関数論 2 小テスト No.1 (2011 年 9 月 27 日, 10 月 4 日提出予定)

__ 年 16 組 ____ 番 氏名 ______________ 明日 9 月 28 日はお休みです。

問 1

(1) $z^4 = -1$ を解け。

(2) C: $z = e^{i\theta}$ $(\theta \in [0, \pi/2])$ とするとき、$\displaystyle\int_C z^2\,dz$ を求めよ。

(3) $r > 0$, $a \in \mathbf{C}$, $n \in \mathbf{N}$ とするとき、$\displaystyle\int_{|z-a|=r} \frac{dz}{(z-a)^n}$ を求めよ (n で場合分けが必要)。

(4) $\displaystyle\int_{|z-2|=1} \frac{dz}{z}$ と $\displaystyle\int_{|z-1|=2} \frac{dz}{z}$ を求めよ。

- $z^n = c$ を解くのは苦手などと言ってはいけない。
- 本当は幂乗 e^z の形でなく、$\exp z$ と書くべきなのだが…
- $|z-a| = r$ は $z = a + re^{i\theta}$ $(\theta \in [0, 2\pi])$ というパラメーター曲線だとみなすこと。
- $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$. 原点中心、半径 1 の円周 (単位円) $|z| = 1$ と、x 軸の正方向と角 θ をなす半直線との交点。
  θ が高校数学で良く現れる角度のとき、具体的な値が求まる。
  $e^{i\pi/2} = i$, $e^{i\pi} = -1$, $e^{2ni\pi} = 1$ $(n \in \mathbf{Z})$ などなど
- $(e^z)^n = e^{nz}$, $\dfrac{1}{e^z} = e^{-z}$.
- $a \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ に対して、$\displaystyle\int e^{a\theta} d\theta = \frac{e^{a\theta}}{a} + C$ (C は積分定数).

解答 (2011/10/4)

(1) 与えられた $c \in \mathbf{C}$ に対して、 $z^n = c$ を解く必要が生じることがある。$c = 0$ の場合は $z = 0$ で簡単だから $c \neq 0$ とすると、$c = \rho e^{i\varphi}$ $(\rho > 0,\ \varphi \in \mathbf{R})$ となる ρ, φ が取れる。$z = re^{i\theta}$ $(r > 0, \theta \in \mathbf{R})$ とおくと、

$$\begin{aligned}
z^n = c &\iff r^n e^{in\theta} = \rho e^{i\varphi} \\
&\iff r^n = \rho \quad \text{and} \quad e^{in\theta} = e^{i\varphi} \\
&\iff r = \sqrt[n]{\rho} \quad \text{and} \quad e^{i(n\theta - \varphi)} = 1 \\
&\iff r = \sqrt[n]{\rho} \quad \text{and} \quad \exists m \in \mathbf{Z} \quad \text{s.t.} \quad n\theta - \varphi = 2m\pi \\
&\iff r = \sqrt[n]{\rho} \quad \text{and} \quad \exists m \in \mathbf{Z} \quad \text{s.t.} \quad \theta = \frac{\varphi + 2m\pi}{n} \\
&\iff \exists m \in \mathbf{Z} \quad \text{s.t.} \quad z = \sqrt[n]{\rho} \exp\left(i \frac{\varphi + 2m\pi}{n}\right).
\end{aligned}$$

最後の式は m について周期 n であるので、連続する n 個取ればすべてのものをつくす。ゆえに

$$z = \sqrt[n]{\rho} \exp\left(i \frac{\varphi + 2r\pi}{n}\right) \quad (r = 0, 1, \ldots, n-1).$$

$\cdots$というような公式を丸暗記してもしようがない。n 乗すると、原点からの距離は n 乗、偏角は n 倍になるので、n 乗して $\rho e^{i\varphi}$ になる数として、$\sqrt[n]{\rho} \exp \dfrac{i\varphi}{n}$ がぱっと浮かぶようになって、後は円周上に n 個、円周を n 等分するように並ぶ ($e^{\frac{2\pi i}{n}}$ をかけていくと全部求まる)、と覚えるのがお勧め。(値より先に図が浮かんで来るのが望ましい。) $-1 = e^{\pi i}$ だから、一つの 4 乗根として、$z = e^{i\pi/4} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$. 後は i をかけて

$$z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, \frac{-1-i}{\sqrt{2}}, \frac{1-i}{\sqrt{2}}.$$

あるいは偏角が $\dfrac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ ずつ増えて、$e^{\pi i/4}, e^{3\pi i/4}, e^{5\pi i/4}, e^{7\pi i/4}$.

(2) $z = e^{i\theta}$ より $dz = ie^{i\theta}\, d\theta$ であるから、

$$\int_C z^2\, dz = \int_0^{\pi/2} \left(e^{i\theta}\right)^2 \cdot ie^{i\theta}\, d\theta = i\int_0^{\pi/2} e^{3i\theta}\, d\theta = i\left[\frac{e^{3i\theta}}{3i}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\left(e^{3\pi i/2} - e^0\right)}{3} = \frac{-i-1}{3}.$$

(別解) $\dfrac{z^3}{3}$ が z^2 の原始関数であることに気がつくと、

$$\int_C z^2\, dz = \left[\frac{z^3}{3}\right]_{e^{i0}}^{e^{i\cdot\pi/2}} = \left[\frac{z^3}{3}\right]_1^i = \frac{i^3 - 1^3}{3} = \frac{-i-1}{3}.$$

(3) $|z - a| = r$ のパラメーターづけとして、

$$\varphi(\theta) := a + re^{i\theta} \quad (\theta \in [0, 2\pi])$$

が取れる。$\varphi'(\theta) = ire^{i\theta}$ であるから、

$$\int_{|z-a|=r} \frac{dz}{(z-a)^n} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{(a+re^{i\theta}-a)^n} \cdot rie^{i\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^n e^{in\theta}} \cdot rie^{i\theta} d\theta = \frac{i}{r^{n-1}} \int_0^{2\pi} e^{i(1-n)\theta} d\theta.$$

$n \neq 1$ のとき

$$\int_{|z-a|=r} \frac{dz}{(z-a)^n} = \frac{i}{r^{n-1}} \left[\frac{e^{i(1-n)\theta}}{i(1-n)} \right]_0^{2\pi} = 0 \quad (e^{i(1-n)\theta} \text{ は } 2\pi \text{ を周期としているから}).$$

(別解) $\dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{1}{1-n} \cdot \dfrac{1}{(z-a)^{n-1}}\right) = \dfrac{1}{(z-a)^n}$. つまり原始関数が存在するので、閉曲線上の線積分は (始点 = 終点なので) 0.
$n = 1$ のとき

$$\int_{|z-a|=r} \frac{dz}{(z-a)^n} = \int_{|z-a|=r} \frac{dz}{z-a} = i \int_0^{2\pi} d\theta = i \cdot 2\pi = 2\pi i.$$

(注意) $\dfrac{1}{z-a}$ は $\mathbf{C} \setminus \{a\}$ では原始関数を持たない！少し工夫をすれば、次のシナリオで計算できる。簡単のため、平行移動して $a = 0$ とする。$\displaystyle\int_{|z|=r} \frac{dz}{z} = 2\pi i$ が目標。$\mathbf{C} \setminus (-\infty, 0]$ では、$\operatorname{Log} z = \log|z| + i \operatorname{Arg} z$ が $\dfrac{1}{z}$ の原始関数である。これを使って極限操作すると、$\log r + i\pi - (\log r + i(-\pi)) = 2\pi i$ になることが導ける。