

複素関数・同演習 第 21 回

～Cauchy の積分定理 (3) 星型領域, 積分路の変形～

かつらだ まさし
桂田 祐史

<https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2022/>

2022 年 12 月 7 日

目次 I

- 1 本日の内容・連絡事項
- 2 Cauchy の積分定理 (続き)
 - 単連結領域, 星型領域 (続き)
 - 凸領域, 星型領域
 - 星型領域における Cauchy の積分定理
 - 積分路の変形, 単連結領域における Cauchy の積分定理の証明のあら筋
- 3 参考文献

本日の内容・連絡事項

- Cauchy の積分定理の一般化としては、“穴が開いていない” 領域の話が有名である。そのために星型領域、単連結領域の概念が必要になる。これらの領域 (Ω とする) では、任意の正則関数 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ 、任意の閉曲線 C

($C^* \subset \Omega$) に対して $\int_C f(z) dz = 0$ が成り立つ。

前回は単連結領域を紹介したが、今回は星型領域について解説する。
(講義ノート [1] の §6.3, 6.4, 6.5 … このスライドとは番号がズレてます。)

- 星型領域における Cauchy の積分定理を証明した後、積分路の変形 (重要!) について説明する。それを理解できると単連結領域における Cauchy の積分定理が分かると思われる。
- 宿題 7 の解説をする。
- 宿題 10 を出します (〆切は 12 月 13 日 13:30)。

6.5.2 凸領域, 星型領域

定義 21.1 (凸, 星型)

Ω をベクトル空間 (ここでは \mathbb{R}^n, \mathbb{C} と思えば良い) の部分集合とする。

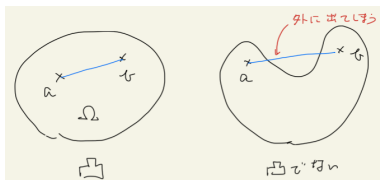
① Ω が**凸 (convex)** とは、

$$(\forall a \in \Omega)(\forall b \in \Omega) \quad [a, b] \subset \Omega.$$

② Ω が**星型 (star-shaped)** とは、

$$(\exists a \in \Omega)(\forall b \in \Omega) \quad [a, b] \subset \Omega.$$

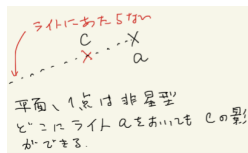
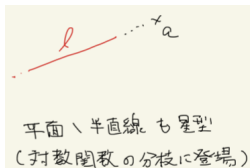
(a にライトをおくと、 Ω 内のどこも照らされる、という説明をされる。)



6.5.2 凸領域, 星型領域

凸領域の例としては、全空間 \mathbb{R}^n , n 次元開球 $B(\mathbf{a}; r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < r\}$ (円盤 $D(c; r)$ もこの範疇), 三角形の内部などがある。

次のスライドで述べるように凸領域は星型であるが、凸領域でない星型領域としては、星の形や、平面から半直線を除いた領域などがある。



6.5.2 凸領域, 星型領域

定理 21.2 (凸 \Rightarrow 星型 \Rightarrow 単連結)

Ω は \mathbb{R}^n または \mathbb{C} の領域で、 $\Omega \neq \emptyset$ とする。

- ① Ω が凸ならば、 Ω は星型である。
- ② Ω が星型ならば、 Ω は単連結である。

証明.

- ① Ω が凸と仮定する。 $\Omega \neq \emptyset$ であるから $a \in \Omega$ が存在する。任意の $b \in \Omega$ に対して、 Ω が凸であることから、 $[a, b] \subset \Omega$. ゆえに Ω は星型である。
- ② Ω が星型と仮定する。ある $a \in \Omega$ が存在して、任意の $b \in \Omega$ に対して $[a, b] \subset \Omega$ である。ゆえに Ω 内の任意の曲線 $C: z = \varphi(t)$ ($t \in [\alpha, \beta]$) に対して、

$$F(t, s) := sa + (1 - s)\varphi(t) \quad (s \in [0, 1], t \in [\alpha, \beta])$$

とおくと、 $F(t, s) \in [a, \varphi(t)] \subset \Omega$. ゆえに $F: [\alpha, \beta] \times [0, 1] \rightarrow \Omega$ である。さらに F は連続で、

$$F(t, 0) = \varphi(t), \quad F(t, 1) = a \quad (t \in [\alpha, \beta]).$$

つまり曲線 C は連続的に定数曲線 a に変形できる。ゆえに Ω は単連結である。

おまけ Mathematica で曲線の連続的変形を見る

単連結性の説明で、曲線の連続的変形を持ち出した。実例を Mathematica を使って見
てみよう。

ターミナルで 20201130.nb を入手

```
curl -O http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex2021/20211130.nb
```

この 20211130.nb では、ハイポサイクロイド

$$x = \varphi(t) = \left((a-b) \cos t + b \cos \frac{(b-a)t}{b}, (a-b) \sin t + b \sin \frac{(b-a)t}{b} \right) \quad (t \in [0, 2\pi])$$

をエピサイクロイド

$$x = \psi(t) = \left((a'+b') \cos t - b' \cos \frac{(a'+b')t}{b'}, (a'+b') \sin t - b' \sin \frac{(a'+b')t}{b'} \right) \quad (t \in [0, 2\pi])$$

に、

$$F(t, s) = (1-s)\varphi(t) + s\psi(t) \quad ((t, s) \in [0, 2\pi] \times [0, 1])$$

というホモトピー写像で変形している (曲線は何でも良く、選択に深い意味はない)。

アニメーション: <http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex2021/homotopy.gif>

6.7 星型領域における Cauchy の積分定理

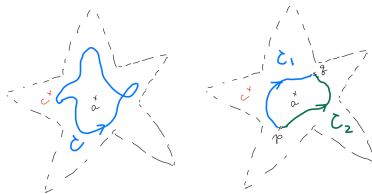
目標は単連結領域における Cauchy の積分定理だけれど、まず星型領域バージョンを証明する。これは単連結領域の場合の証明の基礎にもなる。

定理 21.3 (星型領域における Cauchy の積分定理)

Ω は \mathbb{C} の **星型領域** (例えば円盤領域)、 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ は **正則** (あるいは、ある1点 c を除いた $\Omega \setminus \{c\}$ で正則で、 Ω で連続) とするとき、 f の原始関数が存在する。

ゆえに Ω 内の任意の区分的 C^1 級閉曲線 C に対して $\int_C f(z) dz = 0$.

また任意の $p, q \in \Omega$ に対して、 p, q をそれぞれ始点、終点とする Ω 内の任意の区分的 C^1 級曲線 C_1, C_2 に対して、 $\int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz$ が成り立つ。



6.7 星型領域における Cauchy の積分定理 証明

注意追加 f が微分可能でない点 c の存在を許す場合の証明は後回しにして (系??)、まず f が Ω で正則な場合の証明を行う。

証明 Ω は星型であるから、ある $a \in \Omega$ が存在して、

$$(\forall z \in \Omega) [a, z] \subset \Omega$$

が成り立つ。

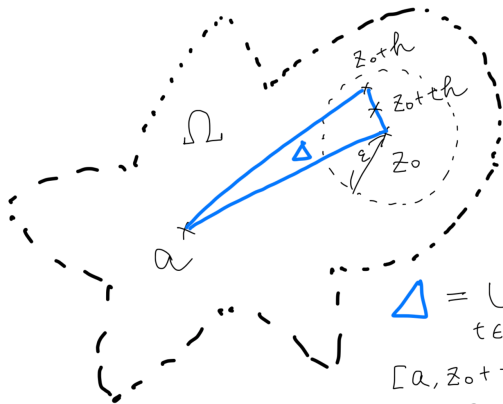
$$F(z) := \int_{[a, z]} f(\zeta) d\zeta \quad (z \in \Omega)$$

とおくと、 $F' = f$ が成り立つ。実際、任意の $z_0 \in \Omega$ に対して、ある $\varepsilon > 0$ が存在して、 $D(z_0; \varepsilon) \subset \Omega$ 。 $0 < |h| < \varepsilon$ を満たす任意の $h \in \mathbb{C}$ に対して、 $z_0 + h \in D(z_0; \varepsilon)$ 。 $a, z_0, z_0 + h \in \Omega$ であるが、この3点を頂点とする三角形 δ は $\Delta \subset \Omega$ を満たす。 ($\because \Delta = \bigcup_{t \in [0, 1]} [a, z_0 + th]$ であるが、 $z_0 + th \in D(z_0; \varepsilon) \subset \Omega$ であるから、 $[a, z_0 + th] \subset \Omega$ 。 …証明の後に図を示す。)

$\partial\Delta = [a, z_0] + [z_0, z_0 + h] + [z_0 + h, a]$ について、三角形版 Cauchy の積分定理 (Goursat-Pringsheim の定理) から $\int_{\partial\Delta} f(\zeta) d\zeta = 0$ 。 すなわち

$$\int_{[a, z_0]} f(\zeta) d\zeta + \int_{[z_0, z_0 + h]} f(\zeta) d\zeta - \int_{[a, z_0 + h]} f(\zeta) d\zeta = 0.$$

6.7 星型領域における Cauchy の積分定理 $\Delta \subset \Omega$



$$\Delta = \bigcup_{t \in [0,1]} [a, z_0 + th]$$

$$[a, z_0 + th] \subset \Omega \text{ for all } t \in [0,1]$$

$$\Delta \subset \Omega$$

6.7 星型領域における Cauchy の積分定理 証明 続き

ゆえに

$$F(z_0 + h) - F(z_0) = \int_{[z_0, z_0+h]} f(\zeta) d\zeta.$$

この後は前回の授業での定理の証明と同様にして $F'(z_0) = f(z_0)$ が示せる。

念のため書いておく:

$$\begin{aligned} \frac{F(z_0 + h) - F(z_0)}{h} - f(z_0) &= \frac{1}{h} \int_{[z_0, z_0+h]} f(\zeta) d\zeta - f(z_0) \cdot \frac{1}{h} \int_{[z_0, z_0+h]} d\zeta \\ &= \frac{1}{h} \int_{[z_0, z_0+h]} (f(\zeta) - f(z_0)) d\zeta. \end{aligned}$$

これから $h \rightarrow 0$ のとき

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(z_0 + h) - F(z_0)}{h} - f(z_0) \right| &\leq \max_{\zeta \in [z_0, z_0+h]} |f(\zeta) - f(z_0)| \frac{1}{|h|} \int_{[z_0, z_0+h]} |d\zeta| \\ &= \max_{\zeta \in [z_0, z_0+h]} |f(\zeta) - f(z_0)| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

これは $F'(z_0) = f(z_0)$ であることを示している。

□

6.7 星型領域における Cauchy の積分定理

例 21.4 ($\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ における $\frac{1}{z}$ の原始関数 — Log)

$\Omega := \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ は星型領域である (任意の $z \in \Omega$ に対して $[1, z] \subset \Omega$)。また $f(z) := \frac{1}{z}$ は Ω で正則である。ゆえに

$$F(z) := \int_{[1,z]} f(\zeta) d\zeta = \int_{[1,z]} \frac{d\zeta}{\zeta}$$

とおくと $F'(z) = f(z) = \frac{1}{z}$.

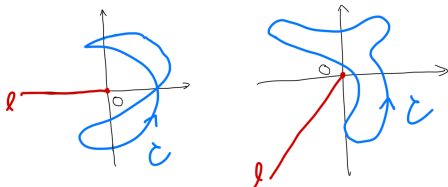
(そうか、この F は $\frac{1}{z}$ の原始関数か…あれ? それは知っていたぞ。)

実は $F(z) = \text{Log } z$ (主値) である。実際 $F'(z) = \frac{1}{z} = (\text{Log } z)'$ であるから、 $(F(z) - \text{Log } z)' = 0$ 。したがって、 $F(z) - \text{Log } z$ は定数関数で、 $z = 1$ で $0 - 0 = 0$ に等しいので、 $F(z) - \text{Log } z = 0$ 。ゆえに

$$(1) \quad \text{Log } z = \int_{[1,z]} \frac{d\zeta}{\zeta} \quad (z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]). \quad \square$$

6.7 星型領域における Cauchy の積分定理

- 同様に原点を始点とする任意の半直線を ℓ とするとき、 $\mathbb{C} \setminus \ell$ において $\frac{1}{z}$ の原始関数が存在し、 $\mathbb{C} \setminus \ell$ 内の任意の区分的 C^1 級閉曲線 C に対して
$$\int_C \frac{dz}{z} = 0.$$



- (フライング) 単連結領域における Cauchy の積分定理 (定理 18.1) を用いると、 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ に含まれる任意の単連結領域 Ω において、 $\frac{1}{z}$ の原始関数が存在し、 Ω 内の任意の区分的 C^1 級閉曲線 C に対して $\int_C \frac{dz}{z} = 0$ が成り立つ。 □

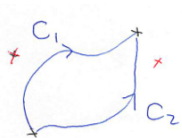
6.8 積分路の変形, 単連結領域における Cauchy の積分定理の証明のあら筋

積分路の変形

f が正則な範囲で曲線 C_1 が曲線 C_2 に変形出来るならば、
$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz.$$

詳しく言うと、次の2つの場合がある。

- Ⓐ 積分路の始点と終点は変えずに (固定して)、被積分関数が正則な範囲で積分路を連続的に変形しても、積分の値は変わらない。
- Ⓑ 積分路が閉曲線の場合は (始点、終点は気にせず)、被積分関数が正則な範囲で積分路を連続的に変形しても、積分の値は変わらない。



⊠ 1:
$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz$$

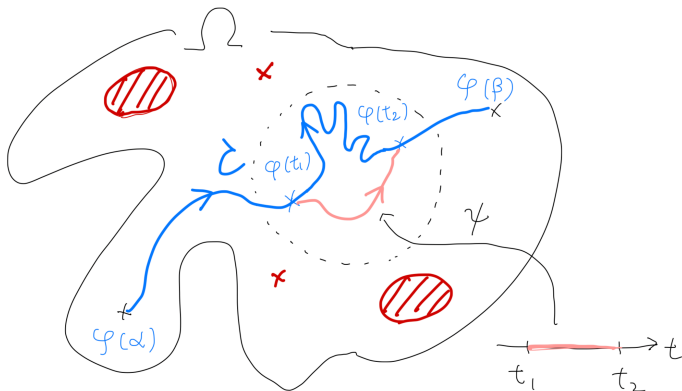


⊠ 2:
$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz$$

6.8 積分路の変形, 単連結領域における Cauchy の積分定理の証明のあら筋

「連続的に変形」を理解して、(b) を認めると、単連結領域における Cauchy の積分定理 (定理 18.1) が得られる。単連結領域では、閉曲線 C は 1 点 (定数曲線 $z = \varphi(t) = c$ ($t \in [\alpha, \beta]$) に連続的に変形できて、定数曲線上の任意の線積分は 0 であるから。詳しい説明 (証明) は、講義ノート [1] の付録 E 節を見よ。

ここでは、次の簡単な事実 (定理にできる) を理解することだけを要求する。(実は、積分路を連続的に変形したときに線積分の値が変わらないことの証明の本質的な部分)。



6.8 積分路の変形, 単連結領域における Cauchy の積分定理の証明のあら筋

赤い点がなければ、積分路は工事可能 正則関数の定義域 Ω に含まれる任意の開円盤の中では (円盤の中に赤い点が一つもなければ)、積分路の工事が出来る。つまり、 $C: z = \varphi(t)$ ($t \in [\alpha, \beta]$) が、

$$D(c; r) \subset \Omega, \quad t_1, t_2 \in [\alpha, \beta], \quad \varphi([t_1, t_2]) \subset D(c; r)$$

を満たすならば、 $\psi(t_1) = \varphi(t_1)$, $\psi(t_2) = \varphi(t_2)$ を満たす任意の区分的 C^1 級の関数 $\psi: [t_1, t_2] \rightarrow D(c; r)$ に対して、

$$\tilde{\varphi}(t) := \begin{cases} \varphi(t) & (t \in [\alpha, t_1] \cup [t_2, \beta]) \\ \psi(t) & (t \in [t_1, t_2]) \end{cases}$$

とおくと、この $\tilde{\varphi}$ の定める曲線 \tilde{C} について

$$\int_C f(z) dz = \int_{\tilde{C}} f(z) dz$$

が成り立つ。

証明.

f の定義域 Ω に含まれる任意の円盤領域 $D(c; r)$ は星型領域であるから、その中では積分路を変形しても積分の値は変わらない (定理 18.8 による)。実際、 $D(c; r)$ における原始関数を F とするとき、 $\varphi|_{[t_1, t_2]}$ の定める曲線 γ 、 ψ の定める曲線 $\tilde{\gamma}$ について

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(\varphi(t_2)) - F(\varphi(t_1)) = F(\psi(t_2)) - F(\psi(t_1)) = \int_{\tilde{\gamma}} f(z) dz$$

が成り立つ。 □

この“工事”を続けることで、 Ω 内での積分路の変形がかなり自由に出来るであろう。

次の例 21.5 について、授業では図を見せながら、さらっと説明した。その後は宿題 7 の解説をした。次回は §7 から講義をする。

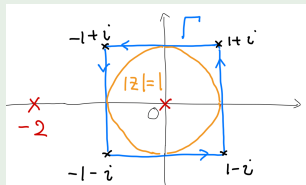
6.8 積分路の変形, 単連結領域における Cauchy の積分定理の証明のあら筋

例 21.5 (ある年度の宿題から)

\mathbb{C} で 4 点 $\pm 1 \pm i$ を頂点とする正方形の周を正の向きに一周する閉曲線を Γ とするとき、

$$(\heartsuit) \quad \int_{\Gamma} \frac{dz}{z(z+2)^2} = \int_{|z|=1} \frac{dz}{z(z+2)^2}.$$

を示せ (この後、円盤における Cauchy の積分公式から、この積分の値が簡単に求まる)。



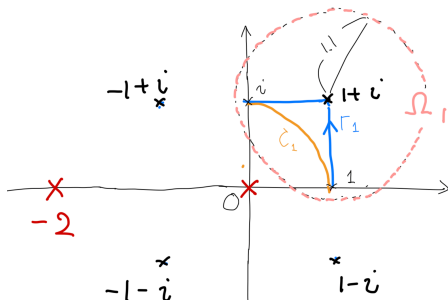
(解答) 大まかに言うと「被積分関数 $\frac{1}{z(z+2)^2}$ は、領域 $\mathbb{C} \setminus \{0, -2\}$ で正則であり、その範囲で積分路 Γ は円周 $|z|=1$ に変形できる」ということである。

積分路変形をどう正当化するか色々なやり方がある。代表的なものを 3 つ示す。

6.8 積分路の変形, 単連結領域における Cauchy の積分定理の証明のあら筋

例 21.5 (つづき)

- ① 星型領域内では、始点と終点が変わらないならば曲線を置き替えて良い、という定理を使って、正方形の周を円周に替えるためには、次の4つの段階を踏めば良い。例えば第1象限の部分は、 $1+i$ を中心として、半径が1.1 (1より大きく、 $1+i$ と0との距離 $\sqrt{2}$ よりは小さい) の円盤領域 (これは星型) Ω_1 を考える。 Ω_1 で被積分関数は正則です (0, -2 は含まないから)。そして、正方形の周 Γ の右上部分 Γ_1 と、円周 C の右上部分 C_1 が Ω_1 に含まれる。ゆえに、 Γ_1 を C_1 に置き換えられる。第2象限 (Γ_2 を C_2), 第3象限 (Γ_3 を C_3), 第4象限 (Γ_4 を C_4) でも同様。



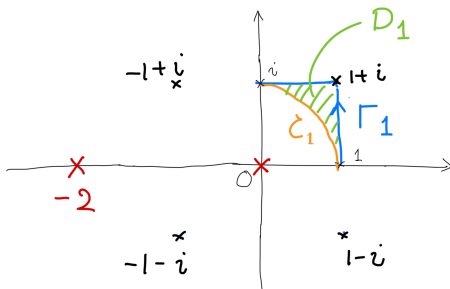
6.8 積分路の変形, 単連結領域における Cauchy の積分定理の証明のあら筋

例 21.5 (つづき)

- ② 各 j に対して、 $\Gamma_j - C_j$ は縦線領域 (D_j とする) を囲むので、縦線領域版の Green の定理を用いた Cauchy の積分定理 (第 17 回授業参照) から

$$\int_{\Gamma_j} f(z) dz - \int_{C_j} f(z) dz = \int_{\partial D_j} f(z) dz = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \int_{\Gamma_j} f(z) dz = \int_{C_j} f(z) dz$$

とする手がある。Green の定理をちゃんと分かっているという人には、この方法は簡単に思えるかもしれない。



6.8 積分路の変形, 単連結領域における Cauchy の積分定理の証明のあら筋

例 21.5 (つづき)

- ③ 「連続的変形」で説明されることも多い。 $\mathbb{C} \setminus \{0, -2\}$ の中で、正方形の周を円周まで連続的に変形する写像 (ホモトピー写像と呼ぶ) を作る。(この例の場合は簡単。原点に向かって縮める感じ (図 3)。ホモトピー写像があれば、積分路を置き換えられる、という定理は、講義ノートの付録 E.4 節, 定理 E.3。ちょっと背伸び?

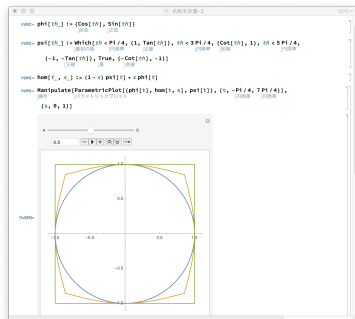


図 3: 正方形の周 Γ を円周 C に連続的に変形する

参考文献

- [1] 桂田祐史：複素関数論ノート，現象数理学科での講義科目「複素関数」の講義ノート.
<https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2022/complex2022.pdf> (2014～).