関数論 2 小テスト No.6　(2011 年 11 月 9 日出題, 11 月 15 日授業開始時提出)

__年16組____番　氏名______________　　(http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/complex-function/)

問 6　以下の (1), (2), (3) を証明せよ (Casorati-Weierstrass の定理を使わずに証明せよ)。

(1) $\forall a \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists z \in A(0;0,\varepsilon)$ s.t. $\exp \dfrac{1}{z} = a$.　(注: $z \in A(0;0,\varepsilon) \Leftrightarrow 0 < |z| < \varepsilon$)

(2) $\exists \{z_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ s.t. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} z_n = 0$ かつ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \exp \frac{1}{z_n} = 0$.

(3) $\exists \{z_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ s.t. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} z_n = 0$ かつ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \exp \frac{1}{z_n} = \infty$.

おまけの問　f が $D(a;R)$ で正則とするとき、

$$g(z) := \frac{f(z)-f(a)}{z-a} \quad (0 < |z-a| < R)$$

とおくと、a は g の除去可能特異点であることを示せ。

(問 6 のヒント: (1) は $a = re^{i\theta}$ とするとき、z を r, θ で具体的に表せ。(2) と (3) は具体的に $\{z_n\}$ の例が与えられる。$w_n = 1/z_n$ とおくと分かりやすいかも。)

復習　実数の世界では、$e^x = c$ を満たす x は一意的である。実際、

$$\forall c \in (0,\infty) \quad \exists! x \in \mathbf{R} \quad \text{s.t.} \quad e^x = c.$$

複素数の世界では、

$$\forall c \in \mathbf{C} \setminus \{0\} \quad \exists z \in \mathbf{C} \quad \text{s.t.} \quad \exp z = c$$

が成り立つが、与えられた c に対して、$\exp z = c$ を満たす z は一意的ではない。実際、

$$c = re^{i\theta}, \quad r > 0, \quad \theta \in [0, 2\pi), \qquad z = x + iy, \quad x, y \in \mathbf{R}$$

とすると、

$$\begin{aligned}
\exp z = c &\Longleftrightarrow e^x e^{iy} = re^{i\theta} \\
&\Longleftrightarrow e^x = r \quad \text{and} \quad e^{iy} = e^{i\theta} \quad (\Longrightarrow \text{は両辺の絶対値を取る}) \\
&\Longleftrightarrow x = \log r \quad \text{and} \quad \exists n \in \mathbf{Z} \quad \text{s.t.} \quad y - \theta = 2n\pi i \\
&\Longleftrightarrow \exists n \in \mathbf{Z} \quad \text{s.t.} \quad z = \log r + i(\theta + 2n\pi)
\end{aligned}$$

であるから、次の「公式」が得られる。

丸暗記は危険かな ???

$$(\sharp) \qquad \log re^{i\theta} = \log r + i(\theta + 2n\pi) \quad (n \in \mathbf{Z}).$$

この $(\sharp)$ の本当の意味は、

$$\left\{z \in \mathbf{C}; \exp z = re^{i\theta}\right\} = \{\log r + i\,(\theta + 2n\pi)\,; n \in \mathbf{Z}\}$$

ということである。

問　(1) $\exp z = 1$ を解け (答: $z = 2n\pi i$ $(n \in \mathbf{Z})$)。(2) $\sin z = 0$ を解け (答: $z = n\pi$ $(n \in \mathbf{Z})$)。

解答

(1) $a = re^{i\theta}$ $(r > 0,\ \theta \in [0, 2\pi))$ とする。$\exp \dfrac{1}{z} = a = re^{i\theta}$ は

$$\exists n \in \mathbf{Z} \quad \text{s.t.} \quad \frac{1}{z} = \log r + i(\theta + 2n\pi)$$

と同値である。ゆえに

$$\exists n \in \mathbf{Z} \quad \text{s.t.} \quad z = \frac{1}{\log r + i(\theta + 2n\pi)}$$

と同値である。$\forall \varepsilon > 0$ に対して、$n \in \mathbf{N}$ を十分大きく取れば、$\theta + 2n\pi > 1/\varepsilon$ となり、このとき $z = \dfrac{1}{\log r + i(\theta + 2n\pi)}$ とおけば、$0 < |z| < \varepsilon$, $\exp \dfrac{1}{z} = re^{i\theta} = a.$

(2) $z_n := \dfrac{1}{n}$ $(n \in \mathbf{N})$ とおくと、明らかに $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$. そして、

$$\exp \frac{1}{z_n} = \exp \frac{1}{\frac{1}{n}} = \exp n \to \infty \quad (n \to \infty).$$

(3) $z_n := -\dfrac{1}{n}$ $(n \in \mathbf{N})$ とおくと、明らかに $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$. そして、

$$\exp \frac{1}{z_n} = \exp \frac{1}{-\frac{1}{n}} = \exp(-n) \to 0 \quad (n \to \infty).\blacksquare$$

(要するに (2) と (3) は $\lim_{x\to\infty} e^x = 0$, $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ という高校で学んだ事実を使っているわけ。)