複素関数・同演習 第17回

〜対数関数と冪関数 (2)〜

かつらだ まさし
桂田 祐史
https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2022/

2022年11月22日

目次

本日の内容・連絡事項

始まる 2 時間前まで、明日が休日であることをうっかりしていたせいで、色々予定が狂いました。

- 宿題 7 の解説をする…のはやめました。フィードバックはしますが、解説は来週にします。
- 複素対数関数の性質をみる。
  - 対数関数の分枝 $\log$ は、複素平面から原点を始点とする半直線で不連続であるが、それを除いた開集合では正則であり
    $$(\log z)' = \frac{1}{z}.$$
  - Log の実部・虚部を可視化 (グラフ、等高線) する。
- 複素対数関数を用いて、複素関数としての冪関数 z^α を定義する。

4.1.2 複素対数関数の定義 (続き)

$z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, すなわち $z \in \mathbb{C}$ かつ $z \neq 0$ とする。

1. (無限多価の対数関数) $z = re^{i\theta}$ ($r > 0$, $\theta \in \mathbb{R}$) とするとき
$$\log z := \log r + i(\theta + 2n\pi) \quad (n \in \mathbb{Z}).$$
2. (対数関数の分枝) 幅 2π の半開区間 I (つまり、ある $\alpha \in \mathbb{R}$ によって $I = [\alpha, \alpha + 2\pi)$ あるいは $I = (\alpha, \alpha + 2\pi]$ と表されるような I) を定めて、$z = re^{i\theta}$ ($r > 0$, $\theta \in I$) として
$$\log z := \log r + i\theta.$$
3. (対数関数の主値) $z = re^{i\theta}$ ($r > 0$, $-\pi < \theta \leq \pi$) として
$$\mathrm{Log}\, z := \log r + i\theta.$$

4.1.2 複素対数関数の定義 (続き)

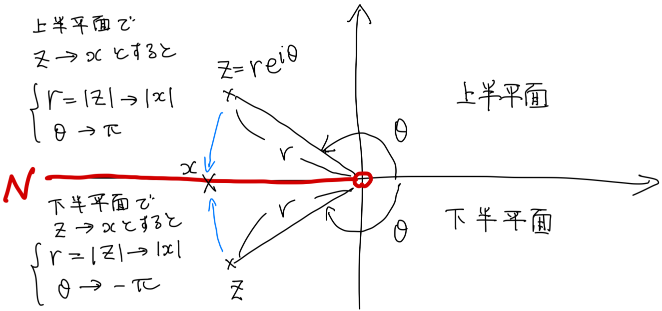
Log は $N := \{z \in \mathbb{C} \mid z < 0\}$ で不連続である (N を $(-\infty, 0)$ と書かせてもらう)。

$x \in N$ とするとき

$$\lim_{\substack{z \to x \\ \mathrm{Im}\, z > 0}} \mathrm{Log}\, z = \log|x| + i\pi$$

$$\lim_{\substack{z \to x \\ \mathrm{Im}\, z < 0}} \mathrm{Log}\, z = \log|x| - i\pi$$

($\because$ z と原点との距離は $|z|$. $z \to x$ のとき $|z| \to |x|$. $\mathrm{Im}\, z > 0$ と $\mathrm{Im}\, z < 0$ で $z \to x$ とすると、それぞれ $\theta \to \pi$, $\theta \to -\pi$.)



Mathematica の勧め

現象数理学科 Mac にインストールされている **Mathematica** は、**数式処理系**と呼ばれるソフトウェアである。プログラミング言語処理系の一種でもあるが、多くのプログラミング言語 (例えば C, Python, MATLAB, ⋯) は、数値計算はできても数式の計算はできない。

これを使うと、従来手計算するしかなかった多くの計算を実行することができる。学習・研究に生かせるように、習得することを勧めたい。

「複素関数と Mathematica」という説明を用意してある (授業 WWW サイトに置いてある, PDF ならばクリックすればブラウザが起動するはず)。その中では、この「複素関数」の宿題に現れるような計算 (実際、過去の年度の宿題に出て来た問題を取り上げている) の実行例が載っている。

Mathematica の勧め　全般的な注意

- 現象数理学科でライセンスを購入しているので、所属する学生は利用できる。毎年 4 月末日にライセンスの更新がある (更新できない場合は、私 (桂田) か池田先生に相談する)。
- アプリケーション・フォルダに Mathematica.app がある (私は Dock に追加しています)。
- (新しくプログラムを作る場合) Mathematica を起動後、「新規ドキュメント」でノートブックを開き、コマンドを入力して実行する。
- コマンドの最後に shift + ↵ とタイプする。
- 直前の結果は `%` で参照できる。直前のコマンドは command +L で呼び出せる。
- コマンドは編集して再実行できる (挿入、上書き修正、削除、などが可能)。
- `??関数名` としてマニュアルが開ける (非常に便利。これに慣れること。)。
- 関数名の大文字・小文字に注意する。用意されている関数名の先頭は大文字である。
- ノートブックとして保存しておける (ファイル名末尾は `.nb`)。
- 既存のノートブックはダブルクリックで開ける。

  コマンドを 1 つ 1 つ shift + ↵ で実行する以外に、[評価] → [ノートブックを評価] で順番に全部実行することもできる。
- Mathematica 入門 `https://m-katsurada.sakura.ne.jp/syori2/mathematica/`

4.1.2 複素対数関数の定義 (続き)

Mathematica で Log の実部・虚部のグラフを描こう

```
Plot3D[Im[Log[x+I y]],{x,-1,1},{y,-1,1},
  RegionFunction->Function[{x,y,z},x^2+y^2<1]]
```

水色部分は $x^2 + y^2 < 1$ の範囲だけでグラフを描くための指定 (なくても描ける)。
`Plot3D[]` の代わりに `ContourPlot[]` にしたり、`Im[]` の代わりに `Re[]` にしたり。

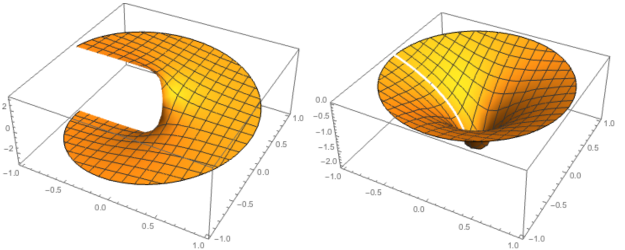


図 1: $\operatorname{Im}\operatorname{Log}(x+yi)$, $\operatorname{Re}\operatorname{Log}(x+yi)$ のグラフ

ちなみに無限多価関数 log の虚部の “グラフ” は、上下にずっと続く螺旋階段である。

4.1.2 複素対数関数の定義 (続き)　正則な制限

上では Log の定義域を $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ とした。すると $N=\{z\in\mathbb{C}\mid z<0\}$ に属する任意の点で不連続であるが、N を除くと ($\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ に制限すると) 連続であるだけでなく、正則になる。実際、次の定理が成り立つ。

定理 17.1 (対数関数の主値の正則性)

$\mathrm{Log}\colon \mathbb{C}\setminus(-\infty,0]\to\{w\in\mathbb{C}\mid -\pi<\mathrm{Im}\,w<\pi\}$ に制限すると、正則関数

$$f\colon \Omega:=\{w\in\mathbb{C}\mid -\pi<\mathrm{Im}\,w<\pi\}\to\mathbb{C}\setminus(-\infty,0],\quad f(w)=e^w\quad(w\in\Omega)$$

の逆関数である。この (制限した) Log は正則であり、$(\mathrm{Log}\,z)'=\dfrac{1}{z}$.

証明　複素関数においても、逆関数の微分の公式、逆関数定理は成立する (現時点では、導関数が連続である正則関数についてのみ逆関数定理が証明出来ている)。

$f(w)=e^w$ は正則、$f'(w)=e^w$ は連続、$f'(w)=e^w\neq 0$ であるから、その逆関数 Log は正則である。$z=e^w$ のとき、$\dfrac{dz}{dw}=e^w=z$ なので

$$\frac{dw}{dz}=\frac{1}{\frac{dz}{dw}}=\frac{1}{z}.\quad すなわち\quad (\mathrm{Log}\,z)'=\frac{1}{z}.\quad \square$$

4.1.2 複素対数関数の定義

対数関数の正則性は、主値に限らず、任意の連続な分枝について成り立つ。

定理 17.2 (対数関数の分枝の正則性)

幅 2π の任意の半開区間 $I = [\alpha, \alpha + 2\pi)$ あるいは $I = (\alpha, \alpha + 2\pi]$ を選んで、$z = re^{i\theta}$ $(r > 0,\ \theta \in I)$ に対して

$$\log z = \log r + i\theta$$

と定めた $\log$ も、$\mathbb{C} \setminus N_\alpha$ (ただし $N_\alpha := \left\{ re^{i\alpha} \mid r \geq 0 \right\}$) に制限すると正則関数になり、

$$(\log z)' = \frac{1}{z}.$$

(この後、このスライドの最後まで、授業で話すのを忘れた。まあいいか。) すでに述べたように、一価関数にした $\log$ を対数関数の分枝と呼ぶが、N_α のように、それを除くことで 1 つの分枝(ぶんし)を "截(き)り出す" ことができる曲線 (普通は半直線や線分を選ぶ) を、**分岐截線**(ぶんきせっせん) (branch cut) と呼ぶ。

(私は「截」という字が覚えられないので、手書きでは branch cut と書くことが多い。)

4.2 冪関数 (power function) z^α

まず、高校数学の復習から始めよう。

実数 a,b について、a^b がつねに定義されるわけではなかった。$a<0$ かつ $b\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ のときは a^b を考えないのが普通である。

「そうだったっけ？」「例えば $(-1)^\pi$ の値は？」これは答えに詰まるのが正しい。高校では定義されていない。

$a>0$ のときは、b が何でも良かった。その場合、次式が成り立つ。

(1) $$a^b=e^{b\log a}.$$

この関係 (1) を用いて、冪関数を複素関数に拡張する。

4.2 冪関数 (power function) z^α

後で冪関数を z^α と書くことになるが、しばらく $p(z,\alpha)$ と書くことにする。($\alpha \in \mathbb{Z}$ のとき、z^α は定義済み。それとの衝突を避けるため。)

$$p(z,\alpha) := e^{\alpha \log z}. \tag{2}$$

この log として、log (無限多価), log (分枝), Log (主値) など色々考えられる。

もちろん log (分枝), Log (主値) を選べば、1 価の正則関数が得られる。以下では、多価関数の

$$\log z = \log r + i(\theta + 2n\pi) \quad (n \in \mathbb{Z};\ \text{ただし } z = re^{i\theta},\ r > 0,\ \theta \in \mathbb{R}\ \text{とする})$$

を選んだ場合を考察する (可能な値をすべて考察する、ということ)。

簡単のため、$\alpha \in \mathbb{R}$ の場合を調べよう。すると

$$p(z,\alpha) = e^{\alpha \log z} = e^{\alpha(\log r + i(\theta + 2n\pi))} = r^\alpha e^{i\alpha\theta} e^{2\pi i n\alpha}.$$

このとき ($i\alpha\theta$, $2\pi i n\alpha$ は純虚数なので $\left|e^{i\alpha\theta}\right| = 1$, $\left|e^{2\pi i n\alpha}\right| = 1$ であるから)

$$|p(z,\alpha)| = r^\alpha \quad (\text{後の記号で} \quad |z^\alpha| = |z|^\alpha). \tag{3}$$

α で場合分けする (整数、整数でない有理数、無理数)。

4.2 冪関数 (power function) z^α

$$(\text{前のスライドから})\quad p(z,\alpha)=r^\alpha e^{i\alpha\theta}e^{2\pi in\alpha}.$$

(a) $\alpha\in\mathbb{Z}$ のとき、$n\alpha\in\mathbb{Z}$. ゆえに $e^{2\pi in\alpha}=1$. ゆえに

$$p(z,\alpha)=r^\alpha e^{i\alpha\theta}=r^\alpha\left(e^{i\theta}\right)^\alpha=\left(re^{i\theta}\right)^\alpha=z^\alpha=\begin{cases}\overbrace{z\times\cdots\times z}^{\alpha\text{ 個}} & (\alpha>0)\\ 1 & (\alpha=0)\\ 1/\underbrace{(z\times\cdots\times z)}_{-\alpha\text{ 個}} & (\alpha<0).\end{cases}$$

注意: 以前 $n\in\mathbb{Z}$ のとき $e^{nz}=(e^z)^n$ を証明してあり、$z=i\theta$ として適用した。

($p(z,\alpha)=z^\alpha$ は、無限多価函数を使って定義しても $p(z,\alpha)$ はこれまで通りの冪乗、ということ。)

(b) $\alpha \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ のとき

(4a) $$\alpha = \frac{q}{p} \quad (p \in \mathbb{N},\ q \in \mathbb{Z},\ p \text{ と } q \text{ は互いに素})$$

と表せる。すると

$$p(z,\alpha) = r^\alpha e^{i\alpha\theta} e^{2\pi i \frac{nq}{p}} = r^\alpha e^{i\alpha\theta}\omega^{nq} \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

ただし

$$\omega := e^{2\pi i/p}.$$

n が $\mathbb{Z}$ を動くとき、nq を p で割った余りには、$0,\ 1,\ \cdots,\ p-1$ すべて現れる [1]。ゆえに

$$\omega^{nq} = 1, \omega, \omega^2, \cdots, \omega^{p-1},$$

(4b) $$p(z,\alpha) = r^\alpha e^{i\alpha\theta}\omega^k \quad (k = 0, 1, \cdots, p-1).$$

これは円周 $|z| = r^\alpha$ の p 等分点である。特に $\alpha = \frac{1}{p}$ のときは、z の p 乗根全体である。

[1] 実際、p と q は互いに素であるから、$(\exists k, \ell \in \mathbb{Z})\ kp + \ell q = 1$. ゆえに任意の $m \in \{0, 1, \cdots, p-1\}$ に対して、$mkp + m\ell q = m$. ゆえに $(m\ell)q$ を p で割った余りは m. $n := m\ell$ とおくと $\omega^{nq} = \omega^{m\ell q} = \omega^{-mkp}\omega^m = \omega^m$.

4.2 冪関数 (power function) z^α

- (c) $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (つまり α は無理数) のとき、$p(z,\alpha)$ は無限個の値を持つ (証明はサボる。用途があまりなさそうなので。コンピューターで計算して納得できる…かも)。 □

まとめると (無限多価 の log を用いて $p(z,\alpha) := e^{\alpha \log z}$ とすると)

- (a) $\alpha \in \mathbb{Z}$ のとき、$p(z,\alpha) = z^\alpha$ (普通の冪). 1 価関数である。
- (b) $\alpha \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, $\alpha = \dfrac{q}{p}$ (既約分数, $p \in \mathbb{N}$) のとき、$p(z,\alpha)$ は p 価関数である。
- (c) $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ のとき、$p(z,\alpha)$ は無限多価関数である。

もちろん、いずれの場合も、$p(z,\alpha) = e^{\alpha \log z}$ と対数関数の分枝 $\log z$ を選ぶことで、1 価関数になる (冪関数の分枝が選べる)。

今後は $p(z,\alpha)$ を z^α と書く。特に $\alpha = \frac{1}{p}$ $(p \in \mathbb{N})$ のとき $\sqrt[p]{z}$ と書くことがある。多価関数と考えるのか、分枝を選んで一価関数と考えるかは case by case である。

2022/11/22 の授業はここまでです。

例 17.3 ($\sqrt{-1}$ は何か？)

(無限多価 の log を用いて $\sqrt{z} = p(z, 1/2) := e^{\frac{1}{2}\log z}$ とする場合)

$(-1) = 1 \cdot e^{\pi i}$ より $\log(-1) = \log 1 + i(\pi + 2n\pi) = (2n+1)\pi i$ ($n \in \mathbb{Z}$) であるから

$$\sqrt{-1} = (-1)^{1/2} = e^{\frac{1}{2}\log(-1)} = e^{\frac{1}{2}(2n+1)\pi i} = e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi i} = i(-1)^n = \pm i.$$

(別法) $\alpha = \frac{1}{2}$, $z = -1$ とすると、$z = 1 \cdot e^{\pi i}$, $\omega = e^{2\pi i/2} = e^{\pi i} = -1$ であるから

$$\sqrt{-1} = z^{1/2} = 1^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}\cdot\pi i} \cdot \omega^k = i \cdot (-1)^k \quad (k = 0, 1)$$

ゆえに

$$\sqrt{-1} = \pm i.$$

4.2 冪関数 (power function) z^α

1 つくらい $\alpha \notin \mathbb{R}$ に対する z^α を求めてみよう。

例 17.4 (i の i 乗)

多分応用はないと思うが、i^i を求めてみよう。i の極形式は $i = 1 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{2}}$ であるから

$$\log i = \log|1| + i\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = \left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi i \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

ゆえに ($a^b = e^{b \log a}$ によって)

$$i^i = e^{i \log i} = e^{i \cdot \left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi i} = e^{-\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi} \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

$p(z, \alpha)$ を図示する Mathematica プログラム

```
p[z_, alpha_, maxn_] := Module[{r, t, w},
  r = Abs[z]; t = Arg[z]; w = r^alpha*Exp[ alpha t];
  Table[{Re[w Exp[I n alpha 2 Pi]], Im[w Exp[I n alpha 2 Pi]]}, {n, maxn}]]
g8=ListPlot[p[1,1/8,8], AspectRatio->Automatic, PlotStyle->{PointSize[0.03]}]
groot2a=ListPlot[p[1, Sqrt[2], 100], AspectRatio -> Automatic]
groot2b=ListPlot[p[1, Sqrt[2], 1000], AspectRatio -> Automatic]
Manipulate[ListPlot[p[1, Sqrt[2], n], AspectRatio -> Automatic], {n, 1, 1000}]
```

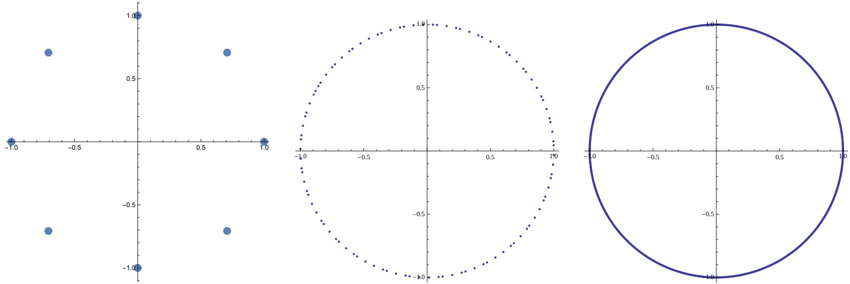


図 2: $p(1, 1/8)$, $p(1, \sqrt{2})$ (100 個), $p(1, \sqrt{2})$ (1000 個)

4.3 初等関数ワールド

三角関数、双曲線関数など、指数関数を用いて表される初等関数が多いが、前項で指数関数の逆関数である対数関数を (複素関数として) 定義したことで、それら初等関数の逆関数が対数関数を用いて表すことが出来る。

例えば

$$\begin{aligned}\sin z = w \Leftrightarrow \quad & \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = w \\ \Leftrightarrow \quad & \text{途中省略} \\ \Leftrightarrow \quad & z = -i \log\left(iw + \sqrt{1 - w^2}\right)\end{aligned}$$

であるから、次のように定義する。

$$\sin^{-1} z = -i \log\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right).$$

これらは、分枝を選んで一価関数にしなければ多価関数である。多価関数を扱うには、「解析接続」を学んでからとりかかるのが良い。この講義では詳細は省略する。

一通り書いておこう。

$$\arcsin z = \sin^{-1} z := -i\log\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right),$$

$$\arccos z = \cos^{-1} z := i\log\left(z - i\sqrt{1-z^2}\right) = \frac{\pi}{2} + i\log\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right),$$

$$\arctan z = \tan^{-1} z := \frac{i}{2}\left(\log(1-iz) - \log(1+iz)\right),$$

$$\mathrm{arcsinh}\, z = \sinh^{-1} z := \log\left(z + \sqrt{z^2+1}\right),$$

$$\mathrm{arccosh}\, z = \cosh^{-1} z := \log\left(z + \sqrt{z^2-1}\right),$$

$$\mathrm{arctahn}\, z = \tanh^{-1} z := \frac{1}{2}\log\frac{1+z}{1-z}.$$

問　次式を確かめよ。

$$(\arcsin z)' = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}},\quad (\arccos z)' = -\frac{1}{\sqrt{1-z^2}},\quad (\arctan z)' = \frac{1}{1+z^2},$$

$$(\mathrm{arcsinh}\, z)' = \frac{1}{\sqrt{z^2+1}},\quad (\mathrm{arccosh}\, z)' = \frac{1}{\sqrt{z^2-1}},\quad (\mathrm{arctahn}\, z)' = \frac{1}{1-z^2}.$$

問　次式を確かめよ。

$$\cosh(iz) = \cos z,\quad \sinh(iz) = i\sin z.$$

いよいよ関数論の佳境の入り口である。実関数のときもそうであったように、微分と積分の両方が絡むと強力である。

(高速道路までの街中の道をトロトロ走って来たが、これからスピードをあげる感じ。景色がどんどん変わる。)

定義 17.5 (線積分)

Ω は $\mathbb{C}$ の開集合、$C: z = \varphi(t)$ $(t \in [\alpha, \beta])$ は Ω 内の区分的に C^1 級の曲線、$f\colon C^* \to \mathbb{C}$ は連続とする。ただし $C^* := \{\varphi(t) \mid t \in [\alpha, \beta]\}$. このとき

$$\int_C f(z)\,dz := \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt \tag{5}$$

とおき、f の曲線 C に沿う**線積分**と呼ぶ。

また

$$\int_C f(z)\,|dz| := \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,|\varphi'(t)|\,dt \tag{6}$$

と定める。

例 17.6

$f(z) = z^2$, $C\colon z = \varphi(\theta) = e^{i\theta}$ $(\theta \in [0, \pi])$ のとき。$\varphi'(\theta) = ie^{i\theta}$ であるから

$$\int_C f(z)\,dz = \int_0^\pi f(\varphi(\theta))\varphi'(\theta)d\theta = \int_0^\pi (e^{i\theta})^2 \cdot ie^{i\theta}\,d\theta = i\int_0^\pi e^{3i\theta}\,d\theta$$
$$= i\left[\frac{e^{3i\theta}}{3i}\right]_0^\pi = \frac{1}{3}\left(e^{3i\pi} - e^{3\cdot 0}\right) = \frac{(-1)-1}{3} = -\frac{2}{3}.$$

例 17.7

$f(z) = \frac{1}{z}$, $C\colon z = \varphi(\theta) = e^{i\theta}$ $(\theta \in [0, 2\pi])$ のとき。$\varphi'(\theta) = ie^{i\theta}$ であるから

$$\int_C f(z)\,dz = \int_0^{2\pi} f(\varphi(\theta))\varphi'(\theta)d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{i\theta}} \cdot ie^{i\theta}\,d\theta = i\int_0^{2\pi} d\theta$$
$$= 2\pi i.$$

注意事項

1. 曲線の始点、終点が一致しても経路は無限にたくさんあるので、実 1 変数関数の積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ のように、始点と終点を指定することでは積分は定まらない。

2. φ は区分的に C^1 級であるから

   $(\exists\{t_j\}_{j=0}^m)\quad \alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = \beta \wedge$ 各小区間 $[t_{j-1}, t_j]$ で φ は C^1 級.

   t_j において φ の片側微分係数は存在するが、微分係数 $\varphi'(t_j)$ は存在しないことがありうる。

   $$\int_C f(z)\,dz := \sum_{j=1}^m \int_{t_{j-1}}^{t_j} f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)\,dt$$

   とみなすべきである。そういう意味では広義積分である。

5.1 線積分の定義

3. $F(t) := f(\varphi(t))\varphi'(t)$ は、実変数の複素数値関数である。複素数値関数の積分が初めてという人がいるかもしれない。実数値関数の積分と同様に Riemann 和の極限として定義しても良いし、

$$\int_\alpha^\beta F(t)\,dt := \int_\alpha^\beta U(t)\,dt + i\int_\alpha^\beta V(t)\,dt \tag{7}$$

のように定義しても良い (ただし $U(t) := \mathrm{Re}\,F(t)$, $V(t) := \mathrm{Im}\,F(t)$)。

$\alpha < \beta$ であれば

$$\left|\int_\alpha^\beta F(t)\,dt\right| \le \int_\alpha^\beta |F(t)|\,dt \tag{8}$$

が成り立つ。Riemann 和で定義する場合は、三角不等式から得られる

$$\left|\sum_j F(t_j)\Delta t_j\right| \le \sum_j |F(t_j)|\,\Delta t_j$$

から証明出来る。(7) で定義する場合はちょっとした演習問題になる。

5.1 線積分の定義

4. (とても良く使う。)

(9) $$\left|\int_C f(z)\,dz\right| \le \int_C |f(z)|\,|dz|.$$

実際、C が $z=\varphi(t)$ $(t\in[\alpha,\beta])$ とすると

$$\left|\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\right| \le \int_\alpha^\beta |f(\varphi(t))\varphi'(t)|\,dt$$

と書き換えられるが、これは (8) によって確かに成立する。
大抵は、この後

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| \le \int_C |f(z)|\,|dz| \le \max_{z\in C^*}|f(z)|\int_C |dz| = \max_{z\in C^*}|f(z)|\times(C\text{ の弧長})$$

と評価することになる。

注 $C^* = C$ の跡 $=\varphi$ の値域 $=\mathrm{Image}\,\varphi = \{\varphi(t)\mid t\in[\alpha,\beta]\}$ である。

注 定義より $\int_C |dz| = \int_\alpha^\beta |\varphi'(t)|\,dt$ であるから、これは C の弧長である。

5.2 原始関数

なぜ線積分が重要か。

複素関数においては、それこそが微分の逆演算と考えることができるものだからである。

定理 17.8 (微積分の基本定理、のようなもの)

Ω は $\mathbb{C}$ の開集合, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は連続で原始関数 F を持つ ($F' = f$)、C は Ω 内の区分的 C^1 級曲線とするとき、

$$\int_C f(z)\,dz = F(b) - F(a). \tag{10}$$

が成り立つ。ただし、a, b はそれぞれ C の始点、終点である。

((10) の右辺を、$[F(z)]_a^b$ や $[F(z)]_{z=a}^{z=b}$ で表す。)

証明　C が $z=\varphi(t)$ ($t\in[\alpha,\beta]$) と表せて、φ が C^1 級である場合、

$$\int_C f(z)\,dz=\int_C F'(z)\,dz=\int_\alpha^\beta F'(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt=\int_\alpha^\beta \frac{d}{dt}F(\varphi(t))\,dt$$
$$=\left[F(\varphi(t))\right]_{t=\alpha}^{t=\beta}=F(\varphi(\beta))-F(\varphi(\alpha))=F(b)-F(a).$$

φ が連続かつ区分的 C^1 級の場合、ある $\{t_j\}_{j=0}^m$ が存在して

$$\alpha=t_0<t_1<\cdots<t_m=\beta,\quad \varphi \text{ は各 } [t_{j-1},t_j] \text{ で } C^1 \text{ 級}.$$

このとき

$$\int_C f(z)\,dz=\sum_{j=1}^m\int_{t_{j-1}}^{t_j}F'(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt=\sum_{j=1}^m\left(F(\varphi(t_j))-F(\varphi(t_{j-1}))\right)$$
$$=F(\varphi(t_m))-F(\varphi(t_0))=F(b)-F(a).$$

(本当はいつもこのように積分範囲を分割して議論すべきだけど、ワンパターンの議論なので、以下では、φ が C^1 級のときの証明だけを書いて済ませることが多い。) □

5.2 原始関数

上の定理は、1 変数実関数の場合とある意味では同じである。しかし、

連続な 1 変数実関数は必ず原始関数を持つ。

$$(\because F(x) := \int_a^x f(t)\,dt \text{ とおくと } F'(x) = f(x))$$

は成り立つが、

連続な 1 変数複素関数は原始関数を持つとは限らない。

ゆえに原始関数が存在することは、仮定として与える必要がある。

(このあたりの事情は、ベクトル解析でも同じである。任意のベクトル場 $\boldsymbol{f}$ に対して、$\boldsymbol{f}$ のポテンシャル ($\nabla F = \boldsymbol{f}$ を満たす F のこと) が存在するとは限らない。もし存在すれば、$\int_C \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r} = F(\boldsymbol{b}) - F(\boldsymbol{a})$.)

前回最後の 2 つの例を見直してみる。

例 17.9 (原始関数が存在すれば楽々計算　例 17.6 再訪)

$f(z) = z^2$, $C\colon z = e^{i\theta}$ $(\theta \in [0, \pi])$ とする。$F(z) := \dfrac{z^3}{3}$ は $F' = f$ を満たす。ゆえに

$$\int_C f(z)\,dz = \left[\frac{z^3}{3}\right]_{z=1}^{z=-1} = \frac{(-1)^3 - 1^3}{3} = -\frac{2}{3} \quad \text{(もちろん前の計算と一致).}$$

例 17.10 (原始関数が存在しない例　例 17.7 再訪)

(前半) $f(z) = \dfrac{1}{z}$ $(z \in \Omega := \mathbb{C} \setminus \{0\})$ とする。f の原始関数は存在しない。実際、もしも原始関数 F が存在すると仮定すると、$C\colon z = e^{i\theta}$ $(\theta \in [0, 2\pi])$ は Ω 内の C^1 級曲線であるから

$$\int_C f(z)\,dz = [F(z)]_{z=1}^{z=1} = F(1) - F(1) = 0.$$

ところが前回見たように $\displaystyle\int_C f(z)\,dz = 2\pi i$ であるから、矛盾が生じる。

5.2 原始関数

そういうわけで、原始関数が存在するかどうかが大事である。

- 多項式の場合は、必ず存在する。
- 収束冪級数の場合は、必ず存在する。
- 有理関数の場合は log が出るケースがある。その場合は存在しないかもしれない。要注意。
- $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\operatorname{Arg} z$, $\bar{z}$ は原始関数を持たない。

例 17.10 (原始関数が存在しない例 (つづき)　例 17.7 再訪)

(後半) $\Omega' := \mathbb{C} \setminus [0,\infty)$ における対数関数の分枝 $\log z$ を、$z = re^{i\theta}$ ($r>0$, $\theta \in (0,2\pi)$) に対して

$$\log z := \log r + i\theta$$

と定める。$F(z) := \log z$ は Ω' で正則であり、$F'(z) = \dfrac{1}{z}$.

$0 < \varepsilon < \pi$ を満たす ε に対して

$$C_\varepsilon : z = e^{i\theta} \quad (\varepsilon \le \theta \le 2\pi - \varepsilon)$$

とおく。C_ε は Ω' 内の C^1 級曲線で

$$\int_{C_\varepsilon} f(z)\,dz = [F(z)]_{z=e^{i\varepsilon}}^{z=e^{i(2\pi-\varepsilon)}} = \log e^{i(2\pi-\varepsilon)} - \log e^{i\varepsilon}$$
$$= (2\pi-\varepsilon)i - i\varepsilon = 2(\pi-\varepsilon)i.$$

$\varepsilon \to +0$ のときの極限 $2\pi i$ が、$\displaystyle\int_C f(z)\,dz = 2\pi i$ に一致するのはもっともらしい。

5.2 原始関数

原始関数が存在しない場合は、例えば例 17.6, 17.7 でやったように、定義に戻って計算すると良い。

例 17.11 (原始関数の存在しない例)

$C: z = (1+2i)t \ (t \in [0,1])$ とする。$f(z) = |z|$ は原始関数を持たない。

$$\int_C |z|\,dz = \int_0^1 \sqrt{t^2 + (2t)^2} \cdot (1+2i)\,dt = (1+2i)\sqrt{5}\int_0^1 |t|\,dt$$
$$= (1+2i)\sqrt{5}\int_0^1 t\,dt = \frac{(1+2i)\sqrt{5}}{2}. \quad \square$$

5.3 曲線に関する用語の定義

曲線のいろは Ω は $\mathbb{C}$ の開集合, $C\colon z = \varphi(t)$ $(t \in [\alpha, \beta])$ は Ω 内の曲線 (i.e. $\varphi\colon [\alpha, \beta] \to \Omega$ 連続) とする。

1. $\varphi([\alpha, \beta]) = \{\varphi(t) \mid t \in [\alpha, \beta]\}$ を C の**像**または**跡**と呼び、C^* と表す。
2. C が C^1 **級**とは、φ が C^1 級 (つまり φ が微分可能で、φ' が連続) であることをいう。
3. C が C^1 **級正則**とは、C が C^1 級かつ $(\forall t \in [\alpha, \beta])$ $\varphi'(t) \neq 0$ であることをいう。(C^* はなめらかで、尖ったりしないし、いきなりバックしたりもしない。)
4. C が**区分的** C^1 **級**とは、ある $\{t_j\}_{j=1}^m$ が存在して、
$$\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = \beta,$$
かつ各 $[t_{j-1}, t_j]$ で φ は C^1 級であることをいう。
5. C が**区分的** C^1 **級正則**とは、ある $\{t_j\}_{j=1}^m$ が存在して、
$$\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = \beta,$$
かつ各 $[t_{j-1}, t_j]$ で φ は C^1 級かつ $\varphi'(t) \neq 0$ (ただし $t = t_{j-1}, t_j$ では片側微分係数である。) であることをいう。

6. C が**閉曲線**とは、$\varphi(\alpha)=\varphi(\beta)$ であることをいう。
7. C が**単純** (Jordan arc) $\Leftrightarrow$ 閉曲線でないときは φ が単射、閉曲線であるときは $[\alpha,\beta)$ で単射であることをいう。
   要するに「自分自身と交わらない」こと。
8. 区分的 C^1 級単純正則閉曲線が**正の向き** $\Leftrightarrow$ 進行方向の左手に C が囲む領域が見える。

実は **Jordan 曲線定理**「平面内の任意の単純閉曲線は、平面を 2 つの領域 (一方は有界、もう一方は非有界) にわけ、曲線の像は両者の境界である。」証明が大変なので、この定理はこの講義では使わない。

例 17.12 (円周)

$C\colon z=c+re^{i\theta}$ $(\theta\in[0,2\pi])$ は、C^1 級正則単純閉曲線である。C の像は中心 c, 半径が r の円周で、C は正の向きである。単に $|z-c|=r$ と書いたら、この曲線のこととみなす (慣習)。

例 17.13 (正方形の周)

図の正方形の周。

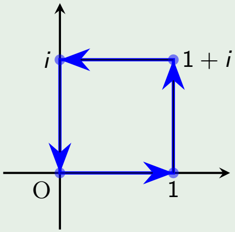


図 3: 正方形の周を正の向きに一周する

$$C\colon z=\varphi(t):=\begin{cases} t & (t\in[0,1]) \\ 1+i(t-1) & (t\in[1,2]) \\ 1+i-(t-2) & (t\in[2,3]) \\ i-i(t-3) & (t\in[3,4]) \end{cases}$$

このとき、$C^*=$ 正方形の周. 区分的に C^1 級正則、単純閉曲線、正の向き。
しかし!! 計算をするときに上の式は使わない (もっと楽な方法がある)。 □

5.3 曲線に関する用語の定義

定義 17.14 (逆向きの曲線 $-C$, 曲線の和 $C_1 + C_2$)

1. 逆向きの曲線 $-C$: $z = \varphi(-t)$ $(t \in [-\beta, -\alpha])$
2. C_1 の終点$=C_2$ の始点のとき。$C_1 + C_2$ を次のように定義する。

$$\varphi(t) := \begin{cases} \varphi_1(t) & t \in [\alpha_1, \beta_1] \\ \varphi_2(t - \beta_1 + \alpha_2) & t \in [\beta_1, \beta_1 + \beta_2 - \alpha_2] \end{cases}$$

教科書は $C_2 C_1$ と表している。これはもっともなところがあるのだけれど…この講義では $C_1 + C_2$ と表す (その方がふつう)。後で終点=始点でない場合にも使う。

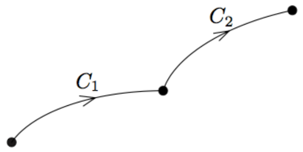


図 4: C_1 の終点 $=$ C_2 の始点ならば $C_1 + C_2$ が作れる

5.4 線積分の性質

定理 17.15 (線積分の性質)

Ω は $\mathbb{C}$ の開集合、$f\colon\Omega\to\mathbb{C}$, $g\colon\Omega\to\mathbb{C}$ は連続、$\lambda\in\mathbb{C}$, C, C_1, C_2 は Ω 内の区分的に C^1 級の曲線とする。このとき次が成り立つ。

1. $\displaystyle\int_C (f(z)+g(z))\,dz = \int_C f(z)\,dz + \int_C g(z)\,dz.$
2. $\displaystyle\int_C \lambda f(z)\,dz = \lambda\int_C f(z)\,dz.$
3. $\displaystyle\left|\int_C f(z)\,dz\right| \le \int_C |f(z)|\,|dz|$ (前回説明済みであるが).
4. $\displaystyle\int_{-C} f(z)\,dz = -\int_C f(z)\,dz.$
5. $\displaystyle\int_{C_1+C_2} f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz.$

証明　(1), (2) は簡単なので省略する。(5) は演習問題とする。

3. 一般に連続関数 $F\colon [\alpha,\beta]\to\mathbb{C}$ に対して,
$$\left|\int_\alpha^\beta F(t)\,dt\right| \le \int_\alpha^\beta |F(t)|\,dt$$
が成り立つことを認めれば、$F(t)=f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$ について適用して、
$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| = \left|\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt\right| \le \int_\alpha^\beta |f(\varphi(t))\varphi'(t)|\,dt = \int_C |f(z)|\,|dz|\,.$$

4. $z=\varphi(-t)$ $(t\in[-\beta,-\alpha])$ とすると、$dz=-\varphi'(-t)dt$ であるから、
$$\int_{-C} f(z)\,dz = \int_{-\beta}^{-\alpha} f(\varphi(-t))\cdot(-\varphi'(-t))dt = \int_{-\alpha}^{-\beta} f(\varphi(-t))\varphi'(-t)\,dt.$$
$s=-t$ とおくと、$t=-\alpha$ のとき $s=\alpha$, $t=-\beta$ のとき $s=\beta$, $dt=-ds$ であるから、
$$\int_{-C} f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta f(\varphi(s))\varphi'(s)\cdot(-1)ds = -\int_C f(z)\,dz. \quad \square$$

5.4 線積分の性質

注意 17.16

孤長要素に関する線積分 $\displaystyle\int_C f(z)\,|dz| = \int_C f\ ds$ についても (1), (2) は成立する。(3), (4) については若干の注意が必要である。例えば

$$\int_{-C} f(z)\,|dz| = \int_C f(z)\,|dz|\,. \quad \square$$

定理 17.17

線積分の値は、曲線の向きを変えないパラメーター付けによらない。

証明.

一般の場合の証明を書くことはサボるが、次の例を検討すると理解できるであろう。 $\square$

例 17.18

次の 5 つの曲線について考える。

$C_1\colon z = e^{i\theta}\ (\theta \in [0, \pi])$
$C_2\colon z = e^{i\pi t}\ (t \in [0, 1])$
$C_3\colon z = e^{i\pi t^2}\ (t \in [0, 1])$
$C_4\colon z = -t + i\sqrt{1-t^2}\ (t \in [-1, 1])$
$C_5\colon z = t + i\sqrt{1-t^2}\ (t \in [-1, 1])$

曲線の像はいずれも、原点を中心とする単位円周の上半分である:

$$C_j^* = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1,\ \mathrm{Im}\, z \geq 0\} \quad (j = 1, 2, 3, 4, 5).$$

$j = 1, \cdots, 4$ に対して C_j の向きは同じ、$C_5 = -C_4$ であるので C_5 は逆向きである。

上の定理を認めると、任意の f に対して $\displaystyle\int_{C_j} f(z)\, dz$ の値は皆同じであり、
$\displaystyle\int_{C_5} f(z)\, dz = -\int_{C_4} f(z)\, dz$ であることが分かる。

例 17.18 (続き)

この例については、直接的な変数変換で示すことができる。

(11) $$\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_0^{\pi} f(e^{i\theta}) \cdot ie^{i\theta}\,d\theta.$$

(11) で、$\theta = \pi t$ と変数変換すると

$$\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_0^1 f(e^{i\pi t}) \cdot ie^{i\pi t} \cdot \pi\,dt = \int_0^1 f(e^{i\pi t}) \cdot i\pi e^{i\pi t}\,dt = \int_{C_2} f(z)\,dz.$$

(11) で、$\theta = \pi t^2$ と変数変換すると

$$\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_0^1 f(e^{i\pi t^t}) \cdot ie^{i\pi t^2} \cdot \pi 2t\,dt = \int_0^1 f(e^{i\pi t}) \cdot 2\pi ie^{i\pi t^2}\,dt = \int_{C_3} f(z)\,dz.$$

以下同様に証明できる。

問 $\displaystyle\int_{C_4} f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz$ であることを示せ。

参考文献