2011年度 **関数論2** No.6

桂田 祐史

2011年10月18日

1　問3の解説

問3　(1) 次の各関数を 0 のまわりでテーラー展開 (冪級数展開) し、収束半径を求めよ。

(a) $\dfrac{1}{z+4}$　(b) $\dfrac{1}{(z-i)^2}$　(c) $\dfrac{1}{z^2+1}$　(d) $\mathrm{Tan}^{-1}z$　(e) $\dfrac{z^3-3z^2-z+5}{z^2-5z+6}$

((b),(d) は微分積分を考えてみる。(e) は部分分数分解すると簡単になる。)

(2) $\dfrac{1}{z+3}$ を 1 のまわりでテーラー展開し、収束半径を求めよ。

解答　(1) (慣れないうちは無理をせず、なるべくゆっくりと式変形する。目標は $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ の形にする (a_n を求める) ことである。)

(a) 等比級数の和の公式を用いて、

$$\frac{1}{z+4}=\frac{1}{4+z}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{z}{4}}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\left(-\dfrac{z}{4}\right)}=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{4}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^{n+1}}z^n.$$

収束 $\Leftrightarrow$ | 公比 | $<1 \Leftrightarrow \left|\dfrac{-z}{4}\right|<1 \Leftrightarrow |z|<4$ であるから、収束半径は 4.

(b) 等比級数の和の公式を用いて、

$$\frac{1}{z-i}=\frac{1}{-i+z}=\frac{1}{-i}\cdot\frac{1}{1+iz}=i\cdot\frac{1}{1-(-iz)}=i\sum_{n=0}^{\infty}(-iz)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n i^{n+1}z^n$$

である。収束 $\Leftrightarrow$ | 公比 | $<1 \Leftrightarrow |-iz|<1 \Leftrightarrow |z|<1$ であるから、収束半径は 1. これから、

$$\frac{1}{(z-i)^2}=-\left(\frac{1}{z-i}\right)'=-\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n i^{n+1}z^n\right)'=-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n i^{n+1}nz^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}i^{n+1}nz^{n-1}$$
$$=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m i^{m+2}(m+1)z^m=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n i^{n+2}(n+1)z^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}i^n(n+1)z^n.$$

収束半径は項別微分しても変わらないので、1.

(c) 等比級数の和の公式を用いて、

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{1-(-z^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-z^2\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}.$$

a_n を

$$a_n = \begin{cases} 0 & (n \text{ は奇数}) \\ (-1)^k & (n = 2k \ (k = 0, 1, \dots)) \end{cases}$$

で定めると、

$$\frac{1}{z^2+1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

収束 $\Leftrightarrow$ | 公比 | $< 1 \Leftrightarrow |-z^2| < 1 \Leftrightarrow |z| < 1$ であるから、収束半径は 1.

(d) $\left(\mathrm{Tan}^{-1} z\right)' = \dfrac{1}{z^2+1}$ である。

そこでノーテンキにやると、

$$\mathrm{Tan}^{-1} z = \int \frac{1}{z^2+1} dz = \int \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} dz = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$$

となるが、これは途中の正当化が少し難しい。

- 領域 D で定義された正則関数 f に対し、$F'(z) = f(z)$ $(z \in D)$ を満たす F が存在するならば、$\forall a, z \in D$ に対して、

$$F(z) = F(a) + \int_a^z f(w) dw.$$

$\mathrm{Tan}^{-1} z$ は 0 の近傍で正則であるから、$z = 0$ のまわりで Taylor 展開できる:

$$\mathrm{Tan}^{-1} z = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \quad (|z| < \exists r).$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) b_{n+1} z^n = \left(\mathrm{Tan}^{-1} z\right)' = \frac{1}{z^2+1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

ただし a_n は (c) で出て来たものである。ゆえに

$$(n+1) b_{n+1} = \begin{cases} 0 & (n \text{ は奇数}) \\ (-1)^k & (n = 2k \ (k = 0, 1, \dots)). \end{cases}$$

$$b_n = \begin{cases} 0 & (n \text{ は偶数}) \\ \dfrac{(-1)^k}{2k+1} & (n = 2k+1 \ (k = 0, 1, \dots)). \end{cases}$$

(e) $f(z) := \dfrac{z^3-3z^2-z+5}{z^2-5z-6}$ とおく。$f(z)$ の分子 z^3-3z^2-z+5 を分母 z^2-5z-6 で割ると、商 $z+2$, 余り $3z-7$ であるから、

$$f(z) = z+2+\frac{3z-7}{z^2-5z-6}.$$

右辺第3項の分母は $z^2-5z-6=(z-2)(z-3)$ と因数分解できるので、

$$\frac{3z-7}{z^2-5z-6} = \frac{A}{z-2}+\frac{B}{z-3}$$

を満たす定数 A, B が存在する。これから $A=1$, $B=2$. ゆえに

$$f(z) = z+2+\frac{1}{z-2}+\frac{2}{z-3}.$$

$z+2$ の Taylor 展開はそれ自身である。

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{-2}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z}{2}} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}} \quad (\text{収束} \Leftrightarrow |z|<2).$$

$$\frac{1}{z-3} = \frac{1}{-3}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z}{3}} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}} \quad (\text{収束} \Leftrightarrow |z|<3).$$

$f(z)$ の $z=0$ のまわりの Taylor 展開の収束半径は、0 と $\{2,3\}$ との距離 2 である。そして、

$$\begin{aligned}
f(z) &= z+2-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}} \\
&= \left(2-\frac{1}{2}-2\cdot\frac{1}{3}\right)+\left(1-\frac{1}{2^2}-2\cdot\frac{1}{3^2}\right)z-\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{2}{3^{n+1}}\right)z^n \\
&= \frac{5}{6}+\frac{19}{36}z-\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{2}{3^{n+1}}\right)z^n.
\end{aligned}$$

(授業中に $\dfrac{19}{36}$ を $\dfrac{25}{36}$ と書いてしまった。)

(2) 目標は $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-1)^n$ の形に表すことである。

等比級数の和の公式を用いて、

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z+3} &= \frac{1}{(z-1)+4} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{z-1}{4}} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\left(-\dfrac{z-1}{4}\right)} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-1}{4}\right)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^{n+1}}(z-1)^n.
\end{aligned}$$

収束 $\Leftrightarrow$ | 公比 | $<1 \Leftrightarrow \left|-\dfrac{z-1}{4}\right|<1 \Leftrightarrow |z-1|<4$ であるから、収束半径は 4. ■

2

命題 2.1 $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ を任意の複素数列, $c \in \mathbf{C}$ とする。$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(z-c)^n}$ について、次の 3 つのうちのいずれか 1 つだけが必ず成立する。

(i) $\forall z \in \mathbf{C} \setminus \{c\}$ で収束する。$0 < \forall R^* < \infty$ に対して、$|z-c| \geq R^*$ で一様に絶対収束する。

(ii) $0 < \exists R < \infty$ s.t. $|z-c| > R$ で収束、$0 < |z-c| < R$ で発散。$R < \forall R^* < \infty$ に対して、 $|z-c| \geq R^*$ で一様に絶対収束する。

(iii) $\forall z \in \mathbf{C} \setminus \{c\}$ で発散する。

この命題の証明には、次の補題を用いる (これは関数論 1 で学んだので、証明は省略する)。

補題 2.2 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ を任意の複素数列, $d \in \mathbf{C}$ とする。$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(w-d)^n$ について、次の 3 つのうちのいずれか 1 つだけが必ず成立する。

(i) $\forall w \in \mathbf{C}$ で収束する。$0 < \forall \rho^* < \rho$ に対して、$|w-d| \leq \rho^*$ で一様に絶対収束する。

(ii) $0 < \exists \rho < \infty$ s.t. $|w-d| < \rho$ で収束、$|w-d| > \rho$ で発散。$0 < \forall \rho^* < \rho$ に対して、$|w-d| \leq \rho^*$ で一様に絶対収束する。

(iii) $\forall w \in \mathbf{C} \setminus \{d\}$ で発散する。

命題 2.1 の証明　$w = \frac{1}{z-c}$ とおくと、

$$\frac{a_n}{(z-c)^n} = a_n w^n.$$

$a_0 := 0$ とおき、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$ について補題を用いると、次の 3 つのうちのいずれか 1 つ (だけ) が成立する。

(i) $\forall w \in \mathbf{C}$ で $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$ は収束する。$0 < \forall \rho^* < \infty$ に対して、$|w| \leq \rho^*$ で一様に絶対収束する。ゆえに $\forall z \in \mathbf{C} \setminus \{c\}$ に対して、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(z-c)^n}$ は収束し、$0 < \forall R^* < \infty$ に対して、$\rho^* := \dfrac{1}{R^*}$ とおくことで、$|z-c| \geq R^*$ で $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(z-c)^n}$ は一様に絶対収束することが分かる。

(ii) $0 < \exists \rho < \infty$ s.t. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$ は、$|w| < \rho$ で収束し、$|w| > \rho$ で発散する。$0 < \forall \rho^* < \rho$ に対

して、$|w| \leq \rho^*$ で一様収束する。ゆえに $R := \dfrac{1}{\rho}$ とおくと、$\displaystyle\sum_{n=1}^{*} \frac{a_n}{(z-c)^n}$ は $|z-c| > R$ で収束し、$|z-c| < R$ で発散する。また $\forall R^* > R$ に対して、$\rho^* := \dfrac{1}{R^*}$ とおくとき、$\rho^* < \rho$ であるから、$\displaystyle\sum_{n=0}^{i} nftya_n w^n$ は $|w| \geq \rho^*$ で一様に絶対収束する。ゆえに $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{(z-c)^n}$ は、$|z-c| \geq R^*$ で一様に絶対収束する。

(iii) $\forall w \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ で $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$ は発散する。ゆえに $\forall z \in \mathbf{C} \setminus \{c\}$ に対して、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(z-c)^n}$ は発散する。 ■

参考文献

[1]