

複素関数・同演習 第 19 回

～線積分 (2), Cauchy の積分定理 (1)～

かつらだ まさし
桂田 祐史

<https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2022/>

2022 年 11 月 30 日

目次

- 1 本日の内容・連絡事項
- 2 線積分 (続き)
 - 原始関数 (続き)
 - 曲線に関する用語の定義
 - 線積分の性質
- 3 Cauchy の積分定理
 - はじめに
 - 準備
 - 三角形の周に沿う線積分の場合
- 4 参考文献

- 前回に引き続き、複素線積分 $\int_C f(z) dz$ の性質を説明する (講義ノート [1] の§5)。
- 前回授業中に説明したことですが、これから体感的には進行が速くなります (新しい話題がどんどん出て来る)。心して下さい。
- 今回からしばらく授業を Zoom でも配信します。動画も収録して後から見られるようにするかもしれません。

5.2 原始関数 (続き)

原始関数が存在しない場合は、例えば例??, ??でやったように、定義に戻って計算すると良い。

例 19.1 (原始関数の存在しない例)

$C: z = (1 + 2i)t$ ($t \in [0, 1]$) とする。 $f(z) = |z|$ は原始関数を持たない。

$$\begin{aligned}\int_C |z| dz &= \int_0^1 \sqrt{t^2 + (2t)^2} \cdot (1 + 2i) dt = (1 + 2i)\sqrt{5} \int_0^1 |t| dt \\ &= (1 + 2i)\sqrt{5} \int_0^1 t dt = \frac{(1 + 2i)\sqrt{5}}{2}. \quad \square\end{aligned}$$

5.3 曲線に関する用語の定義

曲線のいろは Ω は \mathbb{C} の開集合, $C: z = \varphi(t)$ ($t \in [\alpha, \beta]$) は Ω 内の曲線 (i.e. $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow \Omega$ 連続) とする。

5.3 曲線に関する用語の定義

曲線のいろは Ω は \mathbb{C} の開集合, $C: z = \varphi(t)$ ($t \in [\alpha, \beta]$) は Ω 内の曲線 (i.e. $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow \Omega$ 連続) とする。

- ① $\varphi([\alpha, \beta]) = \{\varphi(t) \mid t \in [\alpha, \beta]\}$ を C の像または跡と呼び、 C^* と表す。

5.3 曲線に関する用語の定義

曲線のいろは Ω は \mathbb{C} の開集合, $C: z = \varphi(t)$ ($t \in [\alpha, \beta]$) は Ω 内の曲線 (i.e. $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow \Omega$ 連続) とする。

- ① $\varphi([\alpha, \beta]) = \{\varphi(t) \mid t \in [\alpha, \beta]\}$ を C の像または跡と呼び、 C^* と表す。
- ② C が C^1 級とは、 φ が C^1 級 (つまり φ が微分可能で、 φ' が連続) であることをいう。

5.3 曲線に関する用語の定義

曲線のいろは Ω は \mathbb{C} の開集合, $C: z = \varphi(t)$ ($t \in [\alpha, \beta]$) は Ω 内の曲線 (i.e. $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow \Omega$ 連続) とする。

- ① $\varphi([\alpha, \beta]) = \{\varphi(t) \mid t \in [\alpha, \beta]\}$ を C の像または跡と呼び、 C^* と表す。
- ② C が C^1 級とは、 φ が C^1 級 (つまり φ が微分可能で、 φ' が連続) であることをいう。
- ③ C が C^1 級正則とは、 C が C^1 級かつ $(\forall t \in [\alpha, \beta]) \varphi'(t) \neq 0$ であることをいう。(C^* はなめらかで、尖ったりしないし、いきなりバックしたりもしない。)

5.3 曲線に関する用語の定義

曲線のいろは Ω は \mathbb{C} の開集合, $C: z = \varphi(t)$ ($t \in [\alpha, \beta]$) は Ω 内の曲線 (i.e. $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow \Omega$ 連続) とする。

- ① $\varphi([\alpha, \beta]) = \{\varphi(t) \mid t \in [\alpha, \beta]\}$ を C の像または跡と呼び、 C^* と表す。
- ② C が C^1 級とは、 φ が C^1 級 (つまり φ が微分可能で、 φ' が連続) であることをいう。
- ③ C が C^1 級正則とは、 C が C^1 級かつ $(\forall t \in [\alpha, \beta]) \varphi'(t) \neq 0$ であることをいう。(C^* はなめらかで、尖ったりしないし、いきなりバックしたりもしない。)
- ④ C が区分的 C^1 級とは、ある $\{t_j\}_{j=1}^m$ が存在して、

$$\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = \beta,$$

かつ各 $[t_{j-1}, t_j]$ で φ は C^1 級であることをいう。

5.3 曲線に関する用語の定義

曲線のいろは Ω は \mathbb{C} の開集合, $C: z = \varphi(t)$ ($t \in [\alpha, \beta]$) は Ω 内の曲線 (i.e. $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow \Omega$ 連続) とする。

- ① $\varphi([\alpha, \beta]) = \{\varphi(t) \mid t \in [\alpha, \beta]\}$ を **Cの像** または **跡** と呼び、 C^* と表す。
- ② C が **C^1 級** とは、 φ が C^1 級 (つまり φ が微分可能で、 φ' が連続) であることをいう。
- ③ C が **C^1 級正則** とは、 C が C^1 級かつ $(\forall t \in [\alpha, \beta]) \varphi'(t) \neq 0$ であることをいう。(C^* はなめらかで、尖ったりしないし、いきなりバックしたりもしない。)

- ④ C が **区分的 C^1 級** とは、ある $\{t_j\}_{j=1}^m$ が存在して、

$$\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = \beta,$$

かつ各 $[t_{j-1}, t_j]$ で φ は C^1 級であることをいう。

- ⑤ C が **区分的 C^1 級正則** とは、ある $\{t_j\}_{j=1}^m$ が存在して、

$$\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = \beta,$$

かつ各 $[t_{j-1}, t_j]$ で φ は C^1 級かつ $\varphi'(t) \neq 0$ (ただし $t = t_{j-1}, t_j$ では片側微分係数である。) であることをいう。

5.3 曲線に関する用語の定義

5.3 曲線に関する用語の定義

- ⑥ C が**閉曲線**とは、 $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$ であることをいう。

5.3 曲線に関する用語の定義

- ⑥ C が**閉曲線**とは、 $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$ であることをいう。
- ⑦ C が**単純** (Jordan arc) \Leftrightarrow 閉曲線でないときは φ が単射、閉曲線であるときは $[\alpha, \beta)$ で単射であることをいう。
要するに「自分自身と交わらない」こと。

5.3 曲線に関する用語の定義

- ⑥ C が**閉曲線**とは、 $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$ であることをいう。
- ⑦ C が**単純** (Jordan arc) \Leftrightarrow 閉曲線でないときは φ が単射、閉曲線であるときは $[\alpha, \beta)$ で単射であることをいう。
要するに「自分自身と交わらない」こと。
- ⑧ 区分的 C^1 級単純正則閉曲線が**正の向き** \Leftrightarrow 進行方向の左手に C が囲む領域が見える。

5.3 曲線に関する用語の定義

- ⑥ C が**閉曲線**とは、 $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$ であることをいう。
- ⑦ C が**単純** (Jordan arc) \Leftrightarrow 閉曲線でないときは φ が単射、閉曲線であるときは $[\alpha, \beta)$ で単射であることをいう。
要するに「自分自身と交わらない」こと。
- ⑧ 区分的 C^1 級単純正則閉曲線が**正の向き** \Leftrightarrow 進行方向の左手に C が囲む領域が見える。

実は **Jordan 曲線定理** 「平面内の任意の単純閉曲線は、平面を2つの領域 (一方は有界、もう一方は無界) にわけ、曲線の像は両者の境界である。」証明が大変なので、この定理はこの講義では使わない。

5.3 曲線に関する用語の定義

- ⑥ C が**閉曲線**とは、 $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$ であることをいう。
- ⑦ C が**単純** (Jordan arc) \Leftrightarrow 閉曲線でないときは φ が単射、閉曲線であるときは $[\alpha, \beta]$ で単射であることをいう。
要するに「自分自身と交わらない」こと。
- ⑧ 区分的 C^1 級単純正則閉曲線が**正の向き** \Leftrightarrow 進行方向の左手に C が囲む領域が見える。

実は **Jordan 曲線定理** 「平面内の任意の単純閉曲線は、平面を2つの領域 (一方は有界、もう一方は無界) にわけ、曲線の像は両者の境界である。」証明が大変なので、この定理はこの講義では使わない。

例 19.2 (円周)

$C: z = c + re^{i\theta}$ ($\theta \in [0, 2\pi]$) は、 C^1 級正則単純閉曲線である。 C の像は中心 c 、半径が r の円周で、 C は正の向きである。単に $|z - c| = r$ と書いたら、この曲線のこととみなす (慣習)。

5.3 曲線に関する用語の定義

例 19.3 (正方形の周)

図の正方形の周。

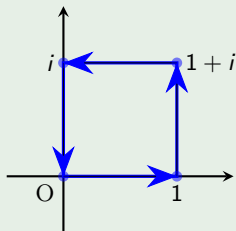


図 1: 正方形の周を正の向きに一周する

$$C: z = \varphi(t) := \begin{cases} t & (t \in [0, 1]) \\ 1 + i(t-1) & (t \in [1, 2]) \\ 1 + i - (t-2) & (t \in [2, 3]) \\ i - i(t-3) & (t \in [3, 4]) \end{cases}$$

このとき、 C^* = 正方形の周. 区分的に C^1 級正則、単純閉曲線、正の向き。
しかし!! 計算をするときに上の式は使わない (もっと楽な方法がある)。

□

5.3 曲線に関する用語の定義

定義 19.4 (逆向きの曲線 $-C$, 曲線の和 $C_1 + C_2$)

- ① 逆向きの曲線 $-C: z = \varphi(-t)$ ($t \in [-\beta, -\alpha]$)
- ② C_1 の終点 = C_2 の始点のとき。 $C_1 + C_2$ を次のように定義する。

$$\varphi(t) := \begin{cases} \varphi_1(t) & t \in [\alpha_1, \beta_1] \\ \varphi_2(t - \beta_1 + \alpha_2) & t \in [\beta_1, \beta_1 + \beta_2 - \alpha_2] \end{cases}$$

教科書 [2] は C_2C_1 と表している。これはもっともなところがあるのだけれど…この講義では $C_1 + C_2$ と表す (その方がふつう)。後で終点=始点でない場合にも使う。

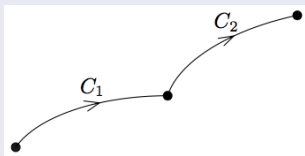


図 2: C_1 の終点 = C_2 の始点ならば $C_1 + C_2$ が作れる

5.4 線積分の性質

定理 19.5 (線積分の性質)

Ω は \mathbb{C} の開集合、 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, $g: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ は連続、 $\lambda \in \mathbb{C}$, C, C_1, C_2 は Ω 内の区分的に C^1 級の曲線とする。このとき次が成り立つ。

$$\textcircled{1} \quad \int_C (f(z) + g(z)) dz = \int_C f(z) dz + \int_C g(z) dz.$$

$$\textcircled{2} \quad \int_C \lambda f(z) dz = \lambda \int_C f(z) dz.$$

$$\textcircled{3} \quad \left| \int_C f(z) dz \right| \leq \int_C |f(z)| |dz|$$

$$\textcircled{4} \quad \int_{-C} f(z) dz = - \int_C f(z) dz.$$

$$\textcircled{5} \quad \int_{C_1+C_2} f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz.$$

5.4 線積分の性質

証明 (1), (2) は簡単なので省略する。(5) は演習問題とする。

5.4 線積分の性質

証明 (1), (2) は簡単なので省略する。(5) は演習問題とする。

③ 一般に連続関数 $F: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ に対して、

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} F(t) dt \right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |F(t)| dt$$

が成り立つことを認めれば、 $F(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$ について適用して、

$$\left| \int_C f(z) dz \right| = \left| \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t) dt \right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |f(\varphi(t))\varphi'(t)| dt = \int_C |f(z)| |dz|.$$

5.4 線積分の性質

証明 (1), (2) は簡単なので省略する。(5) は演習問題とする。

③ 一般に連続関数 $F: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ に対して、

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} F(t) dt \right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |F(t)| dt$$

が成り立つことを認めれば、 $F(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$ について適用して、

$$\left| \int_C f(z) dz \right| = \left| \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t) dt \right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |f(\varphi(t))\varphi'(t)| dt = \int_C |f(z)| |dz|.$$

④ $z = \varphi(-t)$ ($t \in [-\beta, -\alpha]$) とすると、 $dz = -\varphi'(-t)dt$ であるから、

$$\int_{-C} f(z) dz = \int_{-\beta}^{-\alpha} f(\varphi(-t)) \cdot (-\varphi'(-t)) dt = \int_{-\alpha}^{-\beta} f(\varphi(-t))\varphi'(-t) dt.$$

$s = -t$ とおくと、 $t = -\alpha$ のとき $s = \alpha$, $t = -\beta$ のとき $s = \beta$, $dt = -ds$ であるから、

$$\int_{-C} f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(s))\varphi'(s) \cdot (-1) ds = - \int_C f(z) dz. \quad \square$$

5.4 線積分の性質

注意 19.6

弧長要素に関する線積分 $\int_C f(z) |dz| = \int_C f ds$ についても (1), (2) は成立する。(3), (4) については若干の注意が必要である。例えば

$$\int_{-C} f(z) |dz| = \int_C f(z) |dz|. \quad \square$$

5.4 線積分の性質

注意 19.6

弧長要素に関する線積分 $\int_C f(z) |dz| = \int_C f ds$ についても (1), (2) は成立する。(3), (4) については若干の注意が必要である。例えば

$$\int_{-C} f(z) |dz| = \int_C f(z) |dz|. \quad \square$$

定理 19.7

線積分の値は、曲線の向きを変えないパラメーター付けによらない。

5.4 線積分の性質

注意 19.6

弧長要素に関する線積分 $\int_C f(z) |dz| = \int_C f ds$ についても (1), (2) は成立する。(3), (4) については若干の注意が必要である。例えば

$$\int_{-C} f(z) |dz| = \int_C f(z) |dz|. \quad \square$$

定理 19.7

線積分の値は、曲線の向きを変えないパラメーター付けによらない。

証明.

一般の場合の証明を書くことはサボるが、次の例を検討すると理解できるであろう。 □

5.4 線積分の性質

例 19.8

次の5つの曲線について考える。

$$C_1: z = e^{i\theta} \quad (\theta \in [0, \pi])$$

$$C_2: z = e^{i\pi t} \quad (t \in [0, 1])$$

$$C_3: z = e^{i\pi t^2} \quad (t \in [0, 1])$$

$$C_4: z = -t + i\sqrt{1-t^2} \quad (t \in [-1, 1])$$

$$C_5: z = t + i\sqrt{1-t^2} \quad (t \in [-1, 1])$$

曲線の像はいずれも、原点を中心とする単位円周の上半分である：

$$C_j^* = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1, \operatorname{Im} z \geq 0\} \quad (j = 1, 2, 3, 4, 5).$$

$j = 1, \dots, 4$ に対して C_j の向きは同じ、 $C_5 = -C_4$ であるので C_5 は逆向きである。

上の定理を認めると、任意の f に対して $\int_{C_j} f(z) dz$ の値は皆同じであり、

$$\int_{C_5} f(z) dz = - \int_{C_4} f(z) dz \quad \text{であることが分かる。}$$

5.4 線積分の性質

例 19.8 (続き)

この例については、直接的な変数変換で示すことができる。

$$(1) \quad \int_{C_1} f(z) dz = \int_0^\pi f(e^{i\theta}) \cdot ie^{i\theta} d\theta.$$

(1) で、 $\theta = \pi t$ と変数変換すると

$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_0^1 f(e^{i\pi t}) \cdot ie^{i\pi t} \cdot \pi dt = \int_0^1 f(e^{i\pi t}) \cdot i\pi e^{i\pi t} dt = \int_{C_2} f(z) dz.$$

(1) で、 $\theta = \pi t^2$ と変数変換すると

$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_0^1 f(e^{i\pi t^2}) \cdot ie^{i\pi t^2} \cdot \pi 2t dt = \int_0^1 f(e^{i\pi t^2}) \cdot 2\pi ie^{i\pi t^2} dt = \int_{C_3} f(z) dz.$$

以下同様に証明できる。

問 $\int_{C_4} f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz$ であることを示せ。

6 Cauchy の積分定理

いよいよ Cauchy の積分定理を説明する。

一般的な形の Cauchy の積分定理をすぐ扱うのは困難である。段階的に進めて行くことにする。今日は Cauchy の積分定理がどういうものか、直観的に分かる形で説明して、三角形の周の場合 (Goursat-Pringsheim の定理) を述べて、きちんと証明する。

6.1 はじめに

Cauchy の積分定理は、結論の式¹は簡単で

$$\int_C f(z) dz = 0$$

というものである。

¹余談になるけれど、定理の仮定を言わない人が世の中には結構いる (そんなの定理じゃない、と言いたくなる)。2 次方程式の解の公式とかは、尋ねれば仮定を答えられる人は多いだろうけれど、少し複雑な定理になると尋ねても答えられないんじゃないか?と思われることが時々ある。流体力学のベルヌーイの定理とか、信号処理のシャノンのサンプリング定理とか、有名で良く引き合いに出されるけれど、どうだろう。関数論だとやはり Cauchy の積分定理かな。その仮定を言えるようになるのが目標。

6.1 はじめに

Cauchy の積分定理は、結論の式¹は簡単で

$$\int_C f(z) dz = 0$$

というものである。

仮定が問題であるが、普通は次の3つである (他に **Green の定理**を用いて証明するバージョンもあり、それは少し異なる)。

¹余談になるけれど、定理の仮定を言わない人が世の中には結構いる (そんなの定理じゃない、と言いたくなる)。2 次方程式の解の公式とかは、尋ねれば仮定を答えられる人は多いだろうけれど、少し複雑な定理になると尋ねても答えられないんじゃないか？と思われることが時々ある。流体力学のベルヌーイの定理とか、信号処理のシャノンのサンプリング定理とか、有名で良く引き合いに出されるけれど、どうだろう。関数論だとやはり Cauchy の積分定理かな。その仮定を言えるようになるのが目標。

6.1 はじめに

Cauchy の積分定理は、結論の式¹は簡単で

$$\int_C f(z) dz = 0$$

というものである。

仮定が問題であるが、普通は次の3つである (他に **Green の定理**を用いて証明するバージョンもあり、それは少し異なる)。

- ① f は \mathbb{C} の領域 Ω で**正則** (Ω の任意の点で微分可能)。

¹余談になるけれど、定理の仮定を言わない人が世の中には結構いる (そんなの定理じゃない、と言いたくなる)。2 次方程式の解の公式とかは、尋ねれば仮定を答えられる人は多いだろうけれど、少し複雑な定理になると尋ねても答えられないんじゃないか?と思われることが時々ある。流体力学のベルヌーイの定理とか、信号処理のシャノンのサンプリング定理とか、有名で良く引き合いに出されるけれど、どうだろう。関数論だとやはり Cauchy の積分定理かな。その仮定を言えるようになるのが目標。

6.1 はじめに

Cauchy の積分定理は、結論の式¹は簡単で

$$\int_C f(z) dz = 0$$

というものである。

仮定が問題であるが、普通は次の3つである (他に **Green の定理**を用いて証明するバージョンもあり、それは少し異なる)。

- Ⓐ f は \mathbb{C} の領域 Ω で**正則** (Ω の任意の点で微分可能)。
 - Ⓑ C は Ω 内の**閉曲線**。簡単のため区分的に C^1 級としておく。
- 以上は分かりやすいが、次が要注意

¹余談になるけれど、定理の仮定を言わない人が世の中には結構いる (そんなの定理じゃない、と言いたくなる)。2 次方程式の解の公式とかは、尋ねれば仮定を答えられる人は多いだろうけれど、少し複雑な定理になると尋ねても答えられないんじゃないか?と思われることが時々ある。流体力学のベルヌーイの定理とか、信号処理のシャノンのサンプリング定理とか、有名で良く引き合いに出されるけれど、どうだろう。関数論だとやはり Cauchy の積分定理かな。その仮定を言えるようになるのが目標。

6.1 はじめに

Cauchy の積分定理は、結論の式¹は簡単で

$$\int_C f(z) dz = 0$$

というものである。

仮定が問題であるが、普通は次の3つである (他に **Green の定理**を用いて証明するバージョンもあり、それは少し異なる)。

- Ⓐ f は \mathbb{C} の領域 Ω で**正則** (Ω の任意の点で微分可能)。
- Ⓑ C は Ω 内の**閉曲線**。簡単のため区分的に C^1 級としておく。
以上は分かりやすいが、次が要注意
- Ⓒ C の「**囲む**」範囲で f は**正則**。(C の囲む範囲は Ω に含まれる。)

¹余談になるけれど、定理の仮定を言わない人が世の中には結構いる (そんなの定理じゃない、と言いたくなる)。2 次方程式の解の公式とかは、尋ねれば仮定を答えられる人は多いだろうけれど、少し複雑な定理になると尋ねても答えられないんじゃないか?と思われることが時々ある。流体力学のベルヌーイの定理とか、信号処理のシャノンのサンプリング定理とか、有名で良く引き合いに出されるけれど、どうだろう。関数論だとやはり Cauchy の積分定理かな。その仮定を言えるようになるのが目標。

6.1 はじめに

再掲

- (a) f は \mathbb{C} の領域 Ω で正則。
- (b) C は Ω 内の閉曲線。簡単のため区分的に C^1 級としておく。
以上は分かりやすいが、次が要注意
- (c) C の「囲む」範囲で f は正則。(C の囲む範囲は Ω に含まれる。)

(a) と (b) だけでは不足で、何か (c) のような条件が必要なことは、

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{z} = 2\pi i \neq 0 \quad (\text{つまり } \Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}, f(z) = \frac{1}{z}, C: z = e^{i\theta} (\theta \in [0, 2\pi]))$$

を思い出すと分かる ((a) と (b) を満たすのに、 $\int_C f(z) dz = 0$ ではない)。

6.1 はじめに

再掲

- (a) f は \mathbb{C} の領域 Ω で正則。
- (b) C は Ω 内の閉曲線。簡単のため区分的に C^1 級としておく。
以上は分かりやすいが、次が要注意
- (c) C の「囲む」範囲で f は正則。(C の囲む範囲は Ω に含まれる。)

(a) と (b) だけでは不足で、何か (c) のような条件が必要なことは、

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{z} = 2\pi i \neq 0 \quad (\text{つまり } \Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}, f(z) = \frac{1}{z}, C: z = e^{i\theta} (\theta \in [0, 2\pi]))$$

を思い出すと分かる ((a) と (b) を満たすのに、 $\int_C f(z) dz = 0$ ではない)。

しかし (c) の「囲む」はあいまいで、定理にするのは一仕事必要である。

6.1 はじめに

再掲

- (a) f は \mathbb{C} の領域 Ω で正則。
- (b) C は Ω 内の閉曲線。簡単のため区分的に C^1 級としておく。
以上は分かりやすいが、次が要注意
- (c) C の「囲む」範囲で f は正則。(C の囲む範囲は Ω に含まれる。)

(a) と (b) だけでは不足で、何か (c) のような条件が必要なことは、

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{z} = 2\pi i \neq 0 \quad (\text{つまり } \Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}, f(z) = \frac{1}{z}, C: z = e^{i\theta} (\theta \in [0, 2\pi]))$$

を思い出すと分かる ((a) と (b) を満たすのに、 $\int_C f(z) dz = 0$ ではない)。

しかし (c) の「囲む」はあいまいで、定理にするのは一仕事必要である。

C が円周のような簡単な曲線であれば、直観に従って「囲む」を解釈しても間違いは起こさないが、そうでない場合は微妙なことがある。

6.1 はじめに

この枠内に書いたことを今理解するのは大変。キーワードを見てもらうくらいか。

C が単純閉曲線 (Jordan 曲線) ならば、**Jordan 曲線定理**により、 C の像 C^* (図形としての曲線) は \mathbb{C} のある有界領域 D の境界であることが分かるので、 C は D を囲むと言っても良いだろうが、Jordan 曲線定理のような大道具(?) はあまり使いたくない。 C が単純でない場合も考察の対象にしたい、ということもある。

ともあれ、解決の方向は2つある。

6.1 はじめに

この枠内に書いたことを今理解するのは大変。キーワードを見てもらうくらいか。

C が単純閉曲線 (Jordan 曲線) ならば、**Jordan 曲線定理**により、 C の像 C^* (図形としての曲線) は \mathbb{C} のある有界領域 D の境界であることが分かるので、 C は D を囲むと言っても良いだろうが、Jordan 曲線定理のような大道具(?) はあまり使いたくない。 C が単純でない場合も考察の対象にしたい、ということもある。

ともあれ、解決の方向は2つある。

- ① Ω 自身にまったく穴がない場合だけを考える (そうすれば Ω 内の任意の閉曲線の囲む範囲で正則だろう)。具体的には、後で定義する「**単連結**」という条件を使う。「 Ω が \mathbb{C} の単連結領域であれば、 Ω で**正則な**任意の関数 f と、 Ω 内の任意の区分的 C^1 級閉曲線 C に対して、 $\int_C f(z) dz = 0$ が成り立つ。」という定理を証明できる。

6.1 はじめに

この枠内に書いたことを今理解するのは大変。キーワードを見てもらうくらいか。

C が単純閉曲線 (Jordan 曲線) ならば、**Jordan 曲線定理**により、 C の像 C^* (図形としての曲線) は \mathbb{C} のある有界領域 D の境界であることが分かるので、 C は D を囲むと言っても良いだろうが、Jordan 曲線定理のような大道具(?) はあまり使いたくない。 C が単純でない場合も考察の対象にしたい、ということもある。

ともあれ、解決の方向は2つある。

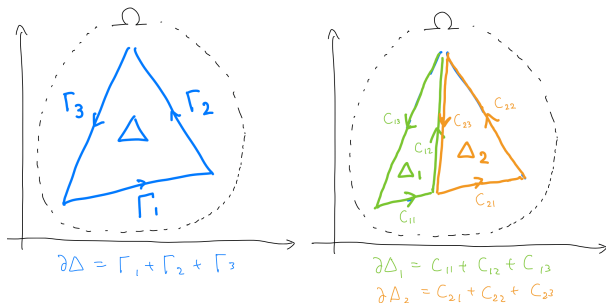
- ① Ω 自身にまったく穴がない場合だけを考える (そうすれば Ω 内の任意の閉曲線の囲む範囲で正則だろう)。具体的には、後で定義する「**単連結**」という条件を使う。「 Ω が \mathbb{C} の単連結領域であれば、 Ω で**正則な**任意の関数 f と、 Ω 内の任意の区分的 C^1 級閉曲線 C に対して、 $\int_C f(z) dz = 0$ が成り立つ。」という定理を証明できる。
- ② 閉曲線 C が1つの点を囲む、という条件をうまく定義してから、とりかかろう。閉曲線の点の周りの**回転数**という概念を使うことになる。それを使って「囲む」を定義する。… 残念ながら、この講義ではこれらを説明する時間が(多分)ない。

いずれにしても単純な場合から話を進めていく。

6.2 準備

Ω は \mathbb{C} の開集合、 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ は連続、 Ω に含まれる三角形 Δ を2つの三角形 Δ_1, Δ_2 に分割するとき、次式が成り立つ。

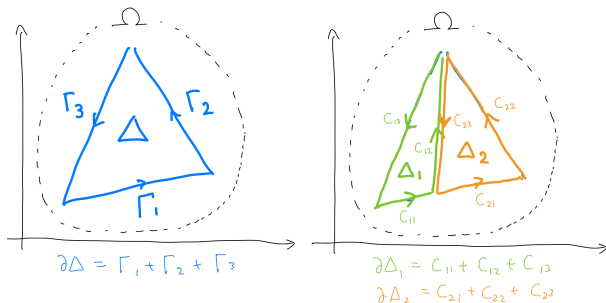
$$(2) \quad \int_{\partial\Delta} f(z) dz = \int_{\partial\Delta_1} f(z) dz + \int_{\partial\Delta_2} f(z) dz.$$



6.2 準備

Ω は \mathbb{C} の開集合、 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ は連続、 Ω に含まれる三角形 Δ を 2つの三角形 Δ_1, Δ_2 に分割するとき、次式が成り立つ。

$$(2) \quad \int_{\partial\Delta} f(z) dz = \int_{\partial\Delta_1} f(z) dz + \int_{\partial\Delta_2} f(z) dz.$$



実際、

$$\partial\Delta = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3, \quad \partial\Delta_1 = C_{11} + C_{12} + C_{13}, \quad \partial\Delta_2 = C_{21} + C_{22} + C_{23}$$

とするとき $C_{23} = -C_{12}$ であるから

$$\int_{C_{23}} f(z) dz = \int_{-C_{12}} f(z) dz = - \int_{C_{12}} f(z) dz.$$

6.2 準備

ゆえに

$$\int_{C_{12}} f(z) dz + \int_{C_{23}} f(z) dz = 0.$$

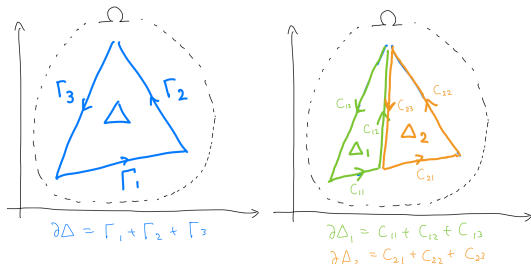
6.2 準備

ゆえに

$$\int_{C_{12}} f(z) dz + \int_{C_{23}} f(z) dz = 0.$$

ゆえに

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Delta_1} f(z) dz + \int_{\partial\Delta_2} f(z) dz &= \left(\int_{C_{11}} + \int_{C_{12}} + \int_{C_{13}} \right) + \left(\int_{C_{21}} + \int_{C_{22}} + \int_{C_{23}} \right) \\ &= \int_{C_{11}+C_{21}} + \int_{C_{22}} + \int_{C_{13}} \\ &= \int_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_2} + \int_{\Gamma_3} = \int_{\partial\Delta}. \quad \square \end{aligned}$$



6.3 三角形の周に沿う線積分の場合

定理 19.9 (三角形版 Cauchy の積分定理, Goursat-Pringsheim [3])

Ω は \mathbb{C} の開集合、 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ は正則、 Δ は Ω 内の三角形 (周も内部も Ω に含まれる) とするとき

$$\int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0.$$

ここで $\partial\Delta$ は Δ の周を正の向きに一周する閉曲線とする。

6.3 三角形の周に沿う線積分の場合

(このスライドは途中 ((i) を説明したくらい) で説明をやめた。)

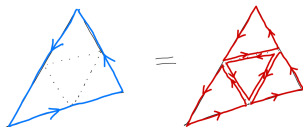
証明のアイディアは、

6.3 三角形の周に沿う線積分の場合

(このスライドは途中 ((i) を説明したくらい) で説明をやめた。)

証明のアイディアは、

- ④ 全体を通して区間縮小法を用いる。ただし2次元区間(長方形)を4つの長方形に分けるのではなく、三角形に対し、各辺の中点を結ぶことで4つの三角形に分割する。

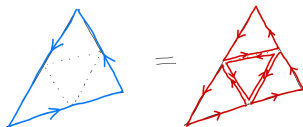


6.3 三角形の周に沿う線積分の場合

(このスライドは途中 ((i) を説明したくらい) で説明をやめた。)

証明のアイディアは、

- 全体を通して区間縮小法を用いる。ただし2次元区間(長方形)を4つの長方形に分けるのではなく、三角形に対し、各辺の中点を結ぶことで4つの三角形に分割する。



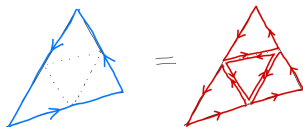
- 正則関数の小さな三角形に沿う線積分は「とても小さい」。三角形が小さいことで周の長さが小さいことの他に、次の理由があるので「とても」小さくなる。

6.3 三角形の周に沿う線積分の場合

(このスライドは途中 (i) を説明したくらい) で説明をやめた。)

証明のアイディアは、

- 全体を通して区間縮小法を用いる。ただし2次元区間(長方形)を4つの長方形に分けるのではなく、三角形に対し、各辺の中点を結ぶことで4つの三角形に分割する。



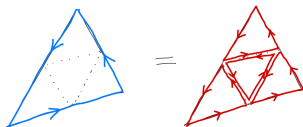
- 正則関数の小さな三角形に沿う線積分は「とても小さい」。三角形が小さいことで周の長さが小さいことの他に、次の理由があるので「とても」小さくなる。
 - 正則(微分可能)とは、局所的に1次関数 $az + b$ で良く近似できること

6.3 三角形の周に沿う線積分の場合

(このスライドは途中 (i) を説明したくらい) で説明をやめた。)

証明のアイディアは、

- Ⓐ 全体を通して区間縮小法を用いる。ただし 2次元区間 (長方形) を 4つの長方形に分けるのではなく、三角形に対し、各辺の中点を結ぶことで 4つの三角形に分割する。



- Ⓑ 正則関数の小さな三角形に沿う線積分は「とても小さい」。三角形が小さいことで周の長さが小さいことの他に、次の理由があるので「とても」小さくなる。

Ⓐ 正則 (微分可能) とは、局所的に 1 次関数 $az + b$ で良く近似できること

Ⓑ 1 次関数の閉曲線に沿う線積分は 0 である: $\int_{\text{閉曲線}} (az + b) dz = 0$.

実際 $\left(\frac{az^2}{2} + bz\right)' = az + b$ であり、1 次関数は原始関数を持つので、閉曲線に沿う線積分は 0.

参考文献

- [1] 桂田祐史：複素関数論ノート，現象数理学科での講義科目「複素関数」の講義ノート. <https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2022/complex2022.pdf> (2014～).
- [2] 神保道夫^{じんぼう}：複素関数入門，現代数学への入門，岩波書店 (2003)，丸善 eBook では <https://elib.maruzen.co.jp/elib/html/BookDetail/Id/3000006063> でアクセスできる.
- [3] Gray, J.: Goursat, Pringsheim, Walsh, and the Cauchy Integral Theorem, *Mathematical Intelligencer*, Vol. 22 (4), pp. 60–77 (2000).