複素関数・同演習 第6回

〜n 乗根 (残り), 複素関数の微分、正則性、Cauchy-Riemann 方程式 〜

桂田 祐史（かつらだ まさし）

https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2022/

2022 年 10 月 5 日

目次

本日の内容・連絡事項

本日の内容・連絡事項

- 講義ノート [1] の §2.4, 2.5 を解説する。
  §2.4 は「〜と同様」ばかりで少しユルい話である (一度真剣に聴けばそれで済むだろう)。
  §2.5 の Cauchy-Riemann 方程式はいよいよ複素関数の本論に突入。目を覚まして聴いて下さい。§2.5 は少し長めの話になります。

本日の内容・連絡事項

- 講義ノート [1] の §2.4, 2.5 を解説する。
  §2.4 は「〜と同様」ばかりで少しユルい話である (一度真剣に聴けばそれで済むだろう)。
  §2.5 の Cauchy-Riemann 方程式はいよいよ複素関数の本論に突入。目を覚まして聴いて下さい。§2.5 は少し長めの話になります。
- 宿題 3 を出します (締め切りは 10 月 13 日 10:50 — 変更しました)。「複素関数演習」のレポートを見て下さい。今回から翌週解説するので、原則提出の遅延は認めません。

1.11.1 ± 1 の n 乗根 (4)

3. $n=5$ のとき。
   $z^5=1$ の解は $z=e^{ik\frac{2\pi}{5}}$ $(k=0,1,\cdots,4)$ であるから、$e^0=1$, $e^{i\frac{2\pi}{5}}$, $e^{i\frac{4\pi}{5}}$, $e^{i\frac{6\pi}{5}}$, $e^{i\frac{8\pi}{5}}$. これらは $\sqrt{\quad}$ を使って表現可能である。

1.11.1 ± 1 の n 乗根 (4)

3. $n = 5$ のとき。
$z^5 = 1$ の解は $z = e^{ik\frac{2\pi}{5}}$ $(k = 0, 1, \cdots, 4)$ であるから、$e^0 = 1$, $e^{i\frac{2\pi}{5}}$, $e^{i\frac{4\pi}{5}}$, $e^{i\frac{6\pi}{5}}$, $e^{i\frac{8\pi}{5}}$. これらは $\sqrt{\quad}$ を使って表現可能である。(以下の計算に注目)
$$z^5 - 1 = (z - 1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1)$$
であるが、

1.11.1 ± 1 の n 乗根 (4)

3. $n = 5$ のとき。
$z^5 = 1$ の解は $z = e^{ik\frac{2\pi}{5}}$ $(k = 0, 1, \cdots, 4)$ であるから、$e^0 = 1$, $e^{i\frac{2\pi}{5}}$, $e^{i\frac{4\pi}{5}}$, $e^{i\frac{6\pi}{5}}$, $e^{i\frac{8\pi}{5}}$. これらは $\sqrt{\quad}$ を使って表現可能である。(以下の計算に注目)

$$z^5 - 1 = (z-1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1)$$

であるが、

$$\begin{aligned} z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0 &\Leftrightarrow z^2 + z + 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + z + \frac{1}{z} - 1 = 0. \end{aligned}$$

1.11.1 ± 1 の n 乗根 (4)

3. $n = 5$ のとき。
$z^5 = 1$ の解は $z = e^{ik\frac{2\pi}{5}}$ $(k = 0, 1, \cdots, 4)$ であるから、$e^0 = 1$, $e^{i\frac{2\pi}{5}}$, $e^{i\frac{4\pi}{5}}$, $e^{i\frac{6\pi}{5}}$, $e^{i\frac{8\pi}{5}}$. これらは $\sqrt{}$ を使って表現可能である。(以下の計算に注目)
$$z^5 - 1 = (z-1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1)$$
であるが、
$$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0 \Leftrightarrow z^2 + z + 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} = 0$$
$$\Leftrightarrow \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + z + \frac{1}{z} - 1 = 0.$$
$X = z + \frac{1}{z}$ とおくと、$X^2 + X - 1 = 0$ で、この解は $X = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

1.11.1 ± 1 の n 乗根 (4)

3. $n=5$ のとき。
$z^5=1$ の解は $z=e^{ik\frac{2\pi}{5}}$ $(k=0,1,\cdots,4)$ であるから、$e^0=1$, $e^{i\frac{2\pi}{5}}$, $e^{i\frac{4\pi}{5}}$, $e^{i\frac{6\pi}{5}}$, $e^{i\frac{8\pi}{5}}$. これらは $\sqrt{}$ を使って表現可能である。(以下の計算に注目)

$$z^5-1=(z-1)(z^4+z^3+z^2+z+1)$$

であるが、

$$\begin{aligned} z^4+z^3+z^2+z+1=0 &\Leftrightarrow z^2+z+1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}=0 \\ &\Leftrightarrow \left(z+\frac{1}{z}\right)^2+z+\frac{1}{z}-1=0. \end{aligned}$$

$X=z+\frac{1}{z}$ とおくと、$X^2+X-1=0$ で、この解は $X=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

$$\begin{aligned} &z+\frac{1}{z}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad \vee \quad z+\frac{1}{z}=\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ \Leftrightarrow\ & 2z^2+(1-\sqrt{5})z+2=0 \quad \vee \quad 2z^2+(1+\sqrt{5})z+2=0. \end{aligned}$$

ゆえに

$$z=1,\ \frac{-(1-\sqrt{5})\pm i\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4},\ \frac{-(1+\sqrt{5})\pm i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}.$$

1.11.1 ±1 の n 乗根 (5)

一方、$z^5=-1$ の解は $z=e^{i\left(\frac{\pi}{5}+k\frac{2\pi}{5}\right)}=e^{i\frac{(2k+1)\pi}{5}}$ $(k=0,1,\cdots,4)$ であるから、$e^{i\frac{\pi}{5}}$, $e^{i\frac{3\pi}{5}}$, $e^{i\frac{5\pi}{5}}=-1$, $e^{i\frac{7\pi}{5}}$, $e^{i\frac{9\pi}{5}}$. これらは $\sqrt{}$ を使って表現可能である。

$$z^5+1=(z+1)(z^4-z^3+z^2-z+1)$$

であるが、

$$\begin{aligned} z^4-z^3+z^2-z+1=0 &\Leftrightarrow z^2-z+1-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}=0 \\ &\Leftrightarrow \left(z+\frac{1}{z}\right)^2-\left(z+\frac{1}{z}\right)-1=0. \end{aligned}$$

$X=z+\frac{1}{z}$ とおくと、$X^2-X-1=0$ で、この解は $X=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

$$\begin{aligned} & z+\frac{1}{z}=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad\vee\quad z+\frac{1}{z}=\frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ \Leftrightarrow\ & 2z^2-(1+\sqrt{5})z+2=0 \quad\vee\quad 2z^2-(1-\sqrt{5})z+2=0. \end{aligned}$$

ゆえに

$$z=-1,\ \frac{(1+\sqrt{5})\pm i\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4},\ \frac{(1-\sqrt{5})\pm i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}.$$

($n=5$ を振り返り: 代数的に解くことで $\frac{2\pi}{5}$, $\frac{\pi}{5}$ の cos, sin が求まるのは注目に値する。)

1.11.1 ± 1 の n 乗根 (6)

1.11.1 ± 1 の n 乗根 (6)

- $n = 6$ のとき。これは宿題にすることがあるので、ここには書かない。

1.11.1 ± 1 の n 乗根 (6)

- $n=6$ のとき。これは宿題にすることがあるので、ここには書かない。
- $n=7$ のとき。
  $z^7=1$ の解は $e^{ik\frac{2\pi}{7}}$ $(k=0,1,\cdots,6)$ であるから、$e^0=1$, $e^{i\frac{2\pi}{7}}$, $e^{i\frac{4\pi}{7}}$, $e^{i\frac{6\pi}{7}}$, $e^{i\frac{8\pi}{7}}$, $e^{i\frac{10\pi}{7}}$, $e^{i\frac{12\pi}{7}}$.
  $z^7=-1$ の解は $e^{i\left(\frac{\pi}{7}+k\frac{2\pi}{7}\right)}=e^{i\frac{(2k+1)\pi}{7}}$ $(k=0,1,\cdots,6)$ であるから、$e^{i\frac{\pi}{7}}$, $e^{i\frac{3\pi}{7}}$, $e^{i\frac{5\pi}{7}}$, $e^{i\frac{7\pi}{7}}=-1$, $e^{i\frac{9\pi}{7}}$, $e^{i\frac{11\pi}{7}}$, $e^{i\frac{13\pi}{7}}$.
  これらは (1, -1 を除いて)、$\sqrt{\quad}$ を使うことで表せないことが知られている (そういう問題を一般的に解決したのは Gauss である)。

- $n = 6$ のとき。これは宿題にすることがあるので、ここには書かない。
- $n = 7$ のとき。
  $z^7 = 1$ の解は $e^{ik\frac{2\pi}{7}}$ $(k = 0, 1, \cdots, 6)$ であるから、$e^0 = 1$, $e^{i\frac{2\pi}{7}}$, $e^{i\frac{4\pi}{7}}$, $e^{i\frac{6\pi}{7}}$, $e^{i\frac{8\pi}{7}}$, $e^{i\frac{10\pi}{7}}$, $e^{i\frac{12\pi}{7}}$.
  $z^7 = -1$ の解は $e^{i\left(\frac{\pi}{7}+k\frac{2\pi}{7}\right)} = e^{i\frac{(2k+1)\pi}{7}}$ $(k = 0, 1, \cdots, 6)$ であるから、$e^{i\frac{\pi}{7}}$, $e^{i\frac{3\pi}{7}}$, $e^{i\frac{5\pi}{7}}$, $e^{i\frac{7\pi}{7}} = -1$, $e^{i\frac{9\pi}{7}}$, $e^{i\frac{11\pi}{7}}$, $e^{i\frac{13\pi}{7}}$.
  これらは (1, −1 を除いて)、$\sqrt{}$ を使うことで表せないことが知られている (そういう問題を一般的に解決したのは Gauss である)。
- $n = 8$ のとき。これも宿題にすることがあるので、ここには書かない。 □

1.11.2 よくあるよくない解答

この講義では、n 乗根を求めなさい、という問題について、特に指定をしない限り、定理 5.3 の公式に当てはめて求めれば OK、とする。(2 次方程式の問題で、解の公式に代入して解を求めれば良い、というのに似ている。場合によっては、解の公式を導出させる問題があるかもしれないが、一方で公式を正確に使えることも重要である。)

1.11.2 よくあるよくない解答

この講義では、n 乗根を求めなさい、という問題について、特に指定をしない限り、定理 5.3 の公式に当てはめて求めれば OK、とする。(2 次方程式の問題で、解の公式に代入して解を求めれば良い、というのに似ている。場合によっては、解の公式を導出させる問題があるかもしれないが、一方で公式を正確に使えることも重要である。)

ところが次のような答案を書いて悩ませてくれる人が少なくない。例えば「$z^5 = 1$ の解を求めよ」という問に対して

$$z^5 = 1 = 1e^{i\cdot 0} = e^{2k\pi i} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

であるから

$$z = e^{\frac{2k\pi i}{5}} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

ゆえに

$$z = e^{\frac{2k\pi i}{5}} \quad (k = 0, 1, 2, 3, 4).$$

1.11.2 よくあるよくない解答

この講義では、n 乗根を求めなさい、という問題について、特に指定をしない限り、定理 5.3 の公式に当てはめて求めれば OK、とする。(2 次方程式の問題で、解の公式に代入して解を求めれば良い、というのに似ている。場合によっては、解の公式を導出させる問題があるかもしれないが、一方で公式を正確に使えることも重要である。)

ところが次のような答案を書いて悩ませてくれる人が少なくない。例えば「$z^5 = 1$ の解を求めよ」という問に対して

$$z^5 = 1 = 1e^{i\cdot 0} = e^{2k\pi i} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

であるから

$$z = e^{\frac{2k\pi i}{5}} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

ゆえに

$$z = e^{\frac{2k\pi i}{5}} \quad (k = 0, 1, 2, 3, 4).$$

これは結果は正しいけれど、論理が破綻しているので (「行間を埋められますか？」と尋ねたくなる) 非常に抵抗を感じて、減点したくなって来る。

1.11.3 補足 $\sqrt[n]{c}$ という記号について

(混乱する人がいるかもしれないので、1 枚にまとめてみる。)

1.11.3 補足 $\sqrt[n]{c}$ という記号について

(混乱する人がいるかもしれないので、1 枚にまとめてみる。)

$c \in \mathbb{R}$ の場合は、記号 $\sqrt[n]{c}$ について、多くの人が認めるルールがある。

1.11.3 補足 $\sqrt[n]{c}$ という記号について

(混乱する人がいるかもしれないので、1 枚にまとめてみる。)

$c \in \mathbb{R}$ の場合は、記号 $\sqrt[n]{c}$ について、多くの人が認めるルールがある。

- n が奇数のとき、任意の実数 c に対して $x^n = c$ を満たす実数 x がただ一つ存在する。それを $\sqrt[n]{c}$ で表す。

1.11.3 補足 $\sqrt[n]{c}$ という記号について

(混乱する人がいるかもしれないので、1 枚にまとめてみる。)

$c \in \mathbb{R}$ の場合は、記号 $\sqrt[n]{c}$ について、多くの人が認めるルールがある。

- n が奇数のとき、任意の実数 c に対して $x^n = c$ を満たす実数 x がただ一つ存在する。それを $\sqrt[n]{c}$ で表す。
- n が偶数のとき、任意の $c \geq 0$ に対して、$x^n = c$ を満たす実数 $x \geq 0$ がただ一つ存在する。それを $\sqrt[n]{c}$ で表す。

1.11.3 補足 $\sqrt[n]{c}$ という記号について

(混乱する人がいるかもしれないので、1 枚にまとめてみる。)

$c \in \mathbb{R}$ の場合は、記号 $\sqrt[n]{c}$ について、多くの人が認めるルールがある。

- n が奇数のとき、任意の実数 c に対して $x^n = c$ を満たす実数 x がただ一つ存在する。それを $\sqrt[n]{c}$ で表す。
- n が偶数のとき、任意の $c \geq 0$ に対して、$x^n = c$ を満たす実数 $x \geq 0$ がただ一つ存在する。それを $\sqrt[n]{c}$ で表す。

  $c < 0$ のときは？$n = 2$ のとき $\sqrt[n]{c} = \sqrt{c} = \sqrt{-c}i$ とするのが、高校数学のルールであったが、この講義では $\sqrt[n]{c}$ の一般的定義はしないことにする ($n = 2$ のときの真似 (？) をして、$\sqrt[n]{|c|}e^{i\pi/n}$ と定義する手はあるが…)。

1.11.3 補足 $\sqrt[n]{c}$ という記号について

(混乱する人がいるかもしれないので、1 枚にまとめてみる。)

$c \in \mathbb{R}$ の場合は、記号 $\sqrt[n]{c}$ について、多くの人が認めるルールがある。

- n が奇数のとき、任意の実数 c に対して $x^n = c$ を満たす実数 x がただ一つ存在する。それを $\sqrt[n]{c}$ で表す。
- n が偶数のとき、任意の $c \geq 0$ に対して、$x^n = c$ を満たす実数 $x \geq 0$ がただ一つ存在する。それを $\sqrt[n]{c}$ で表す。

  $c < 0$ のときは？$n = 2$ のとき $\sqrt[n]{c} = \sqrt{c} = \sqrt{-c}i$ とするのが、高校数学のルールであったが、この講義では $\sqrt[n]{c}$ の一般的定義はしないことにする ($n = 2$ のときの真似 (？) をして、$\sqrt[n]{|c|}e^{i\pi/n}$ と定義する手はあるが…)。

c が虚数のとき、$\sqrt[n]{c}$ が、c の n 個の n 乗根のうちどれを表すか決めるための、一般的に使える良いルールがない。だからこの講義では無理にルールは決めないことにする。後で $w = \sqrt[n]{z}$ という関数の話をするので、そのときもう一度取り上げる。$\sqrt[n]{c}$ を使うときは、その都度適当なルールを選ぶこと。

1.11.3 補足 $\sqrt[n]{c}$ という記号について

(混乱する人がいるかもしれないので、1 枚にまとめてみる。)

$c \in \mathbb{R}$ の場合は、記号 $\sqrt[n]{c}$ について、多くの人が認めるルールがある。

- n が奇数のとき、任意の実数 c に対して $x^n = c$ を満たす実数 x がただ一つ存在する。それを $\sqrt[n]{c}$ で表す。
- n が偶数のとき、任意の $c \geq 0$ に対して、$x^n = c$ を満たす実数 $x \geq 0$ がただ一つ存在する。それを $\sqrt[n]{c}$ で表す。

  $c < 0$ のときは？$n = 2$ のとき $\sqrt[n]{c} = \sqrt{c} = \sqrt{-c}i$ とするのが、高校数学のルールであったが、この講義では $\sqrt[n]{c}$ の一般的定義はしないことにする ($n = 2$ のときの真似 (？) をして、$\sqrt[n]{|c|}e^{i\pi/n}$ と定義する手はあるが…)。

c が虚数のとき、$\sqrt[n]{c}$ が、c の n 個の n 乗根のうちどれを表すか決めるための、一般的に使える良いルールがない。だからこの講義では無理にルールは決めないことにする。後で $w = \sqrt[n]{z}$ という関数の話をするので、そのときもう一度取り上げる。$\sqrt[n]{c}$ を使うときは、その都度適当なルールを選ぶこと。

2 次方程式の解の公式を使う場合、($\pm\sqrt{D}$ の形なので) どのルールでも問題ない。

1.11.3 補足 $\sqrt[n]{c}$ という記号について　Cardano の公式の場合

(話が細かいので、スルー可。Cardano の公式に興味がある人、前のスライドで $\sqrt[n]{c}$ の定義についてうるさいことを言っているけれど必要があるの?、という人は読んで下さい。)

(話が細かいので、スルー可。Cardano の公式に興味がある人、前のスライドで $\sqrt[n]{c}$ の定義についてうるさいことを言っているけれど必要があるの?、という人は読んで下さい。)

具体的な問題として、3 次方程式 $x^3+px+q=0$ に対する Cardano の公式

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{-\Delta}{108}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{-\Delta}{108}}},\quad \Delta:=-\left(27q^2+4p^3\right) \tag{1}$$

を取り上げる。簡単のため、まず $p,\ q\in\mathbb{R}$ の場合を考える。

(話が細かいので、スルー可。Cardano の公式に興味がある人、前のスライドで $\sqrt[n]{c}$ の定義についてうるさいことを言っているけれど必要があるの?、という人は読んで下さい。)

具体的な問題として、3 次方程式 $x^3+px+q=0$ に対する Cardano の公式

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{-\Delta}{108}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{-\Delta}{108}}},\quad \Delta:=-\left(27q^2+4p^3\right) \tag{1}$$

を取り上げる。簡単のため、まず $p, q\in\mathbb{R}$ の場合を考える。

$\Delta\le 0$ の場合は、$\sqrt{\text{非負実数}}$ と $\sqrt[3]{\text{実数}}$ しか出て来ない。前のスライドに書いたルールで解釈して問題がない (ことが分かる)。

(話が細かいので、スルー可。Cardano の公式に興味がある人、前のスライドで $\sqrt[n]{c}$ の定義についてうるさいことを言っているけれど必要があるの?、という人は読んで下さい。)

具体的な問題として、3 次方程式 $x^3+px+q=0$ に対する Cardano の公式

$$(1)\qquad x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{-\Delta}{108}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{-\Delta}{108}}},\quad \Delta:=-\left(27q^2+4p^3\right)$$

を取り上げる。簡単のため、まず $p,\ q\in\mathbb{R}$ の場合を考える。

$\Delta\le 0$ の場合は、$\sqrt{\text{非負実数}}$ と $\sqrt[3]{\text{実数}}$ しか出て来ない。前のスライドに書いたルールで解釈して問題がない (ことが分かる)。

$\Delta>0$ の場合は、$\sqrt{\text{負の実数}}$ と $\sqrt[3]{\text{虚数}}$ が現れて、その値をどう選択するか問題となる。(1) に 2 つある $\sqrt[3]{\ }$ の値は、$\sqrt[3]{\ }\sqrt[3]{\ }=-\frac{p}{3}$ を満たすように選ばないと、x は 3 次方程式の解にならない。それを考えると、(1) はむしろ

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{-\Delta}{108}}}+\frac{-p}{3\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{-\Delta}{108}}}}$$

と書く方がいいのかもしれない (もちろん $\sqrt[3]{\ }=\sqrt[3]{\ }$ とする)。

(話が細かいので、スルー可。Cardano の公式に興味がある人、前のスライドで $\sqrt[n]{c}$ の定義についてうるさいことを言っているけれど必要があるの?、という人は読んで下さい。)

具体的な問題として、3 次方程式 $x^3+px+q=0$ に対する Cardano の公式

$$(1)\qquad x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{-\Delta}{108}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{-\Delta}{108}}},\quad \Delta:=-\left(27q^2+4p^3\right)$$

を取り上げる。簡単のため、まず $p,\ q\in\mathbb{R}$ の場合を考える。

$\Delta\le 0$ の場合は、$\sqrt{\text{非負実数}}$ と $\sqrt[3]{\text{実数}}$ しか出て来ない。前のスライドに書いたルールで解釈して問題がない (ことが分かる)。

$\Delta>0$ の場合は、$\sqrt{\text{負の実数}}$ と $\sqrt[3]{\text{虚数}}$ が現れて、その値をどう選択するか問題となる。(1) に 2 つある $\sqrt[3]{\ }$ の値は、$\sqrt[3]{\ }\sqrt[3]{\ }=-\frac{p}{3}$ を満たすように選ばないと、x は 3 次方程式の解にならない。それを考えると、(1) はむしろ

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{-\Delta}{108}}}+\frac{-p}{3\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{-\Delta}{108}}}}$$

と書く方がいいのかもしれない (もちろん $\sqrt[3]{\ }=\sqrt[3]{\ }$ とする)。

$p,\ q$ が虚数の場合も、$\sqrt[3]{\ }$ の値の選択をきちんとすれば、(1) の x は解となる。

余談1: 定木とコンパスによる正 n 角形の作図 (円周の等分)

以上の話は、定木とコンパスによる正 n 角形の作図と関係がある。

[1] $\cos\dfrac{2\pi}{17}=\dfrac{1}{16}\left(-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}+2\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}}\right)=0.932472229404355\cdots.$

余談1: 定木とコンパスによる正 n 角形の作図 (円周の等分)

以上の話は、定木とコンパスによる正 n 角形の作図と関係がある。Gauss (1777–1855) は、定木とコンパスで正 n 角形が作図できるためには、n が

$$n = 2^k \times \text{相異なるフェルマー素数 } F_m \text{ の積}$$

の形をしていることが必要十分であることを証明し (1801 年発表)、$n = 17 = F_2$ のときの作図法を示した (発見は 1796 年)。

[1] $\cos\dfrac{2\pi}{17} = \dfrac{1}{16}\left(-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}+2\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}}\right) =$ $0.932472229404355\cdots$.

余談 1: 定木とコンパスによる正 n 角形の作図 (円周の等分)

以上の話は、定木とコンパスによる正 n 角形の作図と関係がある。Gauss (1777–1855) は、定木とコンパスで正 n 角形が作図できるためには、n が

$$n = 2^k \times \text{相異なるフェルマー素数 } F_m \text{ の積}$$

の形をしていることが必要十分であることを証明し (1801 年発表)、$n = 17 = F_2$ のときの作図法を示した (発見は 1796 年)。つまり正 17 角形は作図可能である [1]。これは有名な話で多くの本に載っているが、参考文献として、高木 [2], 栗原 [3] をあげておく。

[1] $\cos\dfrac{2\pi}{17} = \dfrac{1}{16}\left(-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}+2\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}}\right) = 0.932472229404355\cdots.$

余談 1: 定木とコンパスによる正 n 角形の作図 (円周の等分)

以上の話は、定木とコンパスによる正 n 角形の作図と関係がある。Gauss (1777–1855) は、定木とコンパスで正 n 角形が作図できるためには、n が

$$n = 2^k \times \text{相異なるフェルマー素数 } F_m \text{ の積}$$

の形をしていることが必要十分であることを証明し (1801 年発表)、$n = 17 = F_2$ のときの作図法を示した (発見は 1796 年)。つまり正 17 角形は作図可能である [1]。これは有名な話で多くの本に載っているが、参考文献として、高木 [2], 栗原 [3] をあげておく。

フェルマー素数とは、**フェルマー数** $F_m := 2^{2^m} + 1$ のうち、素数であるもののことである。$F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$, $F_4 = 65537$ はフェルマー素数であるが、F_5 は素数でない ($F_5 = 4294967297 = 641 \times 6700417$ と素因数分解出来ることを Euler (1707–1783) が発見した)。

定木とコンパスで作図可能となる n は、小さい順に $n = 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, \cdots$. □

定規とコンパスで任意の角の二等分ができるので 2^k がつくが、任意の角の三等分は出来ないので、2 つ以上の 3 があったら出来ない。

---

[1] $\cos\dfrac{2\pi}{17} = \dfrac{1}{16}\left(-1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + 2\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}\right) = 0.932472229404355\cdots$.

余談 2: $\sin 1^\circ$, $\cos 1^\circ$ を求めて

高校で、30°, 45°, 60° の sin, cos の値を学んだ。正五角形の作図も良く出て来る問題で、36°, 72° の sin, cos の値も求めたことがあるかもしれない (大学入試のネタになるし、± 1 の 5 乗根にも現れる)。これらは $\sqrt{\ }$ を使って表せる。

余談 2: $\sin 1^\circ$, $\cos 1^\circ$ を求めて

高校で、30°, 45°, 60° の sin, cos の値を学んだ。正五角形の作図も良く出て来る問題で、36°, 72° の sin, cos の値も求めたことがあるかもしれない (大学入試のネタになるし、± 1 の 5 乗根にも現れる)。これらは $\sqrt{\ }$ を使って表せる。

半角の公式を使うと、18°, 15° の sin, cos も $\sqrt{\ }$ で表せる。加法定理を使うと、$18^\circ - 15^\circ = 3^\circ$ の sin, cos も $\sqrt{\ }$ で表せることが分かる。

余談 2: $\sin 1^\circ$, $\cos 1^\circ$ を求めて

高校で、30°, 45°, 60° の sin, cos の値を学んだ。正五角形の作図も良く出て来る問題で、36°, 72° の sin, cos の値も求めたことがあるかもしれない (大学入試のネタになるし、± 1 の 5 乗根にも現れる)。これらは $\sqrt{}$ を使って表せる。

半角の公式を使うと、18°, 15° の sin, cos も $\sqrt{}$ で表せる。加法定理を使うと、$18^\circ - 15^\circ = 3^\circ$ の sin, cos も $\sqrt{}$ で表せることが分かる。

それでは 1° の sin, cos はどうだろう？もしこれが $\sqrt{}$ で表されれば、任意の自然数 n に対して n° の sin, cos が $\sqrt{}$ で表される。

余談 2: $\sin 1^\circ$, $\cos 1^\circ$ を求めて

高校で、30°, 45°, 60° の sin, cos の値を学んだ。正五角形の作図も良く出て来る問題で、36°, 72° の sin, cos の値も求めたことがあるかもしれない (大学入試のネタになるし、± 1 の 5 乗根にも現れる)。これらは $\sqrt{}$ を使って表せる。

半角の公式を使うと、18°, 15° の sin, cos も $\sqrt{}$ で表せる。加法定理を使うと、$18^\circ - 15^\circ = 3^\circ$ の sin, cos も $\sqrt{}$ で表せることが分かる。

それでは 1° の sin, cos はどうだろう？もしこれが $\sqrt{}$ で表されれば、任意の自然数 n に対して n° の sin, cos が $\sqrt{}$ で表される。

この問題は、「角の三等分」とも関係があり、(結論を天下りに述べると) 1° の sin, cos を $\sqrt{}$ で表すことは出来ないことが知られている。

余談2: $\sin 1^\circ$, $\cos 1^\circ$ を求めて

高校で、30°, 45°, 60° の sin, cos の値を学んだ。正五角形の作図も良く出て来る問題で、36°, 72° の sin, cos の値も求めたことがあるかもしれない (大学入試のネタになるし、± 1 の 5 乗根にも現れる)。これらは $\sqrt{}$ を使って表せる。

半角の公式を使うと、18°, 15° の sin, cos も $\sqrt{}$ で表せる。加法定理を使うと、$18^\circ - 15^\circ = 3^\circ$ の sin, cos も $\sqrt{}$ で表せることが分かる。

それでは 1° の sin, cos はどうだろう?もしこれが $\sqrt{}$ で表されれば、任意の自然数 n に対して n° の sin, cos が $\sqrt{}$ で表される。

この問題は、「角の三等分」とも関係があり、(結論を天下りに述べると) 1° の sin, cos を $\sqrt{}$ で表すことは出来ないことが知られている。

アル・カーシー (ジャムシード・ギヤースッディーン・アル・カーシー, 1380–1429, ペルシャの数学者・天文学者) は、3 次方程式 $\sin 3^\circ = 3x - 4x^3$ を数値的に解くことによって ($\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$ に注意)、$\sin 1^\circ$ を求めた (カッツ [4])。

遊び (脱線) の時間: Mathematica で $z^n = c$ を解く

Mathematica で 3 乗根を求めてみよう。$z^3 = i$ を解くには

```
ComplexExpand[Solve[z^3==I,z]]
```

あるいは $((x + yi)^3 = i$ を解くことにして)

```
Solve[{x^3-3x y^2==0,3x^2 y-y^3==1},{x,y},Reals]
```

この解は実数の $\sqrt[3]{\ }$ で表せる ($z = -i$, $\dfrac{\pm\sqrt{3} + i}{2}$)。

遊び (脱線) の時間: Mathematica で $z^n=c$ を解く

Mathematica で 3 乗根を求めてみよう。$z^3=i$ を解くには

```
ComplexExpand[Solve[z^3==I,z]]
```

あるいは $((x+yi)^3=i$ を解くことにして)

```
Solve[{x^3-3x y^2==0,3x^2 y-y^3==1},{x,y},Reals]
```

この解は実数の $\sqrt[3]{\ }$ で表せる ($z=-i,\ \dfrac{\pm\sqrt{3}+i}{2}$)。

ところが $z^3=\frac{\sqrt{3}+i}{2}$ はうまく行かない。(この辺は角の三等分とも関係する。30° の三等分は、実数の $\sqrt[3]{\ }$, $\sqrt{\ }$ では表せない。三角関数を使って答えを表す。)

遊び (脱線) の時間: Mathematica で $z^n = c$ を解く

Mathematica で 3 乗根を求めてみよう。$z^3 = i$ を解くには

```
ComplexExpand[Solve[z^3==I,z]]
```

あるいは ($(x+yi)^3 = i$ を解くことにして)

```
Solve[{x^3-3x y^2==0,3x^2 y-y^3==1},{x,y},Reals]
```

この解は実数の $\sqrt[3]{\ }$ で表せる ($z = -i, \dfrac{\pm\sqrt{3}+i}{2}$)。

ところが $z^3 = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$ はうまく行かない。(この辺は角の三等分とも関係する。30° の三等分は、実数の $\sqrt[3]{\ }$, $\sqrt{\ }$ では表せない。三角関数を使って答えを表す。)

一方、これを書いているときに気づいたのだけど、今の Mathematica は、$z^{17} = 1$ を $\sqrt{\ }$ で解けるようになっている (Mathematica 12 で確認)。

```
ComplexExpand[Solve[z^17==1,z]]
ToRadicals[%]
```

(そのうち Mathematica が $z^{257} = 1$ を解けるようになるだろうか？)

遊び (脱線) の時間: Mathematica で $z^n = c$ を解く

前のスライドの最後の結果はごちゃごちゃしているけれど、本当に 17 等分点だろうか？

```
g0 = ContourPlot[x^2 + y^2 == 1, {x, -1, 1}, {y, -1, 1}]
plotpoints[l_]:=Show[g0,ListPlot[l,PlotStyle->Directive[Red,PointSize[Large]]]]
points17={Re[z],Im[z]}/.ToRadicals[ComplexExpand[Solve[z^17==1,z]]]
regular17gon=plotpoints[points17]
```

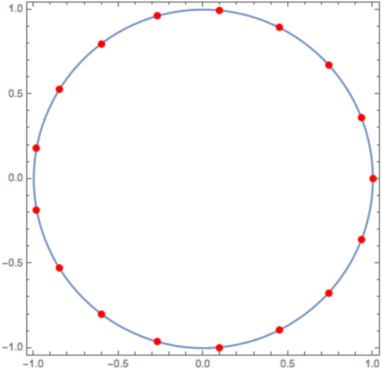

図 1: $z^{17} = 1$ の解を図示

1.12 $\mathbb{C}$ の距離、複素数列の収束

一言でまとめると: $\mathbb{R}^2$ **と同じ**。

1.12 $\mathbb{C}$ の距離、複素数列の収束

一言でまとめると: $\mathbb{R}^2$ **と同じ**。複素数列の収束は $\mathbb{R}^2$ の点列の収束と同じで、実部・虚部の作る数列の収束と同じ。$\mathbb{R}^2$ については「知っている」ことになっているので、$\mathbb{C}$ についても「同様に分かる」ことにする。

1.12 $\mathbb{C}$ の距離、複素数列の収束

一言でまとめると: $\mathbb{R}^2$ **と同じ**。複素数列の収束は $\mathbb{R}^2$ の点列の収束と同じで、実部・虚部の作る数列の収束と同じ。$\mathbb{R}^2$ については「知っている」ことになっているので、$\mathbb{C}$ についても「同様に分かる」ことにする。

任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して、$z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ となる x, y を取って、$\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とおくと、$\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^2$ であり

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = |\boldsymbol{z}|.$$

これから、$\mathbb{C}$ における 2 点の距離と、$\mathbb{R}^2$ における対応する 2 点の距離は等しい:

$$|z_1 - z_2| = |\boldsymbol{z}_1 - \boldsymbol{z}_2|.$$

$\mathbb{C}$ と $\mathbb{R}^2$ は距離まで込めて対応している。

1.12 $\mathbb{C}$ の距離、複素数列の収束

一言でまとめると: $\mathbb{R}^2$ **と同じ**。複素数列の収束は $\mathbb{R}^2$ の点列の収束と同じで、実部・虚部の作る数列の収束と同じ。$\mathbb{R}^2$ については「知っている」ことになっているので、$\mathbb{C}$ についても「同様に分かる」ことにする。

任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して、$z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ となる x, y を取って、$\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とおくと、$\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^2$ であり

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = |\boldsymbol{z}|.$$

これから、$\mathbb{C}$ における 2 点の距離と、$\mathbb{R}^2$ における対応する 2 点の距離は等しい:

$$|z_1 - z_2| = |\boldsymbol{z}_1 - \boldsymbol{z}_2|.$$

$\mathbb{C}$ と $\mathbb{R}^2$ は距離まで込めて対応している。

複素数列 $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $c \in \mathbb{C}$ に対して、

$$x_n := \mathrm{Re}\, z_n,\ \ y_n := \mathrm{Im}\, z_n,\ \ \boldsymbol{z_n} := \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix},\ \ a := \mathrm{Re}\, c,\ \ b := \mathrm{Im}\, c,\ \ \boldsymbol{c} := \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

とおくと、$\{\boldsymbol{z}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は $\mathbb{R}^2$ の点列, $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^2$ であり、

$$\lim_{n\to\infty} z_n = c \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \lim_{n\to\infty} |z_n - c| = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} |\boldsymbol{z}_n - \boldsymbol{c}| = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{z}_n = \boldsymbol{c}$$
$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = a \wedge \lim_{n\to\infty} y_n = b.$$

2 複素関数とその極限、連続性、正則性

2.1 複素関数の実部・虚部

いよいよ複素関数を調べ始めよう。

いよいよ複素関数を調べ始めよう。

定義 6.1 (複素関数の実部・虚部)

$\Omega \subset \mathbb{C}$ とする。関数 $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ に対して、f の**実部** u, **虚部** v を

$$u(x,y) := \operatorname{Re} f(x+yi), \quad v(x,y) := \operatorname{Im} f(x+yi) \quad ((x,y) \in \widetilde{\Omega}). \tag{2}$$

で定める。ただし

$$\widetilde{\Omega} := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x+yi \in \Omega\right\}. \tag{3}$$

$u\colon \widetilde{\Omega} \to \mathbb{R}$, $v\colon \widetilde{\Omega} \to \mathbb{R}$ である。(メモ: 面倒がらずに $\widetilde{\Omega}$ は図を描いて説明すること。)

こうして実部・虚部に分解してしまえば、極限と連続性については、実 2 変数の関数のそれと同じである (数学解析を復習すると良い。桂田 [5] を見よ。)。

例 6.2

1. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^2$ とするとき

例 6.2

1. $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^2$ とするとき $(\Omega = \mathbb{C}, \widetilde{\Omega} = \mathbb{R}^2)$

$$f(x+yi) = (x+yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi.$$

例 6.2

1. $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^2$ とするとき ($\Omega = \mathbb{C}$, $\widetilde{\Omega} = \mathbb{R}^2$)

$$f(x+yi) = (x+yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi.$$

ゆえに

$$u(x,y) = x^2 - y^2, \quad v(x,y) = 2xy.$$

例 6.2

1. $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^2$ とするとき ($\Omega = \mathbb{C}$, $\widetilde{\Omega} = \mathbb{R}^2$)
$$f(x+yi) = (x+yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi.$$
ゆえに
$$u(x,y) = x^2 - y^2, \quad v(x,y) = 2xy.$$
2. $f\colon \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \dfrac{1}{z}$ とするとき ($\Omega = \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $\widetilde{\Omega} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$)

例 6.2

1. $f\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $f(z)=z^2$ とするとき ($\Omega=\mathbb{C}$, $\widetilde{\Omega}=\mathbb{R}^2$)
$$f(x+yi)=(x+yi)^2=x^2-y^2+2xyi.$$
ゆえに
$$u(x,y)=x^2-y^2,\quad v(x,y)=2xy.$$
2. $f\colon \mathbb{C}\setminus\{0\}\to\mathbb{C}$, $f(z)=\dfrac{1}{z}$ とするとき ($\Omega=\mathbb{C}\setminus\{0\}$, $\widetilde{\Omega}=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$)
$$f(x+yi)=\frac{1}{x+yi}=\frac{x-yi}{(x+yi)(x-yi)}=\frac{x-yi}{x^2+y^2}.$$

例 6.2

1. $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^2$ とするとき ($\Omega = \mathbb{C}$, $\widetilde{\Omega} = \mathbb{R}^2$)

$$f(x+yi) = (x+yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi.$$

ゆえに

$$u(x,y) = x^2 - y^2, \quad v(x,y) = 2xy.$$

2. $f\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \dfrac{1}{z}$ とするとき ($\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\widetilde{\Omega} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$)

$$f(x+yi) = \frac{1}{x+yi} = \frac{x-yi}{(x+yi)(x-yi)} = \frac{x-yi}{x^2+y^2}.$$

ゆえに

$$u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad v(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}.$$

2.1 複素関数の実部・虚部

例 6.2 (つづき)

3. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = e^z$ とするとき

例 6.2 (つづき)

3. $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = e^z$ とするとき

$$f(x+yi) = e^{x+yi} = e^x(\cos y + i\sin y) = e^x\cos y + ie^x\sin y.$$

例 6.2 (つづき)

3. $f \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = e^z$ とするとき

$$f(x+yi) = e^{x+yi} = e^x(\cos y + i \sin y) = e^x \cos y + i e^x \sin y.$$

ゆえに

$$u(x,y) = e^x \cos y, \quad v(x,y) = e^x \sin y.$$

次回、任意の正則関数 f の実部・虚部 u, v について、Cauchy-Riemann 方程式と呼ばれる微分方程式

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

が成り立つことを証明する。上にあげた例で、この方程式が成り立つことは容易に確認できる。 □

参考文献 I

[1] 桂田祐史：複素関数論ノート, 現象数理学科での講義科目「複素関数」の講義ノート. https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2022/complex2022.pdf (2014〜).

[2] 高木貞治：近世数学史談及雑談, 共立出版 (1946), 1996 年に「近世数学史談・数学雑談 復刻版」として復刻されている。 また 1995 年に岩波文庫に「近世数学史談」が入った。

[3] 栗原将人：ガウスの数論世界をゆく: 正多角形の作図から相互法則・数論幾何へ, 数学書房 (2017/5/15).

[4] ヴィクター J. カッツ：カッツ 数学の歴史, 共立出版 (2005), 上野 健爾・三浦伸夫 監訳, 中根美千代・高橋秀裕・林知宏・大谷卓史・佐藤賢一・東慎一郎・中澤聡 翻訳. 原著は、Victor J. Katz, A History of Mathemaitcs, A: An Introdunction, Second Edition, Addison Wesley Longman (1998).

参考文献 II

[5] 桂田祐史：数学解析, https://m-katsurada.sakura.ne.jp/lecture/kaiseki-2021/kaiseki-2021.pdf (2014 年〜).