) = E(z+y) - E(z)E(y) = 0.$$

ゆえに一致の定理により $(\forall w \in \mathbb{C})\ g(w) = 0$. すなわち

$$(\forall z \in \mathbb{C})(\forall w \in \mathbb{C}) \quad E(z+w) - E(z)E(w) = 0.$$

9.2 一致の定理

さて、定理 23.5 の証明であるが、結構長い。2 つの Step に分けられる。

Step 1 は、c の周りで冪級数展開して、その収束円の内部で $f = g$ が成り立つこと。

Step 2 は、いわゆる連結性の議論を行う。授業では Step 2 の説明は省略するかもしれない。

定理 23.5 の証明

$f-g$ を新たに f と置いて考えることで、$g=0$ の場合に証明すれば良いことが分かる。

Step 1. D は開集合であるから、$(\exists\varepsilon>0)$ $\overline{D(c;\varepsilon)}\subset D$. 正則関数の冪級数展開可能性より、$\{a_n\}_{n\geq 0}$ が存在して、

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n\quad(z\in D(c;\varepsilon)).$$

まずこの円盤 $D(c;\varepsilon)$ で $f=0$ であることを示す。

実は任意の n に対して $a_n=0$ である。実際、もしそうでないと仮定すると、$\exists n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ s.t. $a_n\neq 0$. そのような n のうち、最小のものを k とおくと、

$$a_0=a_1=\cdots=a_{k-1}=0,\quad a_k\neq 0.$$

すると

$$f(z)=\sum_{n=k}^{\infty}a_n(z-c)^n=(z-c)^k\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+k}(z-c)^n\quad(z\in D(c;\varepsilon)).$$

定理 23.5 の証明 (続き)

$g(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k}(z-c)^n$ は $z \in D(c;\varepsilon)$ で収束し、

$$g(z_n) = \frac{f(z_n)}{(z_n-c)^k} = \frac{0}{(z_n-c)^k} = 0.$$

ゆえに

$$a_k = g(c) = \lim_{n\to\infty} g(z_n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0.$$

これは矛盾である。ゆえに任意の n に対して $a_n = 0$. ゆえに $f(z) = 0$ $(z \in D(c;\varepsilon))$.

Step 2.

$$D_0 := \left\{ z \in D \;\middle|\; (\forall n \in \mathbb{Z}_{\ge 0}) f^{(n)}(z) = 0 \right\}, \quad D_1 := \left\{ z \in D \;\middle|\; (\exists n \in \mathbb{Z}_{\ge 0}) f^{(n)}(z) \ne 0 \right\}$$

とおくと (簡単な論理の法則を用いて)

$$D_0 \cup D_1 = D, \quad D_0 \cap D_1 = \emptyset.$$

実は D_0 と D_1 は開集合である (理由は次のスライド)。また $c \in D_0$ であるから $D_0 \ne \emptyset$. 以下に紹介する命題 23.9 より、$D_1 = \emptyset$, $D_0 = D$. ゆえに $f = 0$ in D.

定理 23.5 の証明 (続き)

D_0 は開集合であること 実際、$z_0 \in D_0$ ならば、$(\exists R > 0)$ $(\exists \{a_n\}_{n \geq 0}$: 複素数列$)$ $(\forall z \in D(z_0; R))$ $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$. ところが $z_0 \in D_0$ より、任意の n に対して $a_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = 0$ なので、$f(z) = 0$. ゆえに $D(z_0; R) \subset D_0$. ゆえに D_0 は開集合である。

D_1 は開集合であること $f^{(n)}$ が連続関数であることから、D_1 は開集合であることが分かる。実際、$z_0 \in D_1$ とするとき、$(\exists n \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ $f^{(n)}(z_0) \neq 0$.

- D が開集合であることから、$(\exists \delta_1 > 0)$ $D(z_0; \delta_1) \subset D$.
- $\varepsilon := \left|f^{(n)}(z_0)\right|$ とおくと、$\varepsilon > 0$ であり、$f^{(n)}$ は連続であるから、$(\exists \delta_2 > 0)$ $(\forall z \in D\colon |z - z_0| < \delta_2)$ $\left|f^{(n)}(z) - f^{(n)}(z_0)\right| < \varepsilon$. このとき
$$\left|f^{(n)}(z)\right| = \left|f^{(n)}(z_0) - f^{(n)}(z_0) + f^{(n)}(z)\right| \geq \left|f^{(n)}(z_0)\right| - \left|f^{(n)}(z_0) - f^{(n)}(z)\right| > \varepsilon - \varepsilon = 0.$$
ゆえに $f^{(n)}(z) \neq 0$. 従って $z \in D_1$.

$\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$ とおくと、$\delta > 0$ かつ $D(z; \delta) \subset D_1$. ゆえに D_1 は開集合である。 □

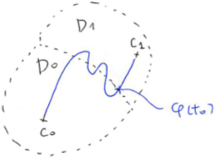
9.2 一致の定理

命題 23.9 (弧連結な開集合は連結)

D は $\mathbb{C}$ の弧連結な開集合、D_0 と D_1 は $\mathbb{C}^n$ の開集合で $D_0 \cup D_1 = D$, $D_0 \cap D_1 = \emptyset$ とすると、D_0 と D_1 のいずれかが空集合である。

命題 23.9 の証明　背理法を用いる。$D_0 \neq \emptyset$ かつ $D_1 \neq \emptyset$ と仮定して矛盾を導く。$c_0 \in D_0$, $c_1 \in D_1$ を取る。

D は弧連結であるから、ある連続な $\varphi\colon [0,1] \to \Omega$ が存在して $\varphi(0) = c_0$, $\varphi(1) = c_1$.



$$I_0 := \{t \in [0,1] \mid \varphi(t) \in D_0\}, \quad I_1 := \{t \in [0,1] \mid \varphi(t) \in D_1\}$$

とおくと

$$I_0 \cup I_1 = [0,1], \quad I_0 \cap I_1 = \emptyset, \quad 0 \in I_0, \quad 1 \in I_1.$$

D_0 と D_1 は開集合、φ は連続であるから、$(\exists \delta_0 > 0)$ $[0, \delta_0] \subset I_0$、また $(\exists \delta_1 > 0)$ $[1 - \delta_1, 1] \subset I_1$.

$t_0 := \sup I_0$ とおくと、$0 < t_0 < 1$. t_0 と $0, 1$ との距離は $d := \min\{t_0, 1 - t_0\} > 0$.

証明 (続き)

$t_0 \in I_0$ の場合、$\varphi(t_0) \in D_0$. D_0 は開集合であるから、

$$\exists \varepsilon_1 \in (0, d) \quad \text{s.t.} \quad (t_0 - \varepsilon_1, t_0 + \varepsilon_1) \subset I_0.$$

すると $t_0 = \sup I_0 \geq t_0 + \varepsilon_1$ となり、矛盾が生じる。

$t_0 \in I_1$ の場合、$\varphi(t_0) \in D_1$. D_1 は開集合であるから、

$$\exists \varepsilon_2 \in (0, d) \quad \text{s.t.} \quad (t_0 - \varepsilon_2, t_0 + \varepsilon_2) \subset I_1.$$

I_1 と共通部分のない I_0 の上限が I_1 の内部にあるのは矛盾である。 □

参考文献