In[24]:= (* 2019年度の宿題の検算 *)

In[25]:= (* 問1 (1) の検算をしてみる *)

In[26]:= z1 = 4 - 3 I
虚

Out[26]= $4 - 3\,i$

In[27]:= z2 = 2 + I
虚数

Out[27]= $2 + i$

In[28]:= z1 + z2

Out[28]= $6 - 2\,i$

In[29]:= z1 - z2

Out[29]= $2 - 4\,i$

In[30]:= z1 z2

Out[30]= $11 - 2\,i$

In[31]:= z1 / z2

Out[31]= $1 - 2\,i$

In[32]:= Abs[z1]
絶対値

Out[32]= 5

In[33]:= Re[z1]
実部

Out[33]= 4

In[34]:= Im[z1]
複素数の虚部

Out[34]= -3

In[35]:= Conjugate[z1]
複素共役

Out[35]= $4 + 3\,i$

In[36]:= (* 問1(2) これはあまりすっきり解けない *)
sol = Solve[z^2 == 2 - 3 I, z]
解く 虚数単位

Out[36]= $\{\{z \to -\sqrt{2 - 3\,i}\}, \{z \to \sqrt{2 - 3\,i}\}\}$

In[37]:= sol2 = Solve[{x^2 - y^2 == 2, 2 x y == -3}, {x, y}, Reals]
解く 実数領域

Out[37]= $\{\{x \to \boxed{-1.67\ldots}, y \to \frac{4}{3}\boxed{-1.67\ldots} - \frac{2}{3}\boxed{-1.67\ldots}^3\},$
$\{x \to \boxed{1.67\ldots}, y \to \frac{4}{3}\boxed{1.67\ldots} - \frac{2}{3}\boxed{1.67\ldots}^3\}\}$

In[38]:=
```
ToRadicals[sol2]
```
根基で

Out[38]= $\left\{\left\{x \to -\sqrt{\frac{1}{2}\left(2+\sqrt{13}\right)},\ y \to \frac{\left(2+\sqrt{13}\right)^{3/2}}{3\sqrt{2}} - \frac{2}{3}\sqrt{2\left(2+\sqrt{13}\right)}\right\},\right.$
$\left.\left\{x \to \sqrt{\frac{1}{2}\left(2+\sqrt{13}\right)},\ y \to -\frac{\left(2+\sqrt{13}\right)^{3/2}}{3\sqrt{2}} + \frac{2}{3}\sqrt{2\left(2+\sqrt{13}\right)}\right\}\right\}$

In[39]:=
```
(* 問2 極形式を求めよ → 絶対値 |z| と偏角 arg z を求めよ *)
```

In[40]:=
```
z = -Sqrt[3] - 3 I
```
平方根 虚

Out[40]= $-3\,i - \sqrt{3}$

In[41]:=
```
Abs[z]
```
絶対値

Out[41]= $2\sqrt{3}$

In[42]:=
```
Arg[z]
```
偏角

Out[42]= $-\frac{2\pi}{3}$

In[43]:=
```
(* 問3 1 と -1 の n乗根 *)
```

In[44]:=
```
Clear[z]
```
クリア

In[45]:=
```
Solve[z^3 == I, z]
```
解く 虚数単(

Out[45]= $\{\{z \to -i\},\ \{z \to (-1)^{1/6}\},\ \{z \to (-1)^{5/6}\}\}$

In[46]:=
```
ComplexExpand[%]
```
式の展開

Out[46]= $\left\{\{z \to -i\},\ \left\{z \to \frac{i}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right\},\ \left\{z \to \frac{i}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}\right\}$

In[47]:=
```
Solve[z^6 == 1, z]
```
解く

Out[47]= $\{\{z \to -1\},\ \{z \to 1\},\ \{z \to -(-1)^{1/3}\},\ \{z \to (-1)^{1/3}\},\ \{z \to -(-1)^{2/3}\},\ \{z \to (-1)^{2/3}\}\}$

In[48]:=
```
ComplexExpand[%]
```
式の展開

Out[48]= $\left\{\{z \to -1\},\ \{z \to 1\},\ \left\{z \to -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right\},\right.$
$\left.\left\{z \to \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right\},\ \left\{z \to \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right\},\ \left\{z \to -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right\}\right\}$

In[49]:=
```
Solve[z^6 == -1, z]
```
解く

Out[49]= $\{\{z \to -i\},\ \{z \to i\},\ \{z \to -(-1)^{1/6}\},\ \{z \to (-1)^{1/6}\},\ \{z \to -(-1)^{5/6}\},\ \{z \to (-1)^{5/6}\}\}$

In[50]:=
```
ComplexExpand[%]
```
式の展開

Out[50]= $\left\{\{z \to -i\}, \{z \to i\}, \left\{z \to -\frac{i}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}, \left\{z \to \frac{i}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}, \left\{z \to -\frac{i}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}, \left\{z \to \frac{i}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}\right\}$

In[51]:=
```
(* 問4 正則関数の実部虚部, Cauchy-Riemann 方程式 *)
```

In[52]:=
```
f[z_] := 1/z^2
```

In[53]:=
```
(* ComplexExpand[] という関数を使うと良い *)
```
式の展開

In[54]:=
```
ComplexExpand[f[x + y I]]
```
式の展開 虚数i

Out[54]= $\frac{x^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{2\,i\,x\,y}{(x^2+y^2)^2} - \frac{y^2}{(x^2+y^2)^2}$

In[55]:=
```
u[x_, y_] := Simplify[ComplexExpand[Re[f[x + y I]]]]
```
簡単な… 式の展開 実部 虚数単位

In[56]:=
```
v[x_, y_] := Simplify[ComplexExpand[Im[f[x + y I]]]]
```
簡単な… 式の展開 複素数の虚部 虚数単位

In[57]:=
```
u[x, y]
```

Out[57]= $\frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}$

In[58]:=
```
v[x, y]
```

Out[58]= $-\frac{2\,x\,y}{(x^2+y^2)^2}$

In[59]:=
```
(* u についてはゆっくり *)
```

In[60]:=
```
{D[u[x, y], x], D[u[x, y], y]}
```
微分係数 微分係数

Out[60]= $\left\{-\frac{4\,x\,(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3} + \frac{2\,x}{(x^2+y^2)^2}, -\frac{4\,y\,(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3} - \frac{2\,y}{(x^2+y^2)^2}\right\}$

In[61]:=
```
Simplify[%]
```
簡単な形式に

Out[61]= $\left\{-\frac{2\,x\,(x^2-3\,y^2)}{(x^2+y^2)^3}, \frac{2\,y\,(-3\,x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^3}\right\}$

In[62]:=
```
(* v の方は一気にやってみる *)
```

In[63]:=
```
Simplify[D[v[x, y], {{x, y}}]]
```
簡単な… 微分係数

Out[63]= $\left\{-\frac{2\,y\,(-3\,x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^3}, -\frac{2\,x\,(x^2-3\,y^2)}{(x^2+y^2)^3}\right\}$

In[64]:=
```
f[z_] := (Exp[I z] - Exp[-I z]) / (2 I)
```
… 虚… 指… 虚数単位 虚数

In[65]:=
```
u[x_, y_] := Simplify[ComplexExpand[Re[f[x + y I]]]]
```
簡単な… 式の展開 実部 虚数単位

In[66]:=
```
v[x_, y_] := Simplify[ComplexExpand[Im[f[x + y I]]]]
```
簡単な… 式の展開 複素数の虚部 虚数単位

In[67]:=
```
{u[x, y], v[x, y]}
```

Out[67]= $\left\{\frac{1}{2} e^{-y} \left(1 + e^{2y}\right) \mathrm{Sin}[x],\ \frac{1}{2} e^{-y} \left(-1 + e^{2y}\right) \mathrm{Cos}[x]\right\}$

In[68]:=
```
Simplify[D[u[x, y], {{x, y}}]]
```
簡単な… 微分係数

Out[68]= $\left\{\frac{1}{2} e^{-y} \left(1 + e^{2y}\right) \mathrm{Cos}[x],\ \frac{1}{2} e^{-y} \left(-1 + e^{2y}\right) \mathrm{Sin}[x]\right\}$

In[69]:=
```
Simplify[D[v[x, y], {{x, y}}]]
```
簡単な… 微分係数

Out[69]= $\left\{-\frac{1}{2} e^{-y} \left(-1 + e^{2y}\right) \mathrm{Sin}[x],\ \frac{1}{2} e^{-y} \left(1 + e^{2y}\right) \mathrm{Cos}[x]\right\}$

In[70]:=
```
(* 問6 無限級数に展開する関数はないが、
 一般項を求める SeriesCoefficient[] がある。有限項までの展開ならば Series[] でできる。
 逆に級数の和を Sum[] で計算して元と同じかチェックできる *)
(* (1)(a) *)
f[z_] := 1 / (4 - z)
```
級数の係数 級数展開 総和

In[71]:=
```
Series[f[z], {z, 0, 10}]
```
級数展開

Out[71]= $\frac{1}{4} + \frac{z}{16} + \frac{z^2}{64} + \frac{z^3}{256} + \frac{z^4}{1024} + \frac{z^5}{4096} + \frac{z^6}{16384} + \frac{z^7}{65536} + \frac{z^8}{262144} + \frac{z^9}{1048576} + \frac{z^{10}}{4194304} + O[z]^{11}$

In[72]:=
```
SeriesCoefficient[f[z], {z, 0, n}]
```
級数の係数

Out[72]= $\begin{cases} 4^{-1-n} & n \ge 0 \\ 0 & \mathrm{True} \end{cases}$

In[73]:=
```
Sum[z^n / 4^(n + 1), {n, 0, Infinity}]
```
総和 無限大

Out[73]= $-\frac{1}{-4 + z}$

In[74]:=
```
(* (b) *)
```

In[75]:=
```
g[z_] := 4 / (2 z + 3)
```

In[76]:=
```
SeriesCoefficient[g[z], {z, 0, n}]
```
級数の係数

Out[76]= $\begin{cases} (-1)^n\, 2^{2+n} \times 3^{-1-n} & n \ge 0 \\ 0 & \mathrm{True} \end{cases}$

In[77]:=
```
Sum[4 (-2)^n/3^(n+1) z^n, {n, 0, Infinity}]
```
総和　無限大

Out[77]= $\frac{4}{3+2z}$

In[78]:=
```
(* (c) *)
```

In[79]:=
```
h[z_] := 1/(z-I)^2
```
虚数単位

In[80]:=
```
SeriesCoefficient[h[z], {z, 0, n}]
```
級数の係数

Out[80]= $\begin{cases} -(-i)^n (1+n) & n \geq 0 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$

In[81]:=
```
Sum[(-1)^(n+1) I^n (n+1) z^n, {n, 0, Infinity}]
```
総和　虚数単位　無限大

Out[81]= $\frac{1}{(-i+z)^2}$

In[82]:=
```
(* (d) *)
1 + Sum[z^n/(4^n n), {n, 1, Infinity}]
```
総和　無限大

Out[82]= $1 - \mathrm{Log}\left[\frac{4-z}{4}\right]$

In[83]:=
```
D[%, z]
```
微分係数

Out[83]= $\frac{1}{4-z}$

In[84]:=
```
(* (2) *)
```

In[85]:=
```
F[z_] := 1/(4-z)
```

In[86]:=
```
SeriesCoefficient[F[z], {z, -3, n}]
```
級数の係数

Out[86]= $\begin{cases} 7^{-1-n} & n \geq 0 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$

In[87]:=
```
Sum[(z+3)^n/7^(n+1), {n, 0, Infinity}]
```
総和　無限大

Out[87]= $-\frac{1}{-4+z}$

In[88]:=
```
(* 問7 (1) *)
f[z_] := (-z^3+3 z^2+8 z+14)/(z^2-2 z-8)
```

In[89]:=
```
Apart[f[z]]
```
有理式の部分分数分解

Out[89]= $1 + \frac{5}{-4+z} - z - \frac{3}{2+z}$

In[90]:=
```
SeriesCoefficient[f[z], {z, 1, n}]
```
級数の係数

Out[90]=
$$\begin{cases} -3^{-1-n}\left(5+3\,(-1)^{n}\right) & n == 0\ ||\ n > 1 \\ -\frac{11}{9} & n == 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

In[91]:=
```
f[1]
```

Out[91]= $-\frac{8}{3}$

In[92]:=
```
-8/3 + -11 (z - 1)/9 + Sum[-(5 + 3 (-1)^n)/3^(n + 1) (z - 1)^n, {n, 2, Infinity}]
```
総和　無限大

Out[92]= $-\frac{8}{3}-\frac{11}{9}\,(-1+z)+\frac{2\,(-1+z)^{2}\,(11+z)}{9\,(-4+z)\,(2+z)}$

In[93]:=
```
Together[%]
```
通分約分

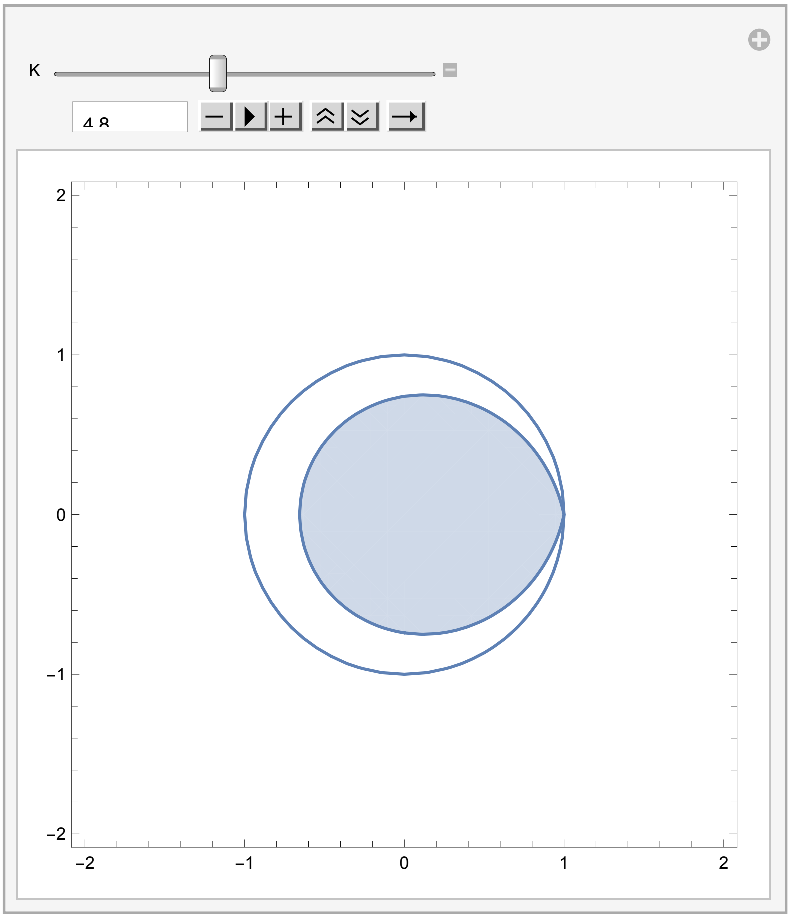
Out[93]= $\frac{14+8\,z+3\,z^{2}-z^{3}}{(-4+z)\,(2+z)}$

In[94]:=
```
(* Abelの連続性定理に現われる集合 *)
stolz[K_, R_] :=
 Block[{g1, g2}, g1 = ContourPlot[x^2 + y^2 == R^2, {x, -2 R, 2 R}, {y, -2 R, 2 R}];
  g2 = RegionPlot[x^2 + y^2 < R^2 && Abs[1 - (x + I y)/R]/(1 - Abs[x + I y]/R) ≤ K,
    {x, -2 R, 2 R}, {y, -2 R, 2 R}];
  Show[g1, g2]]
```
ブロック　等高線プロット　領域プロット　絶対値　虚数単位　絶対値　虚数単位　示す

In[95]:=
```
R = 1
Manipulate[stolz[K, R], {K, 1, 10, 0.1}]
```
操作

Out[95]= 1

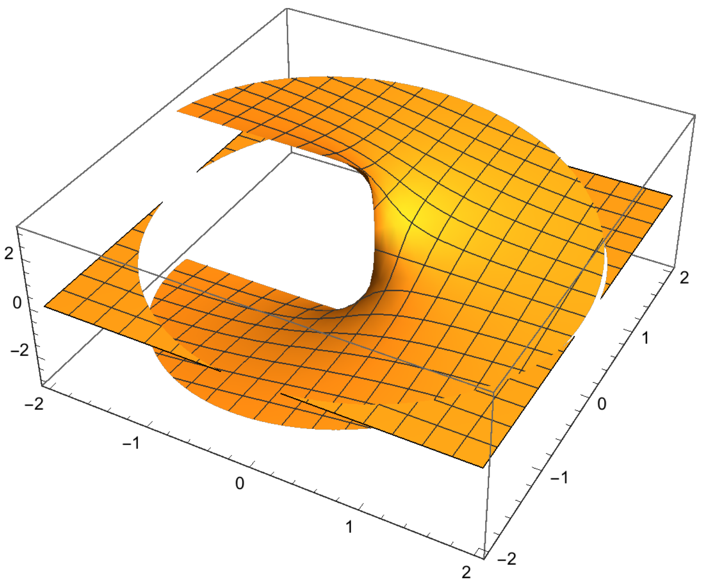
Out[96]=



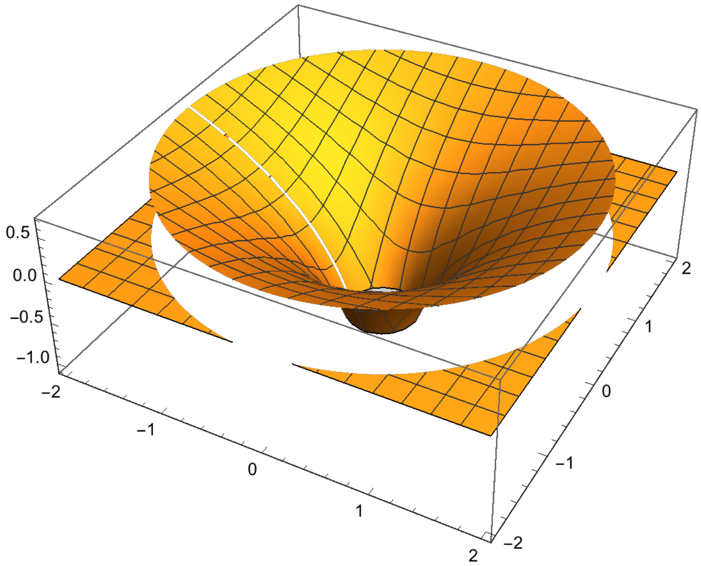
In[97]:=
```
(* 複素対数関数を描こう *)
```

In[98]:=
```
Plot3D[Boole[x^2 + y^2 < 4] Im[Log[x + I y]], {x, -2, 2}, {y, -2, 2}]
```
3Dプ… ブール値 … 対数 虚数単位

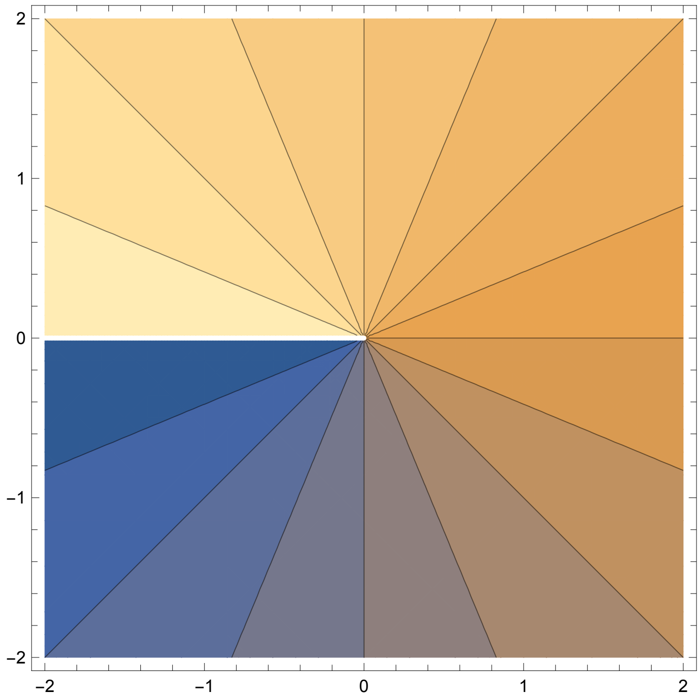
Out[98]=



In[99]:=
```
Plot3D[Boole[x^2 + y^2 < 4] Re[Log[x + I y]], {x, -2, 2}, {y, -2, 2}]
```
3Dプ… ブール値 … 対数 虚数単位

Out[99]=


In[100]:=
```
ContourPlot[Im[Log[x + I y]], {x, -2, 2},
  {y, -2, 2}, Contours → Table[x, {x, -Pi, Pi, Pi / 8}]]
```
等高線プロット … 対数 虚数単位 等高線 リストを作成 … … 円周率

Out[100]=


In[101]:=
```
ContourPlot[Re[Log[x + I y]], {x, -2, 2}, {y, -2, 2}]
```
等高線プロット … 対数 虚数単位

Out[101]=