

# 複素関数・同演習 第 20 回

～Cauchy の積分定理 (2)～

かつらだ まさし  
桂田 祐史

<https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2022/>

2022 年 12 月 6 日

# 目次 I

- 1 本日の内容・連絡事項
- 2 Cauchy の積分定理 (続き)
  - 三角形の周に沿う線積分の場合
  - 原始関数が存在  $\Leftrightarrow$  任意の閉曲線に沿う線積分が 0
  - 単連結領域, 星型領域
    - 単連結領域
- 3 参考文献

- 三角形の周に沿う線積分の場合の Cauchy の積分定理の証明を行う。
- **原始関数が存在するための条件**を考察する。
- Cauchy の積分定理の一般化としては、“穴が開いていない” 領域の話が有名である。そのために**星型領域**、**単連結領域**の概念を紹介する。  
(2022/12/6 の授業では単連結領域の説明をしたところで終わった。)  
これらの領域 ( $\Omega$  とする) では、任意の正則関数  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ 、任意の閉曲線  $C$  ( $C^* \subset \Omega$ ) に対して  $\int_C f(z) dz = 0$  が成り立つ。星型領域については証明し、単連結領域については「お話しする」。(講義ノート [1] の§6.3, 6.4, 6.5 … このスライドとは番号1つズレてます。)

## 6.3 三角形の周に沿う線積分の場合

次の定理は前回紹介済みである。目を通した後は証明に取り掛かる。

### 定理 20.1 (三角形版 Cauchy の積分定理, Goursat-Pringsheim [2])

$\Omega$  は  $\mathbb{C}$  の開集合、 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  は正則、 $\Delta$  は  $\Omega$  内の三角形 (周も内部も  $\Omega$  に含まれる) とするとき

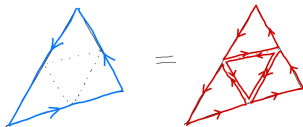
$$\int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0.$$

ここで  $\partial\Delta$  は  $\Delta$  の周を正の向きに一周する閉曲線とする。

## 6.3 三角形の周に沿う線積分の場合

証明のアイデアは、

- Ⓐ 全体を通して区間縮小法を用いる。ただし2次元区間(長方形)を4つの長方形に分けるのではなく、三角形に対し、各辺の中点を結ぶことで4つの三角形に分割する。



- Ⓑ 正則関数の小さな三角形に沿う線積分は「とても小さい」。三角形が小さいことで周の長さが小さいことに加え、次の理由があるので「とても」小さくなる。

Ⓐ 正則(微分可能)とは、局所的に1次関数  $az + b$  で良く近似できること

Ⓑ 1次関数の閉曲線に沿う線積分は0である:  $\int_{\text{閉曲線}} (az + b) dz = 0$ .

実際  $\left(\frac{az^2}{2} + bz\right)' = az + b$  であり、1次関数は原始関数を持つので、閉曲線に沿う線積分は0.

## 6.3 三角形の周に沿う線積分の場合 証明 (1)

**証明**  $M := \left| \int_{\partial\Delta} f(z) dz \right|$  とおく。  $M = 0$  を示したい。

$\Delta_0 := \Delta$  とする。  $\Delta_0$  の各辺の中点を結ぶと、4つの三角形に分割される。

$$\Delta_0 = \Delta_{01} \cup \Delta_{02} \cup \Delta_{03} \cup \Delta_{04}.$$

$\partial\Delta_{0j}$  は、 $\partial\Delta_0$  に含まれる線分と、そうでない線分 (両端を除いて  $\Delta_0$  の内部に含まれる線分) からなるが、後者は、 $j = 1, 2, 3, 4$  すべてを考えると、2回現れ、それらは互いに逆向きになっているので、線積分を計算するとキャンセルして消えてしまうから、

$$\int_{\partial\Delta_0} f(z) dz = \int_{\partial\Delta_{01}} f(z) dz + \int_{\partial\Delta_{02}} f(z) dz + \int_{\partial\Delta_{03}} f(z) dz + \int_{\partial\Delta_{04}} f(z) dz.$$

ゆえに

$$M = \left| \int_{\partial\Delta_0} f(z) dz \right| \leq \sum_{j=1}^4 \left| \int_{\partial\Delta_{0j}} f(z) dz \right|.$$

右辺の4つの項  $\left| \int_{\partial\Delta_{0j}} f(z) dz \right|$  のうち最大値を与える三角形が  $\Delta_{0j^*}$  であったとして、それを  $\Delta_1$  とおくと、

$$M \leq 4 \left| \int_{\partial\Delta_1} f(z) dz \right|.$$

## 6.3 三角形の周に沿う線積分の場合 証明 (2)

ゆえに

$$\left| \int_{\partial\Delta_1} f(z) dz \right| \geq \frac{M}{4}.$$

以下、同様にして三角形の分割&選択を続ける:

$$\Delta = \Delta_0 \supset \Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \dots$$

このとき任意の  $n \in \mathbb{N}$  に対して次式が成り立つ:

$$\left| \int_{\partial\Delta_n} f(z) dz \right| \geq \frac{M}{4^n}.$$

区間縮小法の原理により

$$(\exists c \in \mathbb{C}) \quad \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Delta_n = \{c\}.$$

$c \in \Delta_0 = \Delta \subset \Omega$  であることに注意する。

## 6.3 三角形の周に沿う線積分の場合 証明 (3)

1 次関数は必ず原始関数を持つので、1 次関数の閉曲線に沿う線積分は 0 であるから

$$\int_{\partial\Delta_n} (f(c) + f'(c)(z - c)) dz = 0.$$

ゆえに

$$\int_{\partial\Delta_n} f(z) dz = \int_{\partial\Delta_n} [f(z) - (f(c) + f'(c)(z - c))] dz.$$

右辺の被積分関数を  $g(z)$  とおくと、

$$\left| \int_{\partial\Delta_n} f(z) dz \right| = \left| \int_{\partial\Delta_n} g(z) dz \right| \leq \max_{z \in \partial\Delta_n^*} |g(z)| \int_{\partial\Delta_n} |dz|.$$

この  $\int_{\partial\Delta_n} |dz|$  は  $\partial\Delta_n$  の弧長である。それを  $L_n$  とおくと、 $\Delta_n$  は  $\Delta$  と相似であり、 $n$  が 1 増えるごとに、長さが  $1/2$  倍になるから、 $L_n = \frac{L}{2^n}$  が成り立つ。ただし、 $L$  は  $\partial\Delta = \partial\Delta_0$  の弧長である。

微分の定義  $\lim_{z \rightarrow c} \frac{f(z) - f(c)}{z - c} = f'(c)$  によって

$$\lim_{z \rightarrow c} \frac{g(z)}{z - c} = \lim_{z \rightarrow c} \frac{f(z) - (f(c) + f'(c)(z - c))}{z - c} = 0$$

であるから、任意の正の数  $\varepsilon$  に対して、ある  $\delta > 0$  が存在して

$$|z - c| < \delta \quad \Rightarrow \quad |g(z)| \leq \varepsilon |z - c|.$$



## 6.3 三角形の周に沿う線積分の場合 証明 (4)

$c \in \Delta_n$  であるので、十分大きな  $n$  に対して、 $\Delta_n \subset D(c; \delta)$  が成り立つ。そのような  $n$  に対して、 $z \in \partial\Delta_n^*$  であれば、 $|z - c| < \delta$  であるから

$$\max_{z \in \partial\Delta_n^*} |g(z)| \leq \varepsilon \max_{z \in \partial\Delta_n^*} |z - c|.$$

$z, c \in \Delta_n$  であれば、 $|z - c| \leq L_n$  であるから

$$\max_{z \in \partial\Delta_n^*} |g(z)| \leq \varepsilon L_n.$$

ゆえに

$$\frac{M}{4^n} \leq \left| \int_{\partial\Delta_n} f(z) dz \right| \leq \varepsilon L_n \cdot L_n = \frac{\varepsilon L^2}{4^n}$$

であるから、

$$0 \leq M \leq \varepsilon L^2.$$

$\varepsilon$  は任意の正の数であったので、 $M = 0$ .

□

## 6.3 三角形の周に沿う線積分の場合 すぐ分かること

定理 20.1 とその証明から **すぐ or 直観的に 分かること**

- Ⓐ  $\Omega$  に含まれる任意の “多角形”  $P$  の周  $\Gamma := \partial P$  に沿う線積分  $\int_{\Gamma} f(z) dz$  も 0.



実際、多角形は三角形に分割でき、各三角形の周に沿う線積分は (上の Lemma から) 0. これを全部加えると  $\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$ .

## 6.3 三角形の周に沿う線積分の場合 直観的に分かること

- ⓑ  $\Omega$  中にある領域  $D$  の境界が区分的に  $C^1$  級の閉曲線であるとき、 $D$  の中に穴はない (ここは曖昧だけど「直観的」なので) とすると  $\int_{\partial D} f(z) dz = 0$ .



図 1:  $D$  内に穴がない

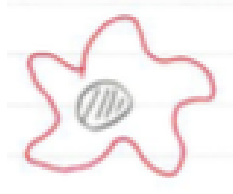


図 2:  $D$  内に穴がある

証明もどき

$D$  を細かく分割する:  $D = \bigcup_{k=1}^n D_k$ .  $\int_{\partial D} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \int_{\partial D_k} f(z) dz$ .

$\partial D$  より離れた  $D_k$  は三角形が選べて、その周  $\partial D_k$  に沿う線積分は 0.

$\partial D$  に近い  $D_k$  は三角形が選べないが、 $\Omega$  内のある円盤  $D(c; \varepsilon)$  に含まれるように細かく分割しておけば、 $F(z) := \int_{[c, z]} f(\zeta) d\zeta$  ( $z \in D(c; \varepsilon)$ ) が原始関数になる (詳細は後述)。だから線積分は 0.

次の「Green の定理による別証明」は 2022/12/6 の授業ではスキップして、§6.4 に進んだ。

## 6.3 三角形の周に沿う線積分の場合

Green の定理による別証明

余談: 有名な別証明 ベクトル解析を学んだ人向け: 有名な定理を用いる別証明がある。

### Green の定理

$D$  は  $\mathbb{R}^2$  の良い領域、 $\Omega$  は  $\bar{D}$  を含む開集合、 $\mathbf{f} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  は  $C^1$  級とするとき

$$\int_{\partial D} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} \left( = \int_{\partial D} P dx + Q dy \right) = \iint_D (Q_x - P_y) dx dy.$$

ただし  $\partial D$  は、 $D$  の境界を正の向きにたどる閉曲線である。

これを用いると

$$\begin{aligned} \int_{\partial \Delta} f(z) dz &= \int_{\partial \Delta} (u + iv)(dx + i dy) = \int_{\partial \Delta} (u dx - v dy) + i \int_{\partial \Delta} (v dx + u dy) \\ &= \iint_{\Delta} (-v_x - u_y) dx dy + i \iint_{\Delta} (u_x - v_y) dx dy. \end{aligned}$$

$f$  は正則であるから、Cauchy-Riemann の方程式  $u_x = v_y$ ,  $u_y = -v_x$  が成り立つ。ゆえに

$$\int_{\partial \Delta} f(z) dz = \iint_{\Delta} 0 dx dy + i \iint_{\Delta} 0 dx dy = 0. \quad \square$$

上の論法が成立するには、 $f'$  の連続性を仮定する必要がある<sup>1</sup>。強い仮定が必要という意味では、定理としては弱くなるが、Green の定理に十分慣れていれば<sup>2</sup> 色々な議論が単純になるので、魅力的に感じられるかもしれない。

実は教科書 (神保 [3]) はこの証明を採用しているが、残念ながら Green の定理の説明はあまり詳しくない。この方針のもとに書かれている本のうちで、私のお勧めは、堀川 [4] である (Green の定理のていねいな説明が載っている)。

---

<sup>1</sup>テキストによっては、関数が正則であることの定義を、微分可能かつ導関数が連続という条件を満たすこととしている。

<sup>2</sup>残念ながら、そういうカリキュラムを採用している学科は稀にしかないでしょう。

## 6.4 原始関数が存在 $\Leftrightarrow$ 任意の閉曲線に沿う線積分が0

Cauchy の積分定理の結論部分は、

$$\text{任意の区分的 } C^1 \text{ 級閉曲線 } C \text{ に沿う線積分が } 0: \int_C f(z) dz = 0$$

という条件だった。一方で「 $f$  が原始関数を持てば」これが成り立つことを知っている ( $\int_C f(z) dz = F(\text{終点}) - F(\text{始点}) = 0$ )。何か関係があるのだろうか？

$\Omega$  を  $\mathbb{C}$  の領域、 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  は連続とするとき、以下の3つの条件の関係について調べよう。

- ❶  $f$  が  $\Omega$  での原始関数を持つ ( $\exists F: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  s.t.  $F' = f$ )
- ❷  $\Omega$  内の任意の区分的  $C^1$  級閉曲線  $C$  について、 $\int_C f(z) dz = 0$  が成り立つ
- ❸  $f$  は  $\Omega$  で正則である

すでに (i)  $\Rightarrow$  (ii) は知っているが、実は逆 (ii)  $\Rightarrow$  (i) も成り立つ。証明は難しくないで、このすぐ後で述べる (命題 20.3)。

## 6.4 原始関数が存在 $\Leftrightarrow$ 任意の閉曲線に沿う線積分が0

さらに、実は (i)  $\Rightarrow$  (iii) である。

それは *Cauchy* の積分公式 (まだ説明していない) を用いて得られる「正則ならば、各点の近傍で冪級数展出来る」という定理 (後で証明するこの講義の重要な目標) から、 $F$  は何回でも微分できることが分かるので、特に  $F$  が2回微分可能であることから、 $f = F'$  も微分できるからである。

上に述べたように (i) と (ii) は同値なので、(ii)  $\Rightarrow$  (iii) も成り立つ。すなわち「 $\Omega$  内の任意の区分的  $C^1$  級閉曲線  $C$  について  $\int_C f(z) dz = 0$  が成り立つならば、 $f$  は  $\Omega$  で正則である。」これは通常 <sup>モレラ</sup> **Moreira の定理** と呼ばれる。

(これは既に言っていることだが) (iii)  $\Rightarrow$  (ii) は一般には成り立たない。これは  $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,  $f(z) = \frac{1}{z}$ ,  $\int_{|z|=1} f(z) dz = 2\pi i \neq 0$  という例から分かる。

ここまですとまとめると、

**(i) と (ii) は同値で (iii) より強い**

(iii) に条件を足して (ii) を導くのが *Cauchy* の積分定理である、と考えられる。



## 6.4 原始関数が存在 $\Leftrightarrow$ 任意の閉曲線に沿う線積分が0

$\Omega$  に何か  $+\alpha$  の条件をつけると (iii)  $\Rightarrow$  (ii) が言えて、すべて同値になる。

### 定理 20.2 (単連結領域における Cauchy の積分定理 とても有名)

$\Omega$  は  $\mathbb{C}$  の単連結あるいは星型の領域とし、 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  は正則とする。このとき  $\Omega$  内の任意の区分的  $C^1$  級閉曲線  $C$  に対して

$$\int_C f(z) dz = 0.$$

(単連結、星型の定義は後述する。) これから

### 星型領域や単連結領域に対しては、(i), (ii), (iii) は同値である

単連結の場合は特に有名であるが、厳密な証明には少し手間がかかる (講義ノート [1] の **E** 節に載せてある。証明のアイディアは、この講義でも少しずつ紹介してゆく。)

星型の場合は比較的簡単に証明できて (本日後半)、その定理だけで関数論の多くの重要な結果が導くことが出来る。

## 6.4 原始関数が存在 $\Leftrightarrow$ 任意の閉曲線に沿う線積分が0

### 余談 1 (ベクトル解析を勉強した人に)

実は、ベクトル解析にも、これとよく対応する話がある。

(i) が「ベクトル場  $\mathbf{f}$  がポテンシャルを持つ」、(ii) が  $\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = 0$ ,  
(iii) が  $\text{rot } \mathbf{f} = 0$ , ということになる。

(i) と (ii) は同値である。(i) (あるいは (ii)) から (iii) が導かれるが、逆は一般には成り立たず、単連結領域であれば逆も成立する、というのは同じである。  $\square$

## 6.4 原始関数が存在 $\Leftrightarrow$ 任意の閉曲線に沿う線積分が0

では (ii)  $\Rightarrow$  (i) を証明しよう。

**定理 20.3** (任意の区分的  $C^1$  級閉曲線に沿う線積分が0ならば原始関数を持つ)

$\Omega$  は  $\mathbb{C}$  の領域、 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  は連続で、 $\Omega$  内の任意の区分的  $C^1$  級閉曲線  $C$  に対して  $\int_C f(z) dz = 0$  が成り立つとする。このとき、ある正則関数  $F: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  が存在して、 $F' = f$ 。

**証明**  $\Omega$  内の任意の点  $a$  を取る。 $\Omega$  が弧連結であるから、任意の  $z \in \Omega$  に対して、 $a$  を始点、 $z$  を終点とする  $\Omega$  内の区分的に  $C^1$  級の曲線  $C_z$  が存在する。

$$F(z) := \int_{C_z} f(\zeta) d\zeta$$

とおく。

$F(z)$  の値は  $C_z$  の取り方にはよらない。実際、 $a$  を始点、 $z$  を終点とする  $\Omega$  内の2曲線  $C_z, C'_z$  があるとき、 $C := C_z + (-C'_z)$  とおくと、 $C$  は閉曲線であるので、仮定 (条件 (ii)) から

$$0 = \int_C f(\zeta) d\zeta = \int_{C_z} f(\zeta) d\zeta - \int_{C'_z} f(\zeta) d\zeta \quad \text{ゆえに} \quad \int_{C_z} f(\zeta) d\zeta = \int_{C'_z} f(\zeta) d\zeta$$

が成り立つからである。

## 6.4 原始関数が存在 $\Leftrightarrow$ 任意の閉曲線に沿う線積分が0 証明続き

この  $F$  が  $f$  の原始関数であることを示す。

任意の  $z \in \Omega$  に対して、 $(\exists \varepsilon > 0) D(z; \varepsilon) \subset \Omega$ . ゆえに  $|h| < \varepsilon$  を満たす任意の  $h$  に対して、 $z$  から  $z+h$  に向かう線分  $[z, z+h]$  は  $\Omega$  に含まれる。  $C_{z+h}$  として  $C_z + [z, z+h]$  を選ぶことにより、

$$(1) \quad F(z+h) - F(z) = \int_{C_z + [z, z+h]} f(\zeta) d\zeta - \int_{C_z} f(\zeta) d\zeta = \int_{[z, z+h]} f(\zeta) d\zeta.$$

## 6.4 原始関数が存在 $\Leftrightarrow$ 任意の閉曲線に沿う線積分が0 証明続き

一方

$$\int_{[z, z+h]} d\zeta = [\zeta]_{\zeta=z}^{\zeta=z+h} = h$$

であるから、 $h \neq 0$  とするとき

$$\begin{aligned} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) &= \frac{1}{h} \int_{[z, z+h]} f(\zeta) d\zeta - f(z) \cdot \frac{1}{h} \int_{[z, z+h]} d\zeta \\ &= \frac{1}{h} \int_{[z, z+h]} (f(\zeta) - f(z)) d\zeta. \end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| &\leq \frac{1}{|h|} \int_{[z, z+h]} |f(\zeta) - f(z)| |d\zeta| \\ &\leq \frac{1}{|h|} \max_{\zeta \in [z, z+h]} |f(\zeta) - f(z)| \int_{[z, z+h]} |d\zeta| \\ &= \max_{\zeta \in [z, z+h]} |f(\zeta) - f(z)|. \end{aligned}$$

$f$  は  $z$  で連続であるから、 $h \rightarrow 0$  のとき右辺  $\rightarrow 0$ . ゆえに  $F'(z) = f(z)$ .  $\square$

## 6.5 単連結領域, 星型領域 6.5.1 単連結領域

単連結、星型という言葉を知ろう。

### 定義 20.4 (単連結領域)

$\Omega$  を  $\mathbb{C}$  (あるいは  $\mathbb{R}^n$ ) の領域とする。 $\Omega$  が**単連結** (simply-connected) とは、 $\Omega$  内の任意の閉曲線  $(z = \varphi(t) \ (t \in [\alpha, \beta])$  が  $\Omega$  内の 1 点 (定数曲線) に  $\Omega$  内で連続的に変形できることをいう。

つまり、ある  $a \in \Omega$  とある連続関数  $F: [\alpha, \beta] \times [0, 1] \ni (t, s) \mapsto F(t, s) \in \Omega$  が存在して

$$\begin{aligned} F(t, 0) &= \varphi(t) & (t \in [\alpha, \beta]), \\ F(t, 1) &= a & (t \in [\alpha, \beta]) \end{aligned}$$

が成り立つ。

## 6.5.1 単連結領域

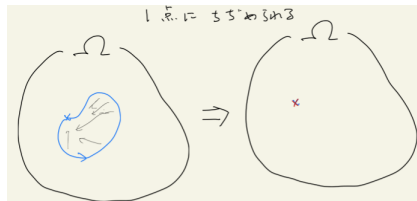


図 3: 穴がなければ閉曲線は 1 点に縮められる

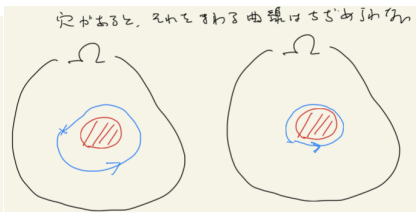


図 4: 穴があれば 1 点に縮められないことがある (2次元の場合)

### 例 20.5 (単連結である領域)

全空間  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbb{C}$ . 球  $B(\mathbf{a}; r) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < r\}$ , 円盤  $D(c; r)$ .

凸領域 (後述). 星型領域 (後述).

Jordan 曲線定理に基づく「平面内の単純閉曲線 (Jordan 曲線) の囲む領域」.

$n \geq 3$ ,  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$  とするとき  $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{a}\}$ .

直観的には、閉曲線が外せなくなるような障害物がない領域。 □

## 6.5.1 単連結領域

### 例 20.6 (単連結でない領域)

- (a)  $a \in \mathbb{R}^2$  とするとき  $\mathbb{R}^2 \setminus \{a\}$ . 同じことだけれど  $c \in \mathbb{C}$  とするとき、 $\mathbb{C} \setminus \{c\}$ .
- (b)  $c \in \mathbb{C}, r > 0$  とするとき  $D(c; r) \setminus \{c\}$ .
- (c)  $c \in \mathbb{C}, 0 < R_1 < R_2 < +\infty$  とするとき、 $\{z \in \mathbb{C} \mid R_1 < |z - c| < R_2\}$  (円環領域と呼ぶ).
- (d)  $\ell$  を  $\mathbb{R}^3$  内の直線とするとき  $\mathbb{R}^3 \setminus \ell$ .
- (e) ドーナツ型の領域.

(c) の円環領域のように、直径  $R_1$  の穴  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - c| \leq R_1\}$  が空いている場合は、1 点に縮められない閉曲線が存在することは直観的に明らかであるが、(a), (b) のように穴が 1 点である場合に、それを回る閉曲線が 1 点に縮められないことは納得行かないかもしれない。数学的に定義してあるので、証明できる。



2022/12/6 の授業はここまでです。

# 参考文献

- [1] 桂田祐史：複素関数論ノート，現象数理学科での講義科目「複素関数」の講義ノート. <https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2022/complex2022.pdf> (2014～).
- [2] Gray, J.: Goursat, Pringsheim, Walsh, and the Cauchy Integral Theorem, *Mathematical Intelligencer*, Vol. 22 (4), pp. 60–77 (2000).
- [3] 神保道夫：複素関数入門，現代数学への入門，岩波書店 (2003)，丸善 eBook では <https://elib.maruzen.co.jp/elib/html/BookDetail/Id/3000006063> でアクセスできる.
- [4] 堀川穎二<sup>えいじ</sup>：複素関数論の要諦，日本評論社 (2003/3/10, 2015/8/25).