複素関数・同演習 第19回

〜線積分 (2), Cauchy の積分定理 (1)〜

桂田 祐史（かつらだ まさし）

https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2022/

2022年11月30日

目次

本日の内容・連絡事項

- 前回に引き続き、複素線積分 $\displaystyle\int_C f(z)\,dz$ の性質を説明する (講義ノート [1] の§5)。
- 前回授業中に説明したことですが、これから体感的には進行が速くなります (新しい話題がどんどん出て来る)。心して下さい。
- 今回からしばらく授業を Zoom でも配信します。動画も収録して後から見られるようにするかもしれません。

5.2 原始関数 (続き)

原始関数が存在しない場合は、例えば例**??**, **??**でやったように、定義に戻って計算すると良い。

例 19.1 (原始関数の存在しない例)

$C\colon z=(1+2i)t\ (t\in[0,1])$ とする。$f(z)=|z|$ は原始関数を持たない。

$$\int_C |z|\,dz=\int_0^1 \sqrt{t^2+(2t)^2}\cdot(1+2i)\,dt=(1+2i)\sqrt{5}\int_0^1 |t|\,dt$$
$$=(1+2i)\sqrt{5}\int_0^1 t\,dt=\frac{(1+2i)\sqrt{5}}{2}.\quad\square$$

5.3 曲線に関する用語の定義

曲線のいろは　Ω は $\mathbb{C}$ の開集合, $C\colon z=\varphi(t)$ $(t\in[\alpha,\beta])$ は Ω 内の曲線 (i.e. $\varphi\colon[\alpha,\beta]\to\Omega$ 連続) とする。

1. $\varphi([\alpha,\beta])=\{\varphi(t)\mid t\in[\alpha,\beta]\}$ を C の**像**または**跡**と呼び、C^* と表す。
2. C が C^1 **級**とは、φ が C^1 級 (つまり φ が微分可能で、φ' が連続) であることをいう。
3. C が C^1 **級正則**とは、C が C^1 級かつ $(\forall t\in[\alpha,\beta])$ $\varphi'(t)\neq 0$ であることをいう。(C^* はなめらかで、尖ったりしないし、いきなりバックしたりもしない。)
4. C が**区分的** C^1 **級**とは、ある $\{t_j\}_{j=1}^m$ が存在して、
$$\alpha=t_0<t_1<\cdots<t_m=\beta,$$
かつ各 $[t_{j-1},t_j]$ で φ は C^1 級であることをいう。
5. C が**区分的** C^1 **級正則**とは、ある $\{t_j\}_{j=1}^m$ が存在して、
$$\alpha=t_0<t_1<\cdots<t_m=\beta,$$
かつ各 $[t_{j-1},t_j]$ で φ は C^1 級かつ $\varphi'(t)\neq 0$ (ただし $t=t_{j-1},t_j$ では片側微分係数である。) であることをいう。

5.3 曲線に関する用語の定義

6. C が**閉曲線**とは、$\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$ であることをいう。
7. C が**単純** (Jordan arc) $\Leftrightarrow$ 閉曲線でないときは φ が単射、閉曲線であるときは $[\alpha, \beta)$ で単射であることをいう。
   要するに「自分自身と交わらない」こと。
8. 区分的 C^1 級単純正則閉曲線が**正の向き** $\Leftrightarrow$ 進行方向の左手に C が囲む領域が見える。

実は **Jordan 曲線定理**「平面内の任意の単純閉曲線は、平面を 2 つの領域 (一方は有界、もう一方は非有界) にわけ、曲線の像は両者の境界である。」証明が大変なので、この定理はこの講義では使わない。

例 19.2 (円周)

$C: z = c + re^{i\theta}$ $(\theta \in [0, 2\pi])$ は、C^1 級正則単純閉曲線である。C の像は中心 c, 半径が r の円周で、C は正の向きである。単に $|z - c| = r$ と書いたら、この曲線のこととみなす (慣習)。

例 19.3 (正方形の周)

図の正方形の周。

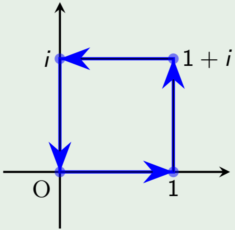


図 1: 正方形の周を正の向きに一周する

$$C\colon z=\varphi(t):=\begin{cases} t & (t\in[0,1]) \\ 1+i(t-1) & (t\in[1,2]) \\ 1+i-(t-2) & (t\in[2,3]) \\ i-i(t-3) & (t\in[3,4]) \end{cases}$$

このとき、$C^*=$ 正方形の周. 区分的に C^1 級正則、単純閉曲線、正の向き。
しかし!! 計算をするときに上の式は使わない (もっと楽な方法がある)。 □

定義 19.4 (逆向きの曲線 $-C$, 曲線の和 C_1+C_2)

1. 逆向きの曲線 $-C$: $z=\varphi(-t)$ $(t\in[-\beta,-\alpha])$
2. C_1 の終点$=C_2$ の始点のとき。C_1+C_2 を次のように定義する。

$$\varphi(t):=\begin{cases}\varphi_1(t) & t\in[\alpha_1,\beta_1]\\ \varphi_2(t-\beta_1+\alpha_2) & t\in[\beta_1,\beta_1+\beta_2-\alpha_2]\end{cases}$$

教科書 [2] は C_2C_1 と表している。これはもっともなところがあるのだけれど…この講義では C_1+C_2 と表す (その方がふつう)。後で終点=始点でない場合にも使う。

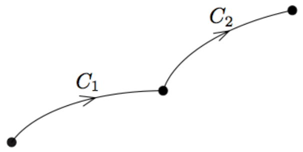


図 2: C_1 の終点 $=$ C_2 の始点ならば C_1+C_2 が作れる

5.4 線積分の性質

定理 19.5 (線積分の性質)

Ω は $\mathbb{C}$ の開集合、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$, $g\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は連続、$\lambda \in \mathbb{C}$, C, C_1, C_2 は Ω 内の区分的に C^1 級の曲線とする。このとき次が成り立つ。

1. $\displaystyle\int_C (f(z)+g(z))\,dz = \int_C f(z)\,dz + \int_C g(z)\,dz.$
2. $\displaystyle\int_C \lambda f(z)\,dz = \lambda \int_C f(z)\,dz.$
3. $\displaystyle\left|\int_C f(z)\,dz\right| \le \int_C |f(z)|\,|dz|$
4. $\displaystyle\int_{-C} f(z)\,dz = -\int_C f(z)\,dz.$
5. $\displaystyle\int_{C_1+C_2} f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz.$

証明　(1), (2) は簡単なので省略する。(5) は演習問題とする。

3. 一般に連続関数 $F\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ に対して,
$$\left| \int_\alpha^\beta F(t)\, dt \right| \le \int_\alpha^\beta |F(t)|\, dt$$
が成り立つことを認めれば、$F(t) = f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$ について適用して、
$$\left| \int_C f(z)\, dz \right| = \left| \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt \right| \le \int_\alpha^\beta |f(\varphi(t))\varphi'(t)|\, dt = \int_C |f(z)|\, |dz|\,.$$

4. $z = \varphi(-t)$ $(t \in [-\beta, -\alpha])$ とすると、$dz = -\varphi'(-t)dt$ であるから、
$$\int_{-C} f(z)\, dz = \int_{-\beta}^{-\alpha} f(\varphi(-t)) \cdot (-\varphi'(-t))dt = \int_{-\alpha}^{-\beta} f(\varphi(-t))\varphi'(-t)\, dt.$$
$s = -t$ とおくと、$t = -\alpha$ のとき $s = \alpha$, $t = -\beta$ のとき $s = \beta$, $dt = -ds$ であるから、
$$\int_{-C} f(z)\, dz = \int_\alpha^\beta f(\varphi(s))\varphi'(s) \cdot (-1)ds = -\int_C f(z)\, dz. \qquad \square$$

5.4 線積分の性質

注意 19.6

孤長要素に関する線積分 $\displaystyle\int_C f(z)\,|dz| = \int_C f\ ds$ についても (1), (2) は成立する。(3), (4) については若干の注意が必要である。例えば

$$\int_{-C} f(z)\,|dz| = \int_C f(z)\,|dz|\,. \quad \square$$

定理 19.7

線積分の値は、曲線の向きを変えないパラメーター付けによらない。

証明.

一般の場合の証明を書くことはサボるが、次の例を検討すると理解できるであろう。 $\square$

5.4 線積分の性質

例 19.8

次の 5 つの曲線について考える。

$C_1\colon z = e^{i\theta}\ (\theta \in [0, \pi])$
$C_2\colon z = e^{i\pi t}\ (t \in [0, 1])$
$C_3\colon z = e^{i\pi t^2}\ (t \in [0, 1])$
$C_4\colon z = -t + i\sqrt{1 - t^2}\ (t \in [-1, 1])$
$C_5\colon z = t + i\sqrt{1 - t^2}\ (t \in [-1, 1])$

曲線の像はいずれも、原点を中心とする単位円周の上半分である:

$$C_j^* = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1,\ \mathrm{Im}\, z \geq 0\} \quad (j = 1, 2, 3, 4, 5).$$

$j = 1, \cdots, 4$ に対して C_j の向きは同じ、$C_5 = -C_4$ であるので C_5 は逆向きである。

上の定理を認めると、任意の f に対して $\displaystyle\int_{C_j} f(z)\, dz$ の値は皆同じであり、
$\displaystyle\int_{C_5} f(z)\, dz = -\int_{C_4} f(z)\, dz$ であることが分かる。

5.4 線積分の性質

例 19.8 (続き)

この例については、直接的な変数変換で示すことができる。

(1)
$$\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_0^{\pi} f(e^{i\theta}) \cdot ie^{i\theta}\,d\theta.$$

(1) で、$\theta = \pi t$ と変数変換すると

$$\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_0^1 f(e^{i\pi t}) \cdot ie^{i\pi t} \cdot \pi\,dt = \int_0^1 f(e^{i\pi t}) \cdot i\pi e^{i\pi t}\,dt = \int_{C_2} f(z)\,dz.$$

(1) で、$\theta = \pi t^2$ と変数変換すると

$$\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_0^1 f(e^{i\pi t^t}) \cdot ie^{i\pi t^2} \cdot \pi 2t\,dt = \int_0^1 f(e^{i\pi t}) \cdot 2\pi ie^{i\pi t^2}\,dt = \int_{C_3} f(z)\,dz.$$

以下同様に証明できる。

問 $\displaystyle\int_{C_4} f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz$ であることを示せ。

6 Cauchy の積分定理

いよいよ Cauchy の積分定理を説明する。

一般的な形の Cauchy の積分定理をすぐ扱うのは困難である。段階的に進めて行くことにする。今日は Cauchy の積分定理がどういうものか、直観的に分かる形で説明して、三角形の周の場合 (Goursat-Pringsheim の定理) を述べて、きちんと証明する。

6.1 はじめに

Cauchy の積分定理は、結論の式[1] は簡単で

$$\int_C f(z)\,dz = 0$$

というものである。

仮定が問題であるが、普通は次の 3 つである (他に Green の定理を用いて証明するバージョンもあり、それは少し異なる)。

(a) f は $\mathbb{C}$ の領域 Ω で正則 (Ω の任意の点で微分可能)。

(b) C は Ω 内の閉曲線。簡単のため区分的に C^1 級としておく。

以上は分かりやすいが、次が要注意

(c) C の「囲む」範囲で f は正則。(C の囲む範囲は Ω に含まれる。)

[1] 余談になるけれど、定理の仮定を言わない人が世の中には結構いる (そんなの定理じゃない、と言いたくなる)。2 次方程式の解の公式とかは、尋ねれば仮定を答えられる人は多いだろうけれど、少し複雑な定理になると尋ねても答えられないんじゃないか？と思われることが時々ある。流体力学のベルヌーイの定理とか、信号処理のシャノンのサンプリング定理とか、有名で良く引き合いに出されるけれど、どうだろう。関数論だとやはり Cauchy の積分定理かな。その仮定を言えるようになるのが目標。

6.1 はじめに

再掲

- (a) f は $\mathbb{C}$ の領域 Ω で正則。
- (b) C は Ω 内の閉曲線。簡単のため区分的に C^1 級としておく。

  以上は分かりやすいが、次が要注意
- (c) C の「囲む」範囲で f は正則。(C の囲む範囲は Ω に含まれる。)

(a) と (b) だけでは不足で、何か (c) のような条件が必要なことは、

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{z} = 2\pi i \neq 0 \quad (つまり\ \Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\},\ f(z) = \frac{1}{z},\ C\colon z = e^{i\theta}\ (\theta \in [0, 2\pi]))$$

を思い出すと分かる ((a) と (b) を満たすのに、$\displaystyle\int_C f(z)\,dz = 0$ ではない)。

しかし (c) の「囲む」はあいまいで、定理にするのは一仕事必要である。

C が円周のような簡単な曲線であれば、直観に従って「囲む」を解釈しても間違いは起こさないが、そうでない場合は微妙なことがある。

6.1 はじめに

この枠内に書いたことを今理解するのは大変。キーワードを見てもらうくらいか。

C が単純閉曲線 (Jordan 曲線) ならば、**Jordan 曲線定理**により、C の像 C^* (図形としての曲線) は $\mathbb{C}$ のある有界領域 D の境界であることが分かるので、C は D を囲むと言っても良いだろうが、Jordan 曲線定理のような大道具 (?) はあまり使いたくない。C が単純でない場合も考察の対象にしたい、ということもある。

ともあれ、解決の方向は 2 つある。

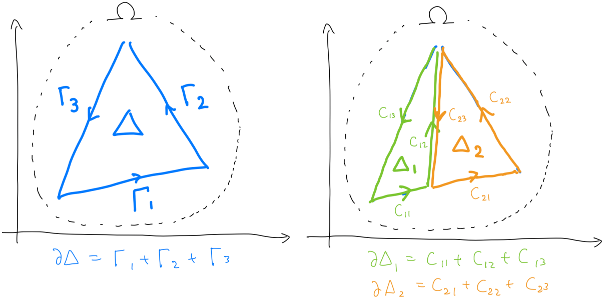
- Ω 自身にまったく穴がない場合だけを考える (そうすれば Ω 内の任意の閉曲線の囲む範囲で正則だろう)。具体的には、後で定義する「**単連結**」という条件を使う。「Ω が $\mathbb{C}$ の単連結領域であれば、Ω で正則な任意の関数 f と、Ω 内の任意の区分的 C^1 級閉曲線 C に対して、$\displaystyle\int_C f(z)\,dz = 0$ が成り立つ。」という定理を証明できる。
- 閉曲線 C が 1 つの点を囲む、という条件をうまく定義してから、とりかかる。閉曲線の点の周りの**回転数**という概念を使うことになる。それを使って「囲む」を定義する。⋯ 残念ながら、この講義ではこれらを説明する時間が (多分) ない。

いずれにしても単純な場合から話を進めていく。

6.2 準備

Ω は $\mathbb{C}$ の開集合、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は連続、Ω に含まれる三角形 Δ を 2 つの三角形 Δ_1, Δ_2 に分割するとき、次式が成り立つ。

(2)
$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = \int_{\partial\Delta_1} f(z)\,dz + \int_{\partial\Delta_2} f(z)\,dz.$$



実際、

$$\partial\Delta = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3, \quad \partial\Delta_1 = C_{11} + C_{12} + C_{13}, \quad \partial\Delta_2 = C_{21} + C_{22} + C_{23}$$

とするとき $C_{23} = -C_{12}$ であるから

$$\int_{C_{23}} f(z)\,dz = \int_{-C_{12}} f(z)\,dz = -\int_{C_{12}} f(z)\,dz.$$

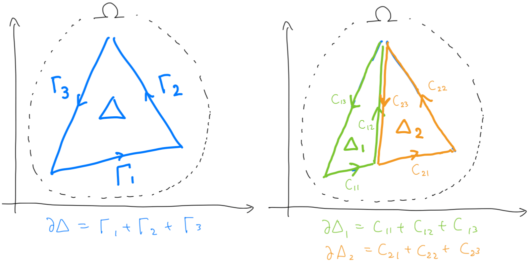
6.2 準備

ゆえに

$$\int_{C_{12}} f(z)\,dz + \int_{C_{23}} f(z)\,dz = 0.$$

ゆえに

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Delta_1} f(z)\,dz + \int_{\partial\Delta_2} f(z)\,dz &= \left(\int_{C_{11}} + \int_{C_{12}} + \int_{C_{13}}\right) + \left(\int_{C_{21}} + \int_{C_{22}} + \int_{C_{23}}\right)\\ &= \int_{C_{11}+C_{21}} + \int_{C_{22}} + \int_{C_{13}}\\ &= \int_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_2} + \int_{\Gamma_3} = \int_{\partial\Delta}. \quad \square\end{aligned}$$



6.3 三角形の周に沿う線積分の場合

定理 19.9 (三角形版 Cauchy の積分定理, Goursat-Pringsheim [3])

Ω は $\mathbb{C}$ の開集合、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は正則、Δ は Ω 内の三角形 (周も内部も Ω に含まれる) とするとき

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0.$$

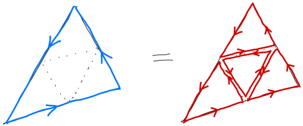
ここで $\partial\Delta$ は Δ の周を正の向きに一周する閉曲線とする。

6.3 三角形の周に沿う線積分の場合

(このスライドは途中 ((i) を説明したくらい) で説明をやめた。)

証明のアイディアは、

ⓐ 全体を通して区間縮小法を用いる。ただし 2 次元区間 (長方形) を 4 つの長方形に分けるのではなく、三角形に対し、各辺の中点を結ぶことで 4 つの三角形に分割する。



ⓑ 正則関数の小さな三角形に沿う線積分は「とても小さい」。三角形が小さいことで周の長さが小さいことの他に、次の理由があるので「とても」小さくなる。

- (i) 正則 (微分可能) とは、局所的に 1 次関数 $az+b$ で良く近似できること
- (ii) 1 次関数の閉曲線に沿う線積分は 0 である: $\displaystyle\int_{\text{閉曲線}} (az+b)dz = 0.$

  実際 $\left(\dfrac{az^2}{2}+bz\right)' = az+b$ であり、1 次関数は原始関数を持つので、閉曲線に沿う線積分は 0.

参考文献

[1] 桂田祐史：複素関数論ノート, 現象数理学科での講義科目「複素関数」の講義ノート. https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2022/complex2022.pdf (2014〜).

[2] 神保道夫（じんぼう）：複素関数入門, 現代数学への入門, 岩波書店 (2003), 丸善 eBook では https://elib.maruzen.co.jp/elib/html/BookDetail/Id/3000006063 でアクセスできる.

[3] Gray, J.: Goursat, Pringsheim, Walsh, and the Cauchy Integral Theorem, *Mathematical Intelligencer*, Vol. 22 (4), pp. 60–77 (2000).