系 4.3 正則関数は何回でも微分可能であって、各点の近傍で **Taylor 展開**

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(z-c)^n$$

が成り立つ。

定理 4.5 (Cauchy の積分公式 (一般の場合)) Ω は $\mathbf{C}$ の領域で、$f\colon\Omega\to\mathbf{C}$ は正則とする。$\mathcal{D}$ は、有限個の互いに交わらない区分的に滑らかな単純閉曲線によって囲まれた領域で、$\overline{\mathcal{D}}=\mathcal{D}\cup\partial\mathcal{D}\subset\Omega$ が成り立つとする。その境界 $\partial\mathcal{D}$ は正の向きを与えるとき、

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathcal{D}}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta\quad(z\in\mathcal{D}). \tag{4.6}$$

さらに

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_{\partial\mathcal{D}}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta\quad(z\in\mathcal{D}). \tag{4.7}$$

証明 $z_0\in\mathcal{D}$ に対して、$\overline{D}(z_0;R)\subset\mathcal{D}$ なる $R>0$ を取る。$\forall z\in D(z_0;R)$ に対して、積分路の変形により

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathcal{D}}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\,d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-z_0|=R}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta\quad(n=0,1,2,\cdots)$$

が得られる。右辺に円盤の場合の結果である定理 4.2 を適用すれば

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathcal{D}}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\,d\zeta=\frac{f^{(n)}(z)}{n!}.\blacksquare$$

4.2 積分公式の最初の応用

命題 4.6 (平均値の性質 (the mean-value property)) Ω は $\mathbf{C}$ の領域で、$f\colon\Omega\to\mathbf{C}$ は正則、$c\in\Omega$ とするとき、$\overline{D}(c;r)\subset\Omega$ を満たす任意の $r>0$ に対して、

$$f(c)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f\left(c+re^{i\theta}\right)d\theta.$$

(右辺は、円 $|z-c|=r$ での f の平均値であることに注意)

証明 Cauchy の積分公式を $z=c$ で適用して、

$$f(c)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta-c|=r}\frac{f(\zeta)}{\zeta-c}d\zeta.$$

$\zeta=c+re^{i\theta}$ $(\theta\in[0,2\pi])$ とパラメーターづけすると、

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta-c-|=r}\frac{f(\zeta)}{\zeta-c}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(c+re^{i\theta})}{re^{i\theta}}\cdot ire^{i\theta}d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f\left(c+re^{i\theta}\right)d\theta.\blacksquare$$

余談 4.2.1 (実関数では) 実関数 $u=u(x)=u(x_1,\dots,x_n)$ については、

$$u \text{ が平均値の性質を持つ} \Leftrightarrow \triangle u = 0 \quad (u \text{ は調和関数})$$

が成り立つ。特に 1 変数 $(n=1)$ の場合

$$u \text{ が平均値の性質を持つ} \Leftrightarrow u''(x)=0 \Leftrightarrow u \text{ は 1 次関数}.$$

1 次関数のグラフを書いて、a での値 $u(a)$ と $a\pm r$ での値の平均 $\dfrac{u(a+r)+u(a-r)}{2}$ を比べてみると、当たり前のことである。

正則関数 f の実部・虚部 u, v $(f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y))$ については、$\triangle u=\triangle v=0$ が成り立つので、実調和関数の平均値の性質から、正則関数の平均値の性質を導くことも可能である。 ■

いわゆる最大値原理であるが、率直に言って採用した教科書の記述は気に入らない (注意に書いた事情もあるし、定義域を円盤に限定する理由がほとんどないから)。ここでは次の命題を本線とする。

Proposition 4.2.2 ((変更版) 最大値原理 (the maximum principle, maximum-modulus theorem)) Ω は $\mathbf{C}$ の領域、$f\colon\Omega\to\mathbf{C}$ は正則、$z_0\in\Omega$,

$$\forall z\in\Omega \quad |f(z)|\le|f(z_0)| \qquad (|f(z_0)| \text{ は } |f| \text{ の最大値である、ということ})$$

が成り立つならば、

$$\exists C\in\mathbf{C} \quad \text{s.t.} \quad \forall z\in\Omega \quad f(z)=C.$$

命題 4.7 ((参考までに、教科書の) 最大値の原理) $c\in\mathbf{C}$, $R>0$, $f\colon\overline{D}(c;R)\to\mathbf{C}$ は連続、$D(c;R)$ で正則とする。f が定数関数でないならば、$z\mapsto|f(z)|$ は $D(c;R)$ で最大値を取り得ない。

注意 4.2.3 (よく見かける表現であるが、私は問題アリと考える) 教科書に載っている上の形の命題では、「最大値」が何を意味するか、曖昧である (これはこの教科書だけの問題でなくて、多くのテキストに共通して見られる悪しき習慣である)。すなわち次の 2 つの解釈がありうる。

[1] $\displaystyle\max_{\zeta\in D(c;R)}|f(\zeta)|$ — この場合は「$\displaystyle\max_{\zeta\in D(c;R)}|f(\zeta)|$ は存在しない」という主張になる (だったらそう書けば良いのに…)。

[2] $\displaystyle\max_{\zeta\in\overline{D}(c;R)}|f(\zeta)|$ — この場合は「$\forall z\in D(c;R)$ $|f(z)|\ne\displaystyle\max_{\zeta\in\overline{D}(c;R)}|f(\zeta)|$ (この右辺はつねに存在する)」言い替えると「$\forall z\in D(c;R)$ $|f(z)|<\displaystyle\max_{\zeta\in\overline{D}(c;R)}|f(\zeta)|$」という主張になる。

どちらに解釈しても、結局は同じことを主張していることになる[2]。つまり容易に [1] $\Leftrightarrow$ [2] が分かる。実際、[1] が成り立っていると仮定すると、

$$\forall z\in D(c;R) \quad |f(z)|\ne\max_{\zeta\in\overline{D}(c;R)}|f(\zeta)|.$$

(もし、ある $z_0\in D(c;R)$ に対して、$|f(z_0)|=\displaystyle\max_{\zeta\in\overline{D}(c;R)}|f(\zeta)|$ が成り立てば、当然 $|f(z_0)|=\displaystyle\max_{\zeta\in D(c;R)}|f(\zeta)|$ となるので、[1] に反する。) 一方、[2] が成り立っていると仮定すると、$\displaystyle\max_{\zeta\in D(c;R)}|f(\zeta)|$ は存在しない。実際、存在すれば $\displaystyle\max_{\zeta\in D(c;R)}|f(\zeta)|<\max_{\zeta\in\overline{D}(c;R)}|f(\zeta)|$ となるが、これは f の連続性に反する。ゆえに [1] が成り立つ。 ■

[2]結局は同じことになるから、この表現で構わない、と考えている人が多いのだと思うが、そのように考えなくても、その表現が意味するところが曖昧さなく定まるようにすべきである。

証明　$M := |f(z_0)|$ とおく。
Ω は開集合であるから、$\exists\varepsilon > 0$ s.t. $D(z_0;\varepsilon) \subset \Omega$. $\rho := \varepsilon/2$ とおくと、$\overline{D}(z_0;\rho) \subset \Omega$.
$0 < r \le \rho$ なる任意の r に対して、平均値の性質から、

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(z_0 + re^{i\theta}\right) d\theta.$$

ゆえに

$$M = |f(z_0)| \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f\left(z_0 + re^{i\theta}\right) d\theta\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} M\, d\theta = M.$$

左辺と右辺が一致したから、不等号はすべて等号である[3]。特に

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f\left(z_0 + re^{i\theta}\right) d\theta\right| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} M\, d\theta.$$

$\left|f(z_0 + re^{i\theta})\right| \le M$ で、$\theta \mapsto \left|f\left(z_0 + re^{i\theta}\right)\right|$ は連続であるから、

$$\left|f\left(z_0 + re^{i\theta}\right)\right| = M \quad (\theta \in [0, 2\pi]) \qquad \text{i.e.} \qquad |f(z)| = M \quad (|z - z_0| = r).$$

r の任意性から、

$$|f(z)| = M \quad (|z - z_0| \le \rho).$$

例題 3.2.2(p.25, (教科書では p.56, 例題 3.10, 「絶対値が一定の正則関数は定数関数」) から、f は $D(z_0;\rho)$ で定数関数に等しい: $\exists C \in \mathbf{C}$ s.t. $f = C$ on $D(z_0;\rho)$.
一致の定理 (identity theorem, 教科書 p.40, 定理 2.38) より、Ω 全体で $f = C$. ■

代数学の基本定理の証明を与える (関数論の一つの定番といえる)。準備として、多項式の $z \to \infty$ での挙動を調べておく。

Lemma 4.2.4 (多項式の遠方での挙動) $n \in \mathbf{N}$, $\{a_j\}_{j=0}^n \in \mathbf{C}^n$, $a_0 \ne 0$, $f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n$ とするとき、

$$(0 < \forall\varepsilon < 1)(\exists R \in \mathbf{R})(\forall z \in \mathbf{C} : |z| \ge R) \quad (1-\varepsilon)|a_0|\,|z|^n \le |f(z)| \le (1+\varepsilon)|a_0|\,|z|^n.$$

特に $f(z) \ne 0$ $(|z| \ge R)$, $\displaystyle\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$.

証明　$z \ne 0$ とするとき、

$$\frac{f(z)}{z^n} = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots + \frac{a_n}{z^n}.$$

$\forall m \in \mathbf{N}$ に対して $\dfrac{1}{z^m} \to 0$ $(|z| \to \infty)$ であるから、$\displaystyle\lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{z^n} = a_0$. ゆえに

$$\lim_{z\to\infty} \frac{|f(z)|}{|a_0|\,|z|^n} = 1.$$

これから、$\forall\varepsilon > 0$, $\exists R \in \mathbf{R}$ s.t.

$$1 - \varepsilon \le \frac{|f(z)|}{|a_0|\,|z|^n} \le 1 + \varepsilon \quad (|z| \ge R).■$$

---

[3] $f \le g$ on $[a,b]$ ならば $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$. もしも、さらに f と g が連続で、$\exists x_0 \in [a,b]$ $f(x_0) < g(x_0)$ (どこか一点で真不等号) が成り立つならば、$\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx < \int_a^b g(x)\ dx$. 言い替えると、$f$ と g が連続で $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$ ならば $f \equiv g$.

例 4.8 (代数学の基本定理 (fundamental theorem of algebra) の最大値原理による証明) (授業ではカット) $P(z)$ を複素係数の多項式で、その次数 n は 1 以上とするとき、$P(z)$ は少なくとも一つの根を持つ。これを証明するために、背理法を用いる。すなわち、$\forall z \in \mathbf{C}$ $P(z) \neq 0$ と仮定する。すると $f(z) := \dfrac{1}{P(z)}$ とおくとき、f は整関数である。

Lemma 4.2.4(p.31) より、

$$\exists M > 0, \exists R^* \in \mathbf{R}, (\forall z \in \mathbf{C} : |z| \geq R^*) \quad |P(z)| \geq M|z|^n.$$

$\forall R \geq R^*$ に対して、

$$(\forall z \in \mathbf{C} : |z| \geq R) \quad |f(z)| \leq \frac{1}{M|z|^n} \leq \frac{1}{MR^n}. \tag{4.$\heartsuit$}$$

$|f|$ は $\overline{D}(0; R)$ で最大値を持つが、最大値の原理から、それは $|z| = R$ での最大値と一致する。それは (4.♡) により $\dfrac{1}{MR^n}$ で押えられる。結局、$|f(z)| \leq \dfrac{1}{MR^n}$ $(z \in \mathbf{C})$. $R \to \infty$ とすると、$|f(z)| = 0$. ゆえに $f(z) \equiv 0$. これは矛盾である。 ■

注意 4.2.5 (教科書に対する物言い) 教科書 p.80 の、最大値原理による代数学の基本定理の証明は曖昧である (間違いであると言えるかも知れない)。($R \to \infty$ とするためには、M が R より先に定まっている必要があるのに、「R が十分大きければ適当に $M > 0$ を取って」なんて書いてある)。上に書いた証明は修正してあるが、大抵のテキストがそうしているように、Liouville の定理を用いた証明の方が簡単である。授業ではそちらを解説することにする。 ■

Definition 4.2.6 $\mathbf{C}$ 全体で正則な関数を**整関数** (**entire function**) という。

Example 4.2.7 (整関数の例) 多項式関数、指数関数 $\exp z$, 三角関数 $\cos z$, $\sin z$ は整関数である。$\tan z$, $\log z$, $\dfrac{1}{1+z^2}$ は整関数ではない。 ■

定理 4.9 (Liouville の定理 (リウヴィユの定理, Liouville's theorem)) 有界な整関数は定数関数に限る。

証明 $f \colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ は正則で、$\exists M \in \mathbf{R}$ s.t. $|f(z)| \leq M$ $(z \in \mathbf{C})$ が成り立つと仮定する。f の 0 における Taylor 展開を $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ とすると、これは $\forall z \in \mathbf{C}$ について収束する。$\forall n \in \mathbf{N}$ に対して $a_n = 0$ を示そう。$\forall R > 0$ に対して、

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=R} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(Re^{i\theta})}{(Re^{i\theta})^{n+1}} \cdot iRe^{i\theta}\, d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(Re^{i\theta})}{R^n e^{in\theta}}\, d\theta.$$

これから **Cauchy の評価式**と呼ばれる

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\left|f(Re^{i\theta})\right|}{R^n} d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{M}{R^n} d\theta = \frac{M}{R^n}$$

を得る[4]。ゆえに $R \to \infty$ として $a_n = 0$ $(n \in \mathbf{N})$. ゆえに $f(z) = a_0$ $(\forall z \in \mathbf{C})$. ■

[4] 良い子は口にしない話: 収束に関する定理について考えるとき、冪級数の典型例として、等比級数である $\sum_n \left(\dfrac{z}{R}\right)^n$ (収束半径は R) を持ち出すのが良い。収束半径を求める ratio test とか、Cauchy-Hadamard の定理などはそうやって納得できるし、Cauchy の評価式もぴったりである。

Example 4.2.8 (代数学の基本定理の証明 (よくあるやり方)) $P(z)$ を複素係数の多項式で、その次数 n は 1 以上とするとき、$P(z)$ は少なくとも一つの根を持つ。これを証明するために、背理法を用いる。すなわち、$\forall z\in\mathbf{C}\ P(z)\neq 0$ と仮定する。このとき、$f(z):=\dfrac{1}{P(z)}$ は整関数である。命題 0.2.1(p.5) より、

$$\exists M>0,\exists R\in\mathbf{R},(\forall z\in\mathbf{C}:|z|\geq R)\quad |P(z)|\geq M|z|^n$$

であるから、

$$|f(z)|\leq\frac{1}{M|z|^n}\leq\frac{1}{MR^n}\quad(|z|\geq R).$$

一方 $\overline{D}(0;R)=\{z\in\mathbf{C};|z|\leq R\}$ はコンパクトであるから、$|f|$ は最大値を持つ：

$$\exists M'\in\mathbf{R},\forall z\in\overline{D}(0;R):|f(z)|\leq M'.$$

ゆえに $|f(z)|\leq\max\left\{\dfrac{1}{MR^n},M'\right\}$ $(z\in\mathbf{C})$. Liouville の定理から、f は定数関数である。ゆえに P も定数関数であるが、これは n の次数が 1 以上であることと矛盾する[5]。 ■

Example 4.2.9 2 つの関数

$$f(z):=\frac{1}{z-1},\quad g(z):=\frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

はそれぞれ $\mathbf{C}\setminus\{1\}$, $C\setminus\{1,2\}$ で正則である。f も g も $|z|<1$ で正則であるから、$h:=f+g$ も $|z|<1$ で正則であるが、実は h は $|z|<2$ まで正則に拡張可能である。これは $g(z)$ の部分分数分解

$$g(z)=-\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z-2}$$

を見れば明らかである。 ■

与えられた関数の Taylor 展開の収束半径については、係数を用いた公式もあるが[6]、元の関数の性質を元にした特徴づけが重要である。次の命題は、教科書のものとは少し変えてある。

命題 4.10 Ω は $\mathbf{C}$ の開集合で、$f\colon\Omega\to\mathbf{C}$ は正則、$c\in\Omega$ とする。

$$\mathcal{R}:=\{R>0;f\ \text{は}\ D(c;R)\ \text{まで正則に拡張できる}\ \}$$

とおくとき、f の c のまわりの Taylor 展開の収束半径 ρ は $\sup\mathcal{R}$ に等しい。

注意 4.2.10 (正確かつ分かりやすくかつ簡潔な表現を求めて…) 上の命題中の、$\mathcal{R}$ を定める条件「f は $D(c;R)$ まで正則に拡張できる」は、

$D(c;R)\subset\Omega$ (f は $D(c;R)$ で正則)
または
$D(c;R)\not\subset\Omega$ かつ $\exists\widetilde{f}\colon D(c;R)\to\mathbf{C}$ 正則 s.t. $f=\widetilde{f}$ in $D(c;R)\cap\Omega$

[5] もし $a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n$ ($a_0\neq 0$, $n\geq 1$) が定数であれば、$a_0z^{n-1}+a_1z^{n-2}+\cdots+a_{n-1}\equiv 0$ である。「0 の代入と微分 (あるいは割り算)」によって、$a_{n-1}=a_{n-2}=\cdots=a_1=a_0=0$ が得られ、$a_0\neq 0$ に矛盾する。

[6] $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n$ について、$R=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ が存在すれば R は収束半径 (ratio test), $R=\left(\displaystyle\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}\right)^{-1}$ とすれば R は収束半径 (Cauchy-Hadamard)。いずれも $\{a_n\}$ が等比数列 ($a_n=a^n$) の場合を考えると分かりやすい。$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a^n(z-c)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(a(z-c))^n$ は $|z-c|<1/|a|$ のときに収束、$|z-c|>1/|a|$ のときに発散し、$R=1/|a|$.

と書き換える方が正確かも知れない (R が小さく $D(c;R)\subset\Omega$ となる場合に「拡張」というのは変なので)。論理的には (2 つをまとめて)

$$\exists\widetilde{f}\colon D(c;R)\to\mathbf{C}\ \text{正則 s.t. } f=\widetilde{f}\ \text{in } D(c;R)\cap\Omega$$

と 1 行で簡潔に書くことも出来るが、少し分かりにくいであろう。直観的には、$\sup\mathcal{R}$ は、c と f のマズイ点 (その点での関数値をどう定義しなおしても、f はその点の近傍で正則にならない — 後でいう f の除去可能でない特異点) との距離である。 ■

証明 $\rho\in\mathcal{R}$ であるから、$\rho\le\sup\mathcal{R}$. 一方 $\forall R\in\mathcal{R}$, $0<\forall\varepsilon<R$ に対して、f の c の回りの Taylor 展開は $D(c;R-\varepsilon)$ で収束する[7](定理 4.2)。ゆえに $R-\varepsilon\le\rho$. ε は任意であるから、$R\le\rho$. ゆえに $\sup\mathcal{R}\le\rho$. 従って $\rho=\sup\mathcal{R}$. ■

Example 4.2.11 (有理関数の Taylor 展開の収束半径) $f(z)=\dfrac{Q(z)}{P(z)}$ ($P(z),Q(z)\in\mathbf{C}[z]$, $P(z)$ と $Q(z)$ は互いに素) とするとき、$P(z)$ のすべての根 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ を除いた $\Omega:=\mathbf{C}\setminus\{\alpha_j;1\le j\le n\}$ で $z\mapsto f(z)$ は正則である。このとき、$\forall c\in\Omega$ に対して、f の c の回りの Taylor 展開の収束半径は $\displaystyle\min_{1\le j\le n}|\alpha_j-c|$ である。 ■

例 4.11 (教科書 p.81) 例 2.29 (教科書 pp.33–34) で考えた (Bernoulli 数の母関数) $f(z)$ を思い出そう。

$$g(z):=1+\frac{z}{2!}+\frac{z^2}{3!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(n+1)!}$$

とおく。容易に $\forall z\in\mathbf{C}$ に対して収束することが分かるので、$g\colon\mathbf{C}\to\mathbf{C}$ 正則である。実は

$$g(z)=\frac{e^z-1}{z}\quad(z\in\mathbf{C}\setminus\{0\})$$

であることに気付く。これから

$$g(z)=0\quad\Leftrightarrow\quad(z\ne0\quad\wedge\quad e^z=1)\quad\Leftrightarrow\quad\exists n\in\mathbf{Z}\setminus\{0\}\quad\text{s.t.}\quad z=2n\pi i.$$

$g(z)$ の逆数を $f(z)$ とする:

$$f(z):=\frac{1}{g(z)}.$$

これは $\Omega:=\mathbf{C}\setminus\{2n\pi i;n\in\mathbf{Z}\setminus\{0\}\}$ で正則な関数である (Ω の図を描こう)。特に 0 の近傍 $D(0;2\pi)$ で正則である。0 の回りの Taylor 展開は、B_n を **Bernoulli 数**として、

$$f(z)=1-\frac{z}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{B_{2n}}{(2n)!}z^{2n}$$

となる (教科書 pp.33–34)。

$$B_2=\frac{1}{6},\quad B_4=\frac{1}{30},\quad B_6=\frac{1}{42},\cdots.$$

この冪級数の収束半径は 2π である[8]。実際、f は $|z|<2\pi$ で正則であるが、f は $R>2\pi$ なる R に対して、$|z|<R$ で正則とはならないから、$\sup\mathcal{R}=2\pi$ である。

(おまけ) f の展開を 10 次の項まで見よう。Mathematica で

[7] 実は ε を引く必要はなく、Taylor 展開は $D(c;R)$ で収束するが、定理 4.2 を使うには、円盤の閉包まで連続であって欲しいので、半径 $R-\varepsilon$ の円盤を考えることにした。

[8] ratio test や Hadamard の公式を利用して収束半径を求めるのは難しい。

```
Series[z/(Exp[z]-1),{z,0,10}]
```

Maple で

```
taylor(z/(exp(z)-1),z=0,10)
```

とすると、

$$f(z) = 1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{12} - \frac{z^4}{720} + \frac{z^6}{30240} - \frac{z^8}{1209600} + \frac{z^{10}}{47900160} + \cdots$$

を得る。■

問 $\exp z = 1 \Leftrightarrow \exists n \in \mathbf{Z}$ s.t. $z = 2n\pi i$ を示せ。(p.6 を見よ。) $\sin z = 0$ となるための必要十分条件は何か。

例 4.12 (教科書 p.81) 実関数

$$f(x) := \frac{1}{1+x^2}$$

は $\mathbf{R}$ 全体で実解析的である (すなわち、$\forall x_0 \in \mathbf{R}$ に対して、f は x_0 でベキ級数展開できる: $\exists r > 0$, $\exists \{a_n\}_{n\ge 0}$ s.t. $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0^n)$ $(x_0 - r < x < x_0 + r)$)。しかし $x = 0$ での Taylor 展開

$$f(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

は $-1 < x < 1$ でしか収束しない (理由は各自チェックせよ)。それは $f(z) = \dfrac{1}{z^2+1} = \dfrac{1}{(z+i)(z-i)}$ が、$|z| < 1$ では正則であるが、$z = \pm i$ を含んだ領域 $|z| < R$ (つまり $R > 1$) で正則でないため、命題 4.10 の $\mathcal{R}$ について、$\sup \mathcal{R} = 1$ となるからである。■

4.3 留数定理

4.3.0 冪級数、逆冪級数の収束

正則関数は各点の近傍 (円盤領域) で冪級数展開 (Taylor 展開) できる、という結果 (定理 4.1) を得たが、さらに孤立特異点のまわりで Laurent 展開という、負冪を含む級数に展開できる、という結果 (定理 4.16) を目指す。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-c)^n}$$

という形の関数項級数をここでは負冪級数と呼ぶことにする (ここだけの用語)。

Example 4.3.1 (初めての Laurent 展開とこんにちは) $f(z) := \dfrac{1}{z-3}$ は、$\mathbf{C} \setminus \{3\}$ で正則である。$c = 1$ を中心とする円盤 $D(1;2)$ で正則である。ここで次のように冪級数展開 (Taylor 展開) できる。

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z-3} = \frac{1}{(z-1)-2} = \frac{1}{-2\left(1 - \dfrac{z-1}{2}\right)} \\ &= -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-1}{2}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{2^{n+1}} \quad (z \in D(1;2)). \end{aligned}$$

ところで、f は $D(1;2)$ の外部 $D := \{z \in \mathbf{C}; |z-1| > 2\}$ でも正則である。そこで次のように "負冪級数" 展開することも出来る。

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z-3} = \frac{1}{(z-1)-2} = \frac{1}{(z-1)\left(1-\dfrac{2}{z-1}\right)} \\ &= \frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z-1}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{(z-1)^{n+1}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{(z-1)^n} \quad \left(\left|\frac{2}{z-1}\right| < 1 \text{ すなわち } |z-1| > 2\right). \end{aligned}$$

(もちろん $\dfrac{1}{z-3}$ という簡単な関数をわざわざ難しく級数にするのはバカバカしいが、この計算は、後の定理の証明と関連深い。) ■

前期の定理 4.2 の証明でも用いたことであるが、級数の一様収束に基づく項別積分が再び必要になる。ここでは、一つの工夫として、命題 4.3.3 を用意する (冪級数に関する有名な定理 (Lemma **??**) から簡単に導けるが、こういう形の命題を書いてある本は少ない (というか、私は見たことがありません))。

Lemma 4.3.2 (冪級数の収束 (再掲)) 冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ について、次の 3 つのいずれか 1 つだけが必ず成立する。

(i) $\forall z \in \mathbf{C}$ に対して収束する。$0 < \forall \rho^* < \infty$ に対して、$|z-c| \le \rho^*$ で一様に絶対収束する。

(ii) $0 < \exists \rho < \infty$ s.t. $|z-c| < \rho$ で収束し、$|z-c| > \rho$ で発散する。$0 < \forall \rho^* < \rho$ に対して、$|z-c| \le \rho^*$ で一様に絶対収束する。

(iii) $\forall z \in \mathbf{C} \setminus \{c\}$ に対して発散する。

Proposition 4.3.3 (「負冪級数」の収束) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-c)^n}$ について、次の 3 つのいずれか 1 つだけが必ず成立する。

(i) $\forall z \in \mathbf{C} \setminus \{c\}$ に対して収束する。$0 < \forall R^* < \infty$ に対して、$|z-c| \ge R^*$ で一様に絶対収束する。

(ii) $0 < \exists R < \infty$ s.t. $|z-c| > R$ で収束し、$|z-c| < R$ で発散する。$R < \forall R^* < \infty$ に対して、$|z-c| \ge R^*$ で一様に絶対収束する。

(iii) $\forall z \in \mathbf{C} \setminus \{c\}$ に対して発散する。

証明　$z \ne c$ に対して、$\dfrac{1}{z-c} = \zeta$ とおくと、$\dfrac{b_n}{(z-c)^n} = b_n\zeta^n$. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n\zeta^n$ に対して、番外補題 4.3.2 を適用する。

(i) 冪級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n\zeta^n$ が $\forall \zeta \in \mathbf{C}$ について収束する場合、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-c)^n}$ は $\forall z \in \mathbf{C} \setminus \{c\}$ に対して収束する。$0 < \forall R^* < \infty$ に対して、$\rho^* = 1/R^*$ とおく。$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n\zeta^n$ が $|\zeta| \le \rho^*$ で一様に絶対収束することから、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-c)^n}$ は $|z-c| \ge R^*$ で一様に絶対収束することが導かれる。

(ii) $0 < \exists\rho < \infty$ s.t. 冪級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n\zeta^n$ が $|\zeta| < \rho$ について収束し、$|\zeta| > \rho$ について発散する場合、$R := 1/\rho$ とおくと、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-c)^n}$ は $|z-c| > R$ で収束し、$|z-c| < R$ で発散する。$R < R^* < \infty$ を満たす任意の R^* に対して、$1/R^* < 1/R = \rho$ であるから、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n\zeta^n$ が $|\zeta| \le 1/R^*$ で一様に絶対収束することから、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-c)^n}$ は $|z-c| \ge R^*$ で一様に絶対収束することが導かれる。

(iii) 冪級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n\zeta^n$ が $\forall\zeta \ne 0$ に対して発散する場合、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-c)^n}$ は任意の $z \ne c$ で発散する。 ■

この命題の (i) の場合を $R = 0$, (iii) の場合を $R = \infty$ と解釈することで、以下のように書き直せる (これは冪級数の場合は普通に行われている)。

$0 \le \exists R \le \infty$ s.t. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-c)^n}$ は $|z-c| > R$ で収束し、$|z-c| < R$ で発散する。$R < \forall R^* < \infty$ に対して、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-c)^n}$ は $|z-c| \ge R^*$ で一様に絶対収束する。

冪級数と「負冪級数」の和

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-c)^n}$$

については、それぞれの和が求まるための条件を考えて次の定理を得る。

Proposition 4.3.4 (Laurent 級数の収束範囲) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-c)^n}$ について、$0 \le \exists\rho' \le \exists\rho \le \infty$ s.t. $\rho' < |z-c| < \rho$ で収束し ($\rho = \rho'$ の場合、何も主張していない)、$|z-c| < \rho'$ と $|z-c| > \rho$ では発散する。$\rho' < R' < R < \rho$ を満たす任意の R', R に対して、$R' \le |z-c| \le R$ で一様に絶対収束する。

4.3.1 孤立特異点 (とローラン展開)

定義 4.13 c が f の**孤立特異点** (**isolated singularity**) とは、$\exists R > 0$ s.t. f は $0 < |z-c| < R$ で定義されていて (つまり定義域が $\{z; 0 < |z-c| < R\}$ を含むということ) 正則であることと定義する。

— これは f が c で悪い性質を持つ、ということではなく、c 以外では良い、c でどうなっているかは問わない、ということである。具体的には次の 3 つの場合がある。

(i) f は c で定義されていない。

(ii) f は c で定義されているが、c では微分可能でない。

(iii) f は c で定義されていて、c で微分可能である (このとき f は $|z-c| < R$ で正則である)。

本によっては、(iii) の場合、c を f の孤立特異点とは呼ばないこともある (つまり、f は $D(c;\varepsilon)$ で正則ではない、という条件を加えている)。開集合 Ω で定義された正則関数 f に対して、Ω の各点は f の孤立特異点である、ということになる。

例 4.14 次のいずれの場合も、0 は f の孤立特異点である (f は $0<|z|<1$ で正則だから)。

(a) $f(z) := \dfrac{\sin z}{z}$ (任意の R に対して、$0<|z|<R$ で正則)

(b) $f(z) := \dfrac{1}{z(z^2-1)}$ ($0<|z|<1$ で正則)

(c) $f(z) := \exp\dfrac{1}{z}$ (任意の R に対して、$0<|z|<R$ で正則) ■

Example 4.3.5 $f(z) = \dfrac{1}{\sin\dfrac{1}{z}}$ は、$\mathbf{C}\setminus\left\{\dfrac{1}{n\pi}; n\in\mathbf{Z}\right\}$ で正則であるが、$z=\dfrac{1}{n\pi}$ ($n\in\mathbf{Z}$) では定義されていない。$c=0$ とすると、任意の $R>0$ に対して、f は $0<|z-c|<R$ で正則とはならないので、$c=0$ は f の孤立特異点ではない (特異点が 0 に集積している)。 ■

例 4.15 (教科書 p.82) 有理関数 $f(z)=\dfrac{Q(z)}{P(z)}$ ($P(z),Q(z)\in\mathbf{C}[z]$) の分母の零点は孤立特異点である。実際、$P(z)$ の次数を n とすると、$P(z)$ の根は重複度も込めてちょうど n 個で、零点の個数は n 個以下であるから、零点は互いに孤立している。$P(z)$ の零点以外の点では f は正則であるから、零点は f の孤立特異点である。 ■

点 c の近傍で正則な関数 f は、c のまわりの (c を中心とする) 冪級数に展開できた (収束冪級数に一致) が、c が f の孤立特異点である場合はどうなるか、が問題である。

教科書 [4] では、孤立特異点 c のまわり ($0<|z-c|<R$) でのローラン展開を考えているが、ここでは普通のテキストの流儀に従って、c を中心とする**円環領域 (annulus)** $A(c;R_1,R_2) := \{z\in\mathbf{C}; R_1<|z-c|<R_2\}$ でのローラン展開を考える。$R_1=0$ の場合が、「c のまわりのローラン展開」になる。

定理 4.16 (円環領域で正則な関数の Laurent 展開) $c\in\mathbf{C}$ で、R_1, R_2 は $0\le R_1<R_2\le\infty$ を満たすとする (R_1 は 0 以上の実数だが、R_2 は R_1 より大きい実数であるか、または ∞ に等しい)。f が $R_1<|z-c|<R_2$ で正則ならば、$\exists\{a_n\}_{n\in\mathbf{Z}}$ s.t.

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-c)^n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-c)^n \quad (R_1<|z-c|<R_2). \tag{4.8}$$

(4.8) の右辺の級数は、$R_1<r_1<r_2<R_2$ を満たす任意の r_1, r_2 に対して、$r_1\le|z-c|\le r_2$ で一様に絶対収束する (特に一様収束であり、絶対収束である)。
(係数の一意性) 等式 (4.8) が成り立っているならば、$R_1<r<R_2$ を満たす任意の r に対して、

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-c|=r}\frac{f(z)}{(z-c)^{n+1}}\,dz \quad (n\in\mathbf{Z}). \tag{4.9}$$

証明 (係数の一意性) $\forall m\in\mathbf{Z}$ に対して、等式 (4.8) の両辺を $(z-c)^{m+1}$ で割った

$$\frac{f(z)}{(z-c)^{m+1}}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-c)^{n-m-1}$$

は、$R_1 < r < R_2$ なる r に対して、円周 $|z-c| = r$ 上で一様に収束するので、

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-c|=r}\frac{f(z)}{(z-c)^{m+1}}\,dz &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-c|=r}\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-c)^{n-m-1}\,dz \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}a_n\int_{|z-c|=r}(z-c)^{n-m-1}\,dz \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}a_n\cdot 2\pi i\delta_{nm} = a_m.\end{aligned}$$

すなわち (4.9) が成立する。

(存在) $R_1 < |z-c| < R_2$ なる任意の z に対して、$R_1 < r_1 < |z-c| < r_2 < R_2$ となる r_1, r_2 を取る。

$$C_1 : |\zeta - c| = r_1, \quad C_2 : |\zeta - c| = r_2, \quad C := C_2 - C_1$$

とおく。C は円環領域 $\mathcal{D} = \{\zeta; r_1 < |\zeta - c| < r_2\}$ の境界 $\partial\mathcal{D}$ を正の向きにたどる曲線である。$\overline{\mathcal{D}} = \{\zeta \in \mathbf{C}; r_1 \le |\zeta - c| \le r_2\}$ を含む領域 $R_1 < |\zeta - c| < R_2$ で f は正則であるから、Cauchy の積分公式によって、

$$\begin{aligned}f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-c|=r_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-c|=r_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta.\end{aligned}$$

被積分関数は等比級数の和の形をしている:

$$S(\zeta) := \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{f(\zeta)}{\zeta - c}\cdot\frac{1}{1 - \dfrac{z-c}{\zeta - c}} = \frac{f(\zeta)}{\zeta - c}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-c}{\zeta-c}\right)^n.$$

この部分和

$$S_N(\zeta) := \frac{f(\zeta)}{\zeta - c}\sum_{n=0}^{N-1}\left(\frac{z-c}{\zeta-c}\right)^n = \frac{f(\zeta)}{\zeta - c}\cdot\frac{1 - \left(\dfrac{z-c}{\zeta-c}\right)^N}{1 - \dfrac{z-c}{\zeta-c}}$$

との差

$$S(\zeta) - S_N(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{\zeta - c}\cdot\frac{\left(\dfrac{z-c}{\zeta-c}\right)^N}{1 - \dfrac{z-c}{\zeta-c}}$$

は、$|\zeta - c| = r_2$ なる ζ に対して

$$|S(\zeta) - S_N(\zeta)| \le \frac{\displaystyle\max_{|\zeta-c|=r_2}|f(\zeta)|}{|\zeta - c|}\cdot\frac{\left|\dfrac{z-c}{\zeta-c}\right|^N}{1 - \left|\dfrac{z-c}{\zeta-c}\right|} = \frac{\displaystyle\max_{|\zeta-c|=r_2}|f(\zeta)|}{r_2}\cdot\frac{\left(\dfrac{|z-c|}{r_2}\right)^N}{1 - \dfrac{|z-c|}{r_2}} = \text{const.}\left(\frac{|z-c|}{r_2}\right)^N$$

と評価されるので、円周 $\{\zeta \in \mathbf{C}; |\zeta - c| = r_2\}$ 上で一様収束する。

同様に

$$\begin{aligned}-\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} &= \frac{-f(\zeta)}{(\zeta - c) - (z - c)} = \frac{f(\zeta)}{z - c}\cdot\frac{1}{1 - \dfrac{\zeta - c}{z - c}} = \frac{f(\zeta)}{z - c}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\zeta - c}{z - c}\right)^n \\ &= f(\zeta)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\zeta - c)^n}{(z-c)^{n+1}} = f(\zeta)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\zeta - c)^{n-1}}{(z-c)^n}\end{aligned}$$

は円周 $\{\zeta\in\mathbf{C}; |\zeta-c|=r_1\}$ で一様収束する。($\left|\dfrac{\zeta-c}{z-c}\right|\le\dfrac{r_1}{|z-c|}<1$ という評価が要)。

いずれの級数もそれぞれの積分路である円周上で一様収束するので、項別積分が可能で、

$$\begin{aligned}f(z)&=\sum_{n=0}^{\infty}(z-c)^n\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-c|=R_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-c)^{n+1}}d\zeta+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z-c)^n}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-c|=R_1}f(\zeta)(\zeta-c)^{n-1}d\zeta\\&=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-c)^n}.\end{aligned}$$

ただし

$$a_n:=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-c|=r_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-c)^{n+1}}d\zeta\quad(n=0,1,\cdots),\quad a_{-n}:=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-c|=r_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-c)^{-n+1}}d\zeta\quad(n=1,2,\cdots).$$

積分路変形の原理により、$R_1<r<R_2$ を満たす任意の r に対して、

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-c|=r}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-c)^{n+1}}d\zeta\quad(n\in\mathbf{Z}).$$

この級数が $r_1\le|\zeta-c|\le r_2$ で一様に絶対収束するのは、命題 4.3.2, 系 4.3.3 より明らかである。■

(**別証明** — 閉円環領域で一様に絶対収束することを self-contained に) $\{a_n\}$ を (4.9) で定めるとき、$R_1<\rho_1<\rho_2<R_2$ なる任意の ρ_1, ρ_2 に対して、

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-c)^n}\quad(\rho_1\le|z-c|\le\rho_2)$$

が成り立ち、右辺の級数は一様に絶対収束することを示せば良い。

$R_1<r_1<\rho_1<\rho_2<r_2<R_2$ なる r_1, r_2 を取り、

$$\begin{aligned}&C_1:|\zeta-c|=r_1,\quad C_2:|\zeta-c|=r_2,\quad C:=C_2-C_1,\\&\mathcal{D}:=A(c;r_1,r_2),\quad \Omega:=A(c;R_1,R_2),\\&M_1:=\max_{|\zeta-c|=r_1}|f(\zeta)|,\quad M_2:=\max_{|\zeta-c|=r_2}|f(\zeta)|\end{aligned}$$

とおく。$\partial\mathcal{D}=C^*$ (正の向きにまわる), $\overline{\mathcal{D}}\subset\Omega$ が成り立つので、Cauchy の積分公式によって、

(4.10) $$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta\quad(z\in\mathcal{D}).$$

任意の $z\in\overline{A}(c;\rho_1,\rho_2)$ を固定する。

(4.10) の右辺第 1 項を級数展開しよう。$\zeta\in C_2^*$ であるとき $|\zeta-c|=r_2$, また $|z-c|\le\rho_2$ であるから、$\left|\dfrac{z-c}{\zeta-c}\right|\le\dfrac{\rho_2}{r_2}<1$. ゆえに

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{(\zeta-c)-(z-c)}=\frac{1}{\zeta-c}\,\frac{1}{1-\dfrac{z-c}{\zeta-c}}=\frac{1}{\zeta-c}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-c}{\zeta-c}\right)^n$$

であるから、

(4.11) $$\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(\zeta)(z-c)^n}{(\zeta-c)^{n+1}}\quad(\zeta\in C_2^*).$$

ここで

$$\left|\frac{f(\zeta)(z-c)^n}{(\zeta-c)^{n+1}}\right| \le M_2\frac{\rho_2^n}{r_2^{n+1}} = \frac{M_2}{r_2}\left(\frac{\rho_2}{r_2}\right)^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{M_2}{r_2}\left(\frac{\rho_2}{r_2}\right)^n = \frac{M_2}{r_2(1-\rho_2/r_2)} < \infty$$

であるから、(4.11) は $\zeta \in C_2^*$ に関して一様に収束する。ゆえに

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(\zeta)(z-c)^n}{(\zeta-c)^{n+1}}d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty}(z-c)^n\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-c)^{n+1}}d\zeta.$$

(4.10) の右辺第 2 項を級数展開しよう。$\zeta \in C_1^*$ であるとき $|\zeta-c| = r_1$, また $|z-c| \ge \rho_1$ であるから、$\left|\dfrac{\zeta-c}{z-c}\right| \le \dfrac{r_1}{\rho_1} < 1$. ゆえに

$$-\frac{1}{\zeta-z} = -\frac{1}{(\zeta-c)-(z-c)} = \frac{1}{z-c}\,\frac{1}{1-\dfrac{\zeta-c}{z-c}} = \frac{1}{z-c}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\zeta-c}{z-c}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\zeta-c)^{n-1}}{(z-c)^n}$$

であるから、

$$-\frac{f(\zeta)}{\zeta-z} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(\zeta)(\zeta-c)^{n-1}}{(z-c)^n} \quad (\zeta \in C_1^*). \tag{4.12}$$

ここで

$$\left|\frac{f(\zeta)(\zeta-c)^{n-1}}{(z-c)^n}\right| \le \frac{M_1}{r_1}\frac{r_1^n}{\rho_1^n} = \frac{M_1}{r_1}\left(\frac{r_1}{\rho_1}\right)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{M_1}{r_1}\left(\frac{r_1}{\rho_1}\right)^n = \frac{M_1}{r_1(1-r_1/\rho_1)} < \infty$$

であるから、(4.12) は $\zeta \in C_1^*$ に関して一様に収束する。ゆえに

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(\zeta)(\zeta-c)^{n-1}}{(z-c)^n}d\zeta = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z-c)^n}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}f(\zeta)(\zeta-c)^{n-1}\,d\zeta.$$

以上から、

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-c)^n} \quad (z \in \overline{A}(c;r_1,r_2)), \quad a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-c)^{n+1}}d\zeta \quad (n = 0,1,\dots),$$

$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}f(\zeta)(\zeta-c)^{n-1}d\zeta \quad (n = 1,2,\dots).$$

ここに現れる 2 つの級数が一様に絶対収束することは、次の評価と Weierstrass の M-test から分かる。

$$|a_n(z-c)^n| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{f(\zeta)(z-c)^n}{(\zeta-c)^{n+1}}d\zeta\right| \le \frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi r_2\cdot\frac{M_2}{r_2}\left(\frac{\rho_2}{r_2}\right)^n = M_2\left(\frac{\rho_2}{r_2}\right)^n \quad (n = 0,1,\cdots),$$

$$\left|\frac{a_{-n}}{(z-c)^n}\right| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(\zeta)(\zeta-c)^{n-1}}{(z-c)^n}d\zeta\right| \le \frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi r_1\cdot\frac{M_1}{r_1}\left(\frac{r_1}{\rho_1}\right)^n = M_1\left(\frac{r_1}{\rho_1}\right)^n \quad (n = 1,2,\cdots),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}M_2\left(\frac{\rho_2}{r_2}\right)^n = \frac{M_2}{1-\rho_2/r_2} < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty}M_1\left(\frac{r_1}{\rho_1}\right)^n = \frac{M_1 r_1}{\rho_1(1-r_1/\rho_1)} < \infty.$$

積分路変形の原理から、C_1, C_2 とも $|\zeta-c| = r$ $(R_1 < r < R_2)$ で置き換えても変わらない。

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-c|=r}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-c)^{n+1}}d\zeta \quad (n \in \mathbf{Z}).\blacksquare$$

注意 4.3.6 ($\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}$ の意味) $S = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$ の意味を念のために確認しておく。時々誤解されるのだが、

$$S = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{k=n} a_k$$

という意味ではない！

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} a_k + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_{-k},$$

あるいは同じことだが、

$$S = \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \sum_{k=-n}^{k=m} a_k$$

ということである (これは広義積分の定義が、$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)dx$ ではなく、$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{a}^{\infty} f(x)\,dx + \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{R_2\to\infty} \int_{a}^{R_2} f(x)\,dx + \lim_{R_1\to\infty} \int_{-R_1}^{a} f(x)\,dx$, あるいは $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{R_1\to\infty \\ R_2\to\infty}} \int_{-R_1}^{R_2} f(x)\,dx$ いう話と同様である。)。$\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}$ は意味がやや曖昧なので、ε-N で書いておくと、

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}, \exists M \in \mathbf{N}, (\forall n \in \mathbf{N} : n \geq N), (\forall m \in \mathbf{N} : m \geq M) \quad \left| S - \sum_{k=-n}^{m} a_k \right| < \varepsilon,$$

または、

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}, (\forall n \in \mathbf{N} : n \geq N), (\forall m \in \mathbf{N} : m \geq N) \quad \left| S - \sum_{k=-n}^{m} a_k \right| < \varepsilon,$$

ということである (どちらでも同じこと)。 ■

(4.8) を、f の $R_1 < |z - c| < R_2$ における**ローラン展開** (**Laurent expansion**, **Laurent series**) と呼ぶ。特に $R_1 = 0$ の場合、孤立特異点 c のまわりの (「c における」とも言う) ローラン展開とも呼ぶ。

ローラン展開を求めるため方法をいくつか紹介するが、“万能の方法” は存在しない。それらの方法をマスターすることではなく、ローラン展開とは何かを理解することを目標にすること。

Example 4.3.7 (色々な求め方) Laurent 展開は、Taylor 展開の一般化と言えるが (c の近傍で正則な場合、Taylor 展開可能できるが、それは実は Laurent 展開である)、Taylor 展開の場合の

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - c)^n, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

という公式に相当する一般的に適用できる計算に便利な公式は存在しない。一方で

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - c| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - c)^{n+1}} d\zeta$$

という公式は、a_n の具体的計算には役立たないことが多い (線積分の計算は大変なことが多い)。とにかく何らかの手段で

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n (z - c)^n \quad (R_1 < |z - c| < R_2)$$

を満たす $\{a_n\}$ が得られれば、これが Laurent 展開である、という事実を利用する場合が多い。

例えば関数 $f(z) = \dfrac{3}{(z-1)^2}$ は、それ自身が 1 のまわりの Laurent 展開を与える。実際、

$$a_{-2} := 3, \quad a_n := 0 \quad (n \in \mathbf{Z} \setminus \{-2\})$$

で $\{a_n\}$ を定義するとき、

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-1)^n \quad (0 < |z-1| < \infty)$$

が成り立つ。

その他に、Taylor 展開

$$\exp z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n \quad (z \in \mathbf{C})$$

に代入することで得られる

$$\exp \frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{z}\right)^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n} \quad (0 < |z| < \infty).$$

また

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \quad (z \in \mathbf{C})$$

を割って得られる

$$\frac{\sin z}{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n-1} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n-1} \quad (0 < |z| < \infty)$$

などなど。■

計算テクニック: 有理関数の Laurent 展開

例 4.3.1 で見たような等比級数の和の公式をとことん利用してみよう。

任意の有理関数 f は部分分数分解すると、多項式または $\dfrac{1}{(z-a)^n}$ の形の項の線型結合で書ける。各々の項の Laurent 展開を寄せ集めることで f の Laurent 展開が得られる。

$n = 1$ の場合、つまり $\dfrac{1}{z-a}$ は、以下に示すように、等比級数の和の公式 $\dfrac{1}{1-r} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n$ (収束 $\Leftrightarrow |r| < 1$) を用いて Laurent 展開できる。

- 0 のまわりの Laurent 展開は、

$$\frac{1}{z-a} = \frac{1}{-a(1-z/a)} = -\frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{a}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{a^{n+1}} \quad (\text{収束} \Leftrightarrow |z/a| < 1 \Leftrightarrow |z| < |a|).$$

- $|a| < |z-a| < \infty$ における Laurent 展開は

$$\frac{1}{z-a} = \frac{1}{z(1-a/z)} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n-1}}{z^n} \quad (\text{収束} \Leftrightarrow |a/z| < 1 \Leftrightarrow |a| < |z| < \infty).$$

- $c \in \mathbf{C}$ のまわりの Laurent 展開は、

$$\frac{1}{z-a} = \frac{1}{z-c-(a-c)} = -\frac{1}{a-c} \cdot \frac{1}{1-(z-c)/(a-c)} = -\frac{1}{a-c}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-c}{a-c}\right)^n$$
$$= -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-c)^n}{(a-c)^{n+1}} \quad (\text{収束} \Leftrightarrow |(z-c)/(a-c)| < 1 \Leftrightarrow |z-c| < |a-c|).$$

- $|a-c| < |z-c| < \infty$ における Laurent 展開は、

$$\frac{1}{z-a} = \frac{1}{z-c-(a-c)} = \frac{1}{z-c} \cdot \frac{1}{1-(a-c)/(z-c)} = \frac{1}{z-c}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a-c}{z-c}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a-c)^n}{(z-c)^{n+1}}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a-c)^{n-1}}{(z-c)^n} \quad (\text{収束} \Leftrightarrow |(a-c)/(z-c)| < 1 \Leftrightarrow |a-c| < |z-c| < \infty).$$

4.3.2 孤立特異点の分類

f の c のまわり (または $R_1 < |z-c| < R_2$ における) Laurent 展開のうちの、$(z-c)$ の負の冪からなる部分

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-c)^n}$$

を f のローラン展開の**主部** (主要部, **principal part**) と呼ぶ。

問 1 (教科書 p.84) 次の関数のそれぞれの孤立特異点における主要部は何か。
(1) $\dfrac{\cos z}{z^2 \sin z}$ $(z=0)$ (1) $\dfrac{z^2}{(z^2-1)^3}$ $(z=1)$

(2010/10/27, 11/8 解説)
孤立特異点を詳しく調べる。そのために分類をする。

Definition 4.3.8 (除去可能特異点、極、(孤立) 真性特異点) Ω は $\mathbf{C}$ の開集合で、$f\colon \Omega \to \mathbf{C}$, $c \in \mathbf{C}$ は f の孤立特異点とする。すると (孤立特異点の定義から)

$$\exists R \in \mathbf{R} \quad \text{s.t. } f \text{ は } 0 < |z-c| < R \text{ で正則。}$$

$R_1 = 0$, $R_2 = R$ として、定理 4.16 の仮定が成り立つので、

$$\exists 1\{a_n\}_{n\in\mathbf{Z}} \quad \text{s.t.} \quad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-c)^n \quad (0 < |z-c| < R).$$

(a) c が f の**除去可能特異点** (**removable singularity**) である (f は c を除去可能特異点に持つ) とは、
$$\forall n \in \mathbf{N} \quad a_{-n} = 0$$
が成り立つことをいう[9]。言い換えると、f の c のまわりのローラン展開の主部が 0 であるということである。

(b) c が f の**極** (**pole**) である (f は c を極に持つ) とは、

$$\exists k \in \mathbf{N} \quad a_{-k} \neq 0 \wedge [\forall n > k \quad a_{-n} = 0]$$

が成り立つことをいう。言い換えると、f の c のまわりのローラン展開の主部が有限個の 0 でない項からなるということである。また、このとき k を極 c の**位数**と呼び、「c は k 位の極」ともいう。

(c) c が f の **(孤立) 真性特異点 (isolated essential singularity)** であるとは、

$$\forall k \in \mathbf{N} \quad \forall n > k \quad a_{-n} \neq 0$$

が成り立つことをいう。言い換えると、f の c のまわりのローラン展開の主部が無限個の 0 でない項からなるということである。

余談 4.3.9 除去可能特異点、極、真性特異点はいわゆる分類になっているのだが、そのことが上の書き方では少し分かりづらいかもしれない。その点が分かりやすいように書き換えてみよう。集合 X の要素の総個数 (濃度) を $\sharp X$ と書くことにすると、

(a) c が f の除去可能特異点 $\Leftrightarrow \sharp\{n \in \mathbf{N}; a_{-n} \neq 0\} = 0$ (個数が 0)

(b) c が f の極 $\Leftrightarrow 1 \leq \sharp\{n \in \mathbf{N}; a_{-n} \neq 0\} < \infty$ (個数が 0 でない有限個)

(c) c が f の真性特異点 $\Leftrightarrow \sharp\{n \in \mathbf{N}; a_{-n} \neq 0\} = \infty$ (個数が無限個)

となる。■

Example 4.3.10 $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$ $(z \in \mathbf{C} \setminus \{0\})$ は 0 を除去可能特異点に持つ。実際、f の 0 のまわりの Laurent 展開は

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \cdots \quad (0 < |z| < \infty)$$

であって、主部は 0 である。■

Example 4.3.11 $f(z) = \dfrac{2}{(z-3)^4}$ $(z \in \mathbf{C} \setminus \{3\})$ は、3 を 4 位の極に持つ。実際、

$$f(z) = \frac{2}{(z-3)^4}$$

は 3 のまわりの Laurent 展開でもあり ($a_{-4} = 2$, $a_n = 0$ $(n \in \mathbf{Z} \setminus \{-4\})$ とすると、$f(z) = \displaystyle\sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n (z-3)^n$)、$\dfrac{2}{(z-3)^4}$ は Laurent 展開の主部である。■

Example 4.3.12 $f(z) = \exp \dfrac{1}{z}$ $(z \in \mathbf{C} \setminus \{0\})$ は 0 を真性特異点に持つ。実際、f の 0 のまわりの Laurent 展開は

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{z}\right)^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n} \quad (0 < |z| < \infty)$$

であり、

$$f \text{ の } 0 \text{ のまわりの Laurent 展開の主部} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{z^n}$$

であるから、主部は無限個の 0 でない項からなる。■

Proposition 4.3.13 (除去可能特異点の性質) c が f の除去可能特異点であるとき、次の (1), (2) が成り立つ。

(1) $\displaystyle\lim_{\substack{z\neq c\\ z\to c}} f(z)$ は有限確定である (有限の極限が存在する)。

(2) $\exists R\in(0,\infty]$, $\exists\widetilde{f}\colon D(c;R)\to\mathbf{C}$ 正則 s.t.

$$f(z)=\widetilde{f}(z)\quad(0<|z-c|<R).$$

すなわち、f は c までこめて正則に拡張できる。

証明 f の c のまわりの Laurent 展開

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-c)^n}\quad(0<|z-c|<R)$$

において、c が除去可能特異点であるという仮定から、

$$\forall n\in\mathbf{N}\quad a_{-n}=0.$$

ゆえに

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n\quad(0<|z-c|<R).$$

右辺の級数は $z=c$ でも収束する (値は a_0) ことに注意して、

$$\widetilde{f}(z):=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n\quad(|z-c|<R)$$

とおくと、$\widetilde{f}\colon D(c;R)\to\mathbf{C}$ は (収束冪級数なので) 正則であり、特に $z=c$ で連続であるから、

$$\lim_{\substack{z\neq c\\ z\to c}} f(z)=\lim_{\substack{z\neq c\\ z\to c}}\widetilde{f}(z)=\widetilde{f}(c)=a_0.\blacksquare$$

注意 4.3.14 c が f の除去可能特異点であるとき、特に断りなく、f を $D(c;R)$ 上の正則な関数 $\widetilde{f}$ に置き換えて議論することが多い。この $\widetilde{f}$ は、

$$\widetilde{f}(z):=\begin{cases}f(z) & (0<|z-c|<R)\\ \displaystyle\lim_{\substack{z\neq c\\ z\to c}} f(z) & (z=c)\end{cases}$$

と特徴づけることも出来る。 ■

問 c が f の高々 k 位の極であるとき、$\exists\{a_n\}_{n\geq -k}$, $\exists R>0$ s.t.

$$f(z)=\sum_{j=1}^{k}\frac{a_{-j}}{(z-c)^j}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n\quad(0<|z-c|<R)$$

と Laurent 展開できるが、

$$a_{-k+n}=\frac{1}{n!}\lim_{\substack{z\neq c\\ z\to c}}\left(\frac{d}{dz}\right)^n\left[(z-c)^k f(z)\right]\quad(n=0,1,2,\dots)$$

が成り立つことを示せ。

Proposition 4.3.15 (極の性質) c が f の極であれば、$\lim_{\substack{z\neq c\\ z\to c}} f(z)=\infty.$

証明 c が f の孤立特異点であるから、$\exists R>0$, $\exists\{a_n\}$ s.t.

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-c)^n}\quad (0<|z-c|<R).$$

極の位数を k とすると、$a_{-k}\neq 0$ かつ ($\forall n\in\mathbf{N}$: $n>k$) $a_{-n}=0$ であるから、

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n+\sum_{n=1}^{k}\frac{a_{-n}}{(z-c)^n}\quad (0<|z-c|<R).$$

前命題と同様に

$$\lim_{\substack{z\neq c\\ z\to c}}\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n=a_0.$$

$\zeta=\dfrac{1}{z-c}$ とおくと、$z\neq c$, $z\to c$ のとき $\zeta\to\infty$ で、

$$\sum_{n=1}^{k}\frac{a_{-n}}{(z-c)^n}=\sum_{n=1}^{k}a_{-n}\zeta^n.$$

番外命題 **??** により、

$$\lim_{\zeta\to\infty}\sum_{n=1}^{k}a_{-n}\zeta^n=\infty.$$

ゆえに

$$\lim_{\substack{z\neq c\\ z\to c}}f(z)=a_0+\infty=\infty.\blacksquare$$

Lemma 4.3.16 (Riemann) f が $0<|z-c|<R$ で正則かつ有界であれば、c は f の除去可能特異点である。特に $\lim_{\substack{z\neq c\\ z\to c}} f(z)$ が有限確定であれば、c は f の除去可能特異点である。

証明 f が正則であることから、

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-c)^n}\quad (0<|z-c|<R).$$

a_n ($n\in\mathbf{Z}$) は $0<r<R$ を満たす任意の r に対して

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-c|=r}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-c)^{n+1}}d\zeta\quad (n\in\mathbf{Z})$$

と書ける。f が有界という仮定から、$\exists M\in\mathbf{R}$ s.t. $|f(z)|\leq M$ $(0<|z-c|<R)$.

$$|a_n|\leq\frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta-c|=r}\frac{|f(\zeta)|}{|z-c|^{n+1}}|d\zeta|\leq\frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta-c|=r}\frac{M}{r^{n+1}}|d\zeta|=\frac{M}{2\pi r^{n+1}}\int_{|\zeta-c|=r}|d\zeta|=\frac{M}{2\pi r^{n+1}}\cdot 2\pi r=\frac{M}{r^n}.$$

特に

$$|a_{-n}|\leq Mr^n\quad (n\in\mathbf{N}).$$

$r\downarrow 0$ とすることで $a_{-n}=0$ ($n\in\mathbf{N}$). ゆえに f の c におけるローラン展開の主部は 0 であるので、c は f の除去可能特異点である。 $\blacksquare$

別証 (不等式は嫌いだという人向け[10]) f が $A(c;0,R)$ で正則であるとする。

$$g(z) := \begin{cases} (z-c)^2 f(z) & (0<|z-c|<R) \\ 0 & (z=c) \end{cases}$$

とおく。g は明らかに $0<|z-c|<R$ で正則であるが、

$$g'(c) = \lim_{z\to c}\frac{g(z)-g(c)}{z-c} = \lim_{z\to c}\frac{(z-c)^2 f(z)-0}{z-c} = \lim_{z\to c}(z-c)f(z) = 0$$

であるから (ここで f が有界であることを用いた)、g は c でも微分可能で、結局 $|z-c|<R$ で正則である。ゆえにその範囲で収束する冪級数に展開できる:

$$\exists\{a_n\}_{n\ge 0} \quad \text{s.t.} \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n \quad (|z-c|<R).$$

$g(c)=0$, $g'(c)=0$ であるから、$a_0=a_1=0$. ゆえに

$$g(z) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z-c)^n = (z-c)^2 \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z-c)^{n-2} = (z-c)^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(z-c)^n \quad (|z-c|<R).$$

これから

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(z-c)^n \quad (0<|z-c|<R).$$

ゆえに c は f の除去可能特異点である。 ■

Theorem 4.3.17 (Casorati-Weierstrass) c は f の孤立真性特異点とするとき、$\forall\beta\in\mathbf{C}\cup\{\infty\}$, $\exists\{z_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ s.t. $z_n\ne c$ $(\forall n\in\mathbf{N})$, $\lim_{n\to\infty} z_n = c$, $\lim_{n\to\infty} f(z_n)=\beta$.

証明 f は $0<|z-c|<R$ で正則とする。$\forall\beta\in\mathbf{C}$ に対して次が成り立つ。

主張

$$\forall\varepsilon>0,\ \forall r\in(0,R),\ \exists z\in A(c;0,r) \text{ s.t. } |f(z)-\beta|<\varepsilon.$$

もしこれが証明できれば、$n=1,2,\cdots$ に対して、$\varepsilon = r = \dfrac{1}{n}$ として用いて、$\exists\{z_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ s.t.

$$\forall n\in\mathbf{N} \quad z_n\in B(c;1/n), \quad |f(z_n)-\beta|<\frac{1}{n}.$$

これから

$$\lim_{n\to\infty} z_n = c, \quad \lim_{n\to\infty} f(z_n) = \beta.$$

以下、上の主張を背理法[11]を用いて証明する。そのため成り立たないと仮定すると、

$$\exists\varepsilon>0 \quad \exists r>0 \quad \forall z\in A(c;0,r) \quad |f(z)-\beta|\ge\varepsilon.$$

このとき、

$$g(z) := \frac{1}{f(z)-\beta} \quad (z\in A(c;0,r))$$

[10] どうもそういう人がいるみたい。個人的には、Riemann の定理の不等式を用いた証明は、Liouville の定理の Cauchy 評価を用いた証明と同じで、面白く、ある種の美しさを感じたりもするのだけれど、そうでない人もいるらしい。この別証にも、それなりの面白さは感じられるけれど…

[11] 背理法 (proof by contradiction, reductio ad absurdum)

とおくと (分母が 0 にならないことに注意)、g は除外近傍 $A(c;0,r)$ で正則である。ゆえに c は g の孤立特異点であるが、

$$|g(z)| \le \frac{1}{\varepsilon} \quad (z \in A(c;0,r))$$

という評価が成り立つので、Riemann の定理によって、c は除去可能な特異点である。すなわち g は $B(c;r)$ で正則な関数に拡張できる。定義から $g(z) \neq 0$ $(z \in A(c;0,r))$ である。

$$f(z) = \beta + \frac{1}{g(z)} = \frac{\beta g(z) + 1}{g(z)}$$

であるから、c は f の除去可能特異点または極である (c が g の零点でなければ c は f の除去可能特異点, c が g の k 位の零点であれば、c は f の k 位の極)。これは c が f の孤立真性特異点であるという仮定に反する。■

Corollary 4.3.18 (孤立特異点の lim による特徴づけ) c が f の孤立特異点であるとき、以下の (1), (2), (3) が成り立つ。

(1) c が f の除去可能特異点であるためには、$\displaystyle\lim_{\substack{z\neq c\\ z\to c}} f(z)$ が有限確定であることが必要十分である。

(2) c が f の極であるためには、$\displaystyle\lim_{\substack{z\neq c\\ z\to c}} f(z) = \infty$ であることが必要十分である。

(3) c が f の孤立真性特異点であるためには、$\displaystyle\lim_{\substack{z\neq c\\ z\to c}} f(z)$ が有限確定でもなく、$\displaystyle\lim_{\substack{z\neq c\\ z\to c}} f(z) = \infty$ でもないことが必要十分である。

証明 必要性は上の命題、定理で分かる。それを認めると、分類であることから、十分性は明らか。■

Example 4.3.19 $f(z) := \exp\left(-\dfrac{1}{z^2}\right)$ について、0 は f の孤立真性特異点である。一般論から $z \to 0$ のときの $f(z)$ の極限は存在しないが、実際

$$\lim_{\substack{x\in\mathbf{R}\\ x\to 0}} f(x) = 0,$$

$$\lim_{\substack{y\in\mathbf{R}\\ y\to 0}} f(iy) = \infty$$

のように近づけ方によって、0 に収束したり、∞ に近付いたりする。■

実は、Casorati-Weierstrass の定理よりももっと強く、次の定理が成り立つことが知られている。

Theorem 4.3.20 (Picard の大定理) c は f の孤立真性特異点とするとき、$\exists e \in \mathbf{C}$, ($\forall U$: c の除外近傍)、$\forall v \in \mathbf{C} \setminus \{e\}$, $\exists z \in U$ s.t. $f(z) = v$. — 高々一つの除外値を除き、c の任意の除外近傍において、その値を取る。

この定理の証明は省略する (例えば Ahlfors [5] にある)。Picard の定理について、一松 [6] に色々書いてある。

問 2 (教科書 p.85) $f(z) = \exp\dfrac{1}{z}$ に対して、次の性質を持つ数列 $z_n \to 0$ の例をそれぞれあげよ。
(1) $|f(z)| \to \infty$ (2) $f(z_n) \to 0$ (3) $\forall \alpha \neq 0$ に対して、$f(z_n) \to \alpha$.

改良版問　以下の (1), (2), (3) を証明せよ。

(1) $\forall a \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists z \in A(0;0,\varepsilon)$ s.t. $\exp \dfrac{1}{z} = a$.

(2) $\exists \{z_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ s.t. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \exp \frac{1}{z_n} = \infty$ かつ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} z_n = 0$.

(3) $\exists \{z_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ s.t. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \exp \frac{1}{z_n} = 0$ かつ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} z_n = 0$.

(略解: $a = re^{i\theta}$ ($r > 0$, $\theta \in [0, 2\pi)$) とする。$\exp \dfrac{1}{z} = a = re^{i\theta}$ は

$$\exists n \in \mathbf{Z} \quad \text{s.t.} \quad \frac{1}{z} = \log r + i(\theta + 2n\pi)$$

と同値である。ゆえに

$$\exists n \in \mathbf{Z} \quad \text{s.t.} \quad z = \frac{1}{\log r + i(\theta + 2n\pi)}$$

と同値である。そこで n を十分大きく取れば…(2), (3) については、$w_n = 1/z_n$ とおいて、w_n について考えると、簡単で具体的な例が見つかる。) ■

注意 4.3.21 (判定法) 以上は分類なので、逆に

$$\lim_{\substack{z\neq c\\ z\to c}} f(z)$$

を調べることで、孤立特異点の種類が判定できる (有限の極限値を持てば除去可能特異点、∞ となれば極、どちらでもなければ真性特異点)。必ずしもローラン展開を具体的に求める必要はないことに注意しよう。

$$f(z) = (z-c)^n g(z) \quad (0 < |z-c| < r), \quad n \in \mathbf{Z}, \quad g \text{ は } |z-c| < r \text{ で正則}, \quad g(c) \neq 0$$

と変形できた場合、$n \geq 0$ ならば c は除去可能特異点であり[12]、$n < 0$ ならば c は $-n$ 位の極である[13]。■

注意 4.17 (教科書 p.85) f が a の適当な近傍で収束冪級数に展開できないとき、a は f の特異点と呼ぶ。「孤立特異点は特異点であるが」と我々の採用した教科書に書いてあるが、この教科書の孤立特異点の定義ではそれは嘘になるんじゃないですか。ともあれ、孤立特異点ではない特異点も存在する。一つには孤立特異点が集積している点 ($\dfrac{1}{\sin\frac{1}{z}}$ の $z = 0$ がそういう点)。

多価関数 (**multifunction**, multi-valued function) の**分岐点**これは代数分岐点、対数分岐点、超越分岐点 (transcendental branch point) の 3 つに分類される。$f(z) = \mathrm{Log}\,(1-z)$ の $z = 0$. (特異点は定義域の内点というわけではない。) ■

問　(1) $f(z) = \dfrac{\cos z}{z^2}$ に対して、0 はどういう種類の孤立特異点か。(2) $f(z) = \dfrac{\sin(z^3)}{z(1-\cos z)}$ に対して、0 はどういう種類の孤立特異点か。(3) $r > 0$ がどんなに小さくても、$A(c;0;r)$ において f は 0 以外のすべての複素数値を取ることを示せ。

---

[12] $n > 0$ ならば $\displaystyle\lim_{\substack{z\neq c\\ z\to c}} f(z) = 0$, $n = 0$ ならば $\displaystyle\lim_{\substack{z\neq c\\ z\to c}} f(z) = g(c)$ で、いずれの場合も有限の極限を持つから。

[13] $\displaystyle\lim_{\substack{z\neq c\\ z\to c}} f(z) = \infty$ が成り立つから。

まとめ

c が f の孤立特異点 $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ $\exists R>0$ s.t. f は $A(c;0,R) := \{z\in\mathbf{C}; 0<|z-c|<R\}$ で正則
以下、f は $A(c;0;R)$ で正則と仮定する。

c が f の孤立特異点 $\Longrightarrow \exists R>0, \exists\{a_n\}$ s.t. $f(z)=\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-c)^n$ $(z\in A(c;0,R))$

(実は a_n は一意的に定まり、$a_n = f^{(n)}(c) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{|z-c|=r}\frac{f(z)}{(z-c)^{n+1}}dz$ $(0<r<R)$, また $0<\forall r_1<\forall r_2<R$ に対して、$\overline{A}(c;r_1,r_2)=\{z\in\mathbf{C}; r_1\le|z-c|\le r_2\}$ で一様かつ絶対に収束する。)

c が f の除去可能特異点 $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ f の c の回りのローラン展開の主部 $=0$
c が f の除去可能特異点 $\Longleftrightarrow$ 有限の $\displaystyle\lim_{\substack{z\ne c\\ z\to c}} f(z)$ が存在する

c が f の除去可能特異点 $\Longrightarrow \widetilde{f}(z) := \begin{cases} f(z) & (z\in A(c;0,r)) \\ \displaystyle\lim_{\substack{z\ne c\\ a\to c}} f(z) & (z=c)\end{cases}$ は $D(c;r)$ で正則。

c が f の k 位の極 $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ f の c の回りのローラン展開の主部が $\displaystyle\sum_{n=1}^{k}\frac{a_{-n}}{(z-c)^n}$, $a_{-k}\ne 0$

c が f の極 $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ $\exists k\in\mathbf{N}$ s.t. c は f の k 位の極
c が f の極 $\Longleftrightarrow \displaystyle\lim_{\substack{z\ne c\\ z\to c}} f(z)=\infty$

c が f の真性特異点 $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ f の c の回りのローラン展開の主部は (0 でない) 無限項からなる
$(\Longleftrightarrow \sharp\{n\in\mathbf{N}; a_{-n}\ne 0\}=\infty)$

極と極の位数の判定法について説明しておこう。対比させると分かりやすいので、零点の位数について簡単に述べておく。

補足 1: 正則関数の零点の位数

(2010/11/10 解説)
多項式 $f(z)$ の根[14]について、重複度を考えた。次の命題 (証明は省略) が成立することを知っているであろう。

Proposition 4.3.22 (k 重根の条件) $f(z)\in\mathbf{C}[z]$, $c\in\mathbf{C}$, $k\in\mathbf{N}$ とするとき、次の 3 条件は同値である。

(i) c は $f(z)$ の根で、重複度は k である。
(すなわち、$f(z)$ を 1 次因数の積に因数分解したとき、$(z-c)$ はちょうど k 個現れる — $k=1$ の場合、重根ではないわけだが、重複度 1 の根ということにしておく)

(ii) $\exists g(z)\in\mathbf{C}[z]$ s.t. $f(z)=(z-c)^k g(z)$ かつ $g(c)\ne 0$.

(iii) $f(c)=f'(c)=\cdots=f^{(k-1)}(c)=0$ かつ $f^{(k)}(c)\ne 0$.

---

[14] $f(z)=a\displaystyle\prod_{j=1}^{n}(z-\alpha_j)$ と、$f(z)$ を 1 次式の積に因数分解したときに現れる、α_j $(j=1,2,\dots,n)$ のことを多項式 $f(z)$ の (または方程式 $f(z)=0$ の) **根 (root)** と呼ぶ。一方、α が方程式 $f(z)=0$ の解であるとは、$f(\alpha)=0$ が成り立つことと定義する。有名な因数定理によって、α が $f(z)$ の根であるためには、α が $f(z)=0$ の解であることが必要十分であることが分かる。最近の高校数学では、重解という言葉を使っているが、もともとは重根という言葉を使うのが普通であった。因数分解を使わずに「重なっていること」を表すのは面倒で、重根と呼ぶのが筋が通っている。

さて、f を $c\in\mathbf{C}$ の近傍で正則な関数とするとき、残念ながら $f(z)$ を一般に因数分解することは出来ないが、上の命題は部分的には拡張可能である。

Proposition 4.3.23 (k 位の零点の条件) $c\in\mathbf{C}$, f は c の開近傍 U で正則、$k\in\mathbf{N}$ とするとき、次の 2 条件は互いに同値である。

(i) U で正則な関数 g が存在して、$f(z)=(z-c)^k g(z)$ $(z\in U)$ かつ $g(c)\neq 0$.

(ii) $f(c)=f'(c)=\cdots=f^{(k-1)}(c)=0$ かつ $f^{(k)}(c)\neq 0$.

証明 k に関する帰納法で (i) $\Leftrightarrow$ (ii) を示す、というのも可能である。以下では一気に証明する。

(i) $\Longrightarrow$ (ii) の証明。$f(z)=(z-c)^k g(z)$, $g(c)\neq 0$ とする。$h(z):=(z-c)^k$ とおくと、$f(z)=g(z)h(z)$. $0\le m\le k$ に対して、Leibniz の法則により

$$f^{(m)}(z)=\sum_{r=0}^{m}\binom{m}{r}h^{(r)}(z)g^{(m-r)}(z).$$

明らかに $r\le k-1$ であれば、$h^{(r)}(c)=0$ であることに注意すると、$0\le m\le k-1$ ならば、$h^{(r)}(c)=0$ $(0\le r\le m)$ であるから、

$$f^{(m)}(c)=\sum_{r=0}^{m}\binom{m}{r}\cdot 0\cdot g^{(m-r)}(c)=0\quad(0\le m\le k-1),$$
$$f^{(k)}(c)=\binom{k}{k}k!g(c)=k!g(c)\neq 0.$$

(ii) $\Longrightarrow$ (i) の証明。f は c の近傍で正則なので、c の回りで Taylor 展開できる。すなわち $\exists R>0$, $\exists\{a_n\}$ s.t.

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n\quad(|z-c|<R).$$

一般に $a_n=\dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}$ であるから、仮定より、$a_0=a_1=\cdots=a_{k-1}=0$, $a_k\neq 0$. ゆえに

$$f(z)=\sum_{n=k}^{\infty}a_n(z-c)^n=(z-c)^k\sum_{n=k}^{\infty}a_n(z-c)^{n-k}=(z-c)^k\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+k}(z-c)^n.$$

ここで

$$g(z):=\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+k}(z-c)^n$$

とおくと、これは $|z-c|<R$ で正則な関数で、

$$f(z)=(z-c)^k g(z),\quad g(c)=a_k\neq 0.\blacksquare$$

$f(c)=0$ で、f が恒等的に 0 ではないとき、

$$f(c)=f'(c)=\cdots=f^{(k-1)}(c)=0\quad\text{かつ}\quad f^{(k)}(c)\neq 0$$

を満たす $k\in\mathbf{N}$ が必ず存在する。実際、もし $\forall n\in\mathbf{N}\cup\{0\}$ $f^{(n)}(c)=0$ であれば、c の近傍で

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(z-c)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{0}{n!}(z-c)^n=0$$

となり、$f \equiv 0$ が導かれるので、その対偶をとれば良い。

Definition 4.3.24 (正則関数の零点, 零点の位数) $c \in \mathbf{C}$, f は c の近傍で正則な関数とする。

(1) c が f の**零点** (**zero**) であるとは、$f(c)=0$ を満たすことをいう。

(2) f が恒等的には 0 でないとき、(上で存在することを示した)

$$f(c)=f'(c)=\cdots=f^{(k-1)}(c)=0 \quad \text{かつ} \quad f^{(k)}(c)\neq 0$$

を満たす $k \in \mathbf{N}$ を、f の零点 c の**位数**と呼ぶ。

Example 4.3.25 多項式 $f(z)$ については、根と零点は一致する。また根の重複度は零点の位数と一致する。■

Example 4.3.26 (a) $f(z)=\sin z$ で、$k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$) は 1 位の零点である。実際、

$$f(k\pi)=\sin k\pi=0, \quad f'(k\pi)=\cos k\pi=(-1)^k \neq 0$$

であるから、$k\pi$ は f の 1 位の零点である。あるいは Taylor 展開

$$\sin z=(-1)^k\sin(z-k\pi)=(-1)^k\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(z-k\pi)^{2n+1}$$

を利用して、

$$\sin z=(z-k\pi)g(z), \quad g(z):=(-1)^k\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(z-k\pi)^{2n}$$

と変形して、$g(0)=(-1)^k\neq 0$ を確めても良い。

(b) $f(z)=\cos z-1$ で、$2k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$) は 2 位の零点である。実際、

$$\begin{aligned}
&f(2k\pi)=\cos 2k\pi-1=1-1=0,\\
&f'(z)=-\sin z, \quad f'(2k\pi)=-\sin 2k\pi=0,\\
&f''(z)=-\cos z, \quad f''(2k\pi)=-\cos 2k\pi=-1\neq 0
\end{aligned}$$

であるから、$2k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$) は 2 位の零点である。あるいは、Taylor 展開

$$\cos z=\cos(z-2k\pi)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(z-2k\pi)^{2n}$$

を利用して、

$$\cos z-1=(z-k\pi)^2 g(z), \quad g(z):=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(z-2k\pi)^{2(n-1)}$$

と表し、$g(2k\pi)=-\dfrac{1}{2}\neq 0$ を確めても良い。■

補足 2: 極とその位数の特徴づけ

(2010/11/10 解説)

次の命題を、零点に関する **Proposition** 4.3.23 と比較してみると良い。この命題の (ii) $\Longrightarrow$ (i) の証明を見ると、極のまわりの Laurent 展開を求める問題は、Taylor 展開を求める問題に帰着されるこ

とが分かる。残念ながら (孤立) 真性特異点のまわりの Laurent 展開については、似たようなことは出来ない。

Proposition 4.3.27 (極の特徴づけ) c が f の孤立特異点, $k \in \mathbf{N}$ とするとき、次の (i), (ii) は互いに同値である。

(i) c は f の k 位の極

(ii) c のある近傍 U で正則な関数 g が存在して、

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-c)^k} \quad (z \in U \setminus \{c\}), \quad g(c) \neq 0.$$

証明 c が f の孤立特異点ということから、c のまわりで Laurent 展開できる。すなわち $\exists R \in (0,\infty]$, $\exists \{a_n\}_{n\in\mathbf{Z}}$ s.t.

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-c)^n \quad (0 < |z-c| < R).$$

(i) $\Longrightarrow$ (ii) の証明。c が f の k 位の極ならば、

$$a_{-k} \neq 0 \quad \text{かつ} \quad (\forall n \in \mathbf{N} : n > k) \quad a_{-n} = 0.$$

ゆえに

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=-k}^{\infty} a_n (z-c)^n \\ &= \frac{a_{-k}}{(z-c)^k} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-c} + a_0 + a_1(z-c) + a_2(z-c)^2 + \cdots \quad (0 < |z-c| < R) \end{aligned}$$

であるから、

$$(z-c)^k f(z) = a_{-k} + a_{-k+1}(z-c) + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-k}(z-c)^n \quad (0 < |z-c| < R).$$

この右辺は冪級数で、($0 < |z-c| < R$ で収束するのだから) 収束半径は R 以上である。そこで

$$g(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-k}(z-c)^n \quad (|z-c| < R)$$

とおくと、g は $D(c;R)$ で正則で、

$$(z-c)^k f(z) = g(z) \quad (0 < |z-c| < R).$$

ゆえに

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-c)^k} \quad (0 < |z-c| < R) \quad \text{かつ} \quad g(c) = \sum_{n=-k}^{\infty} a_{n-k}(c-c)^n = a_{-k} \neq 0.$$

(ii)$\Longrightarrow$(i) の証明。(ii) を仮定すると、$\exists R > 0$, $\exists g \colon D(c;R) \to \mathbf{C}$ s.t. g は正則で、

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-c)^k} \quad (0 < |z-c| < R), \quad g(c) \neq 0.$$

g は $D(c;R)$ で正則だから、Taylor 展開できる。すなわち

$$\exists \{a_n\}_{n\geq 0} \quad \text{s.t.} \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n = a_0 + a_1(z-c) + a_2(z-c)^2 + \cdots \quad (|z-c| < R).$$

ゆえに $0 < |z-c| < R$ を満たす任意の z に対して、

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{g(z)}{(z-c)^k} &= \frac{a_0}{(z-c)^k} + \cdots + \frac{a_{k-1}}{z-c} + a_k + a_{k+1}(z-c) + a_{k+2}(z-c)^2 + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k}(z-c)^n + \sum_{n=1}^{k} \frac{a_{k-n}}{(z-c)^n}. \end{aligned}$$

そして、$a_0 = g(c) \neq 0$ であるから、c は f の k 位の極である。■

注意 4.3.28 (対比させておく) Proposition 4.3.23 で見たように、c が f の k 位の零点とは、

$$f(z) = (z-c)^k g(z) \quad (|z-c| < R), \quad g(c) \neq 0$$

を満たす正則関数 $g\colon D(c;R) \to \mathbf{C}$ が存在すること。また Proposition 4.3.27 で見たように、c が f の k 位の極とは、

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-c)^k} \quad (0 < |z-c| < R), \quad g(c) \neq 0$$

を満たす正則関数 $g\colon D(c;R) \to \mathbf{C}$ が存在すること。良く見比べよう。■

Example 4.3.29 $f(z) = \dfrac{1}{z^2}$ に対して、0 は f の 2 位の極である (これは $f(z) = \dfrac{1}{z^2}$ という式が、ローラン展開そのものになっているから明らか)。$f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$ に対して、0 は f の除去可能特異点ある。実際、

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots \quad (z \in \mathbf{C})$$

であるから、

$$\frac{\sin z}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \cdots \quad (0 < |z| < \infty)$$

という f の 0 のまわりのローラン展開が得られ、主部は明らかに 0 である。

同様にして

$$\exp \frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2! z^2} + \frac{1}{3! z^3} + \cdots$$

であるから、$\exp \dfrac{1}{z}$ のローラン展開の主部は

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n} = \frac{1}{z} + \frac{1}{2} \frac{1}{z^2} + \frac{1}{3!} \frac{1}{z^3} + \cdots$$

であり、0 でない項が無限個あるから、0 は $\exp \dfrac{1}{z}$ の真性特異点である。■

Corollary 4.3.30 P と Q は c の近傍で正則で、c は P の k 位の零点、$Q(c) \neq 0$ であるならば、c は $f := \dfrac{Q}{P}$ の k 位の極である。

証明　c が P の k 位の零点であるから、c の近傍で正則な関数 R が存在して、$P(z) = (z-c)^k R(z)$, $R(c) \neq 0$. このとき、$g(z) := \dfrac{Q(z)}{R(z)}$ とおくと、g は c の近傍で正則で、$g(c) = \dfrac{Q(c)}{R(c)} \neq 0$, $f(z) = \frac{g(z)}{(z-c)^k}$ (c のある除外近傍で) が成り立つ。Proposition 4.3.27 によって、c は f の k 位の極である。■

問 $k \in \mathbf{N}$, $c \in \mathbf{C}$, f は c の近傍で正則とするとき、c が f の k 位の零点であるためには、c が $\dfrac{1}{f}$ の極であることが必要十分であることを示せ。

4.3.3 留数定理 (residue theorem)

(2010/11/15 留数定理まで解説)

留数の定義

定義 4.18 (留数) c が f の孤立特異点とする。f の c における Laurent 展開を $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-c)^n$ とするとき、a_{-1} を f の c における **留数**（りゅうすう） (**residue**) と呼び、$\mathrm{Res}(f;c)$ または $\displaystyle\operatorname*{Res}_{z=c} f(z)\, dz$ と表す:

$$\mathrm{Res}(f;c) = \operatorname*{Res}_{z=c} f(z)\, dz := a_{-1}.$$

注意 4.3.31 実際に Laurent 展開をするのは難しい (あるいは多大な手間がかかる) ことも多い。Laurent 展開をしないで、留数を求められる場合も多く、その方法をマスターすることが重要になる。 ■

Example 4.3.32 $f(z) = \dfrac{1}{z}$ $(z \in \mathbf{C}\setminus\{0\})$ とする。この定義式そのものが f の 0 における Laurent 展開となっていて ($a_{-1} = 1$, $a_n = 0$ $(n \neq 0)$ とすると、$f(z) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ $(0 < |z| < \infty)$)、$\mathrm{Res}(f;0) = 1$. ■

Example 4.3.33 $f(z) := \exp \dfrac{1}{z}$ $(z \in \mathbf{C} \setminus \{0\})$ とする。

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{z}\right)^n = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!}\frac{1}{z^2} + \frac{1}{3!}\frac{1}{z^3} + \cdots$$

ゆえに $\mathrm{Res}(f;0) = 1$. $\mathrm{Res}\,(zf(z);0) = \dfrac{1}{2}$, $\mathrm{Res}(z^2 f(z);0) = \dfrac{1}{3!} = \dfrac{1}{6}$. ■

f が $0 < |z-c| < R$ で正則であるならば、定理 4.16 (円環領域で正則な関数の Laurent 展開) によって

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-c|=r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-c)^{n+1}} d\zeta \quad (n \in \mathbf{Z},\ 0 < r < R)$$

であるから、

(♡) $$\mathrm{Res}(f;c) = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta-c|=r} f(\zeta) d\zeta \quad (0 < r < R).$$

何で -1 番目の a_{-1} が大事かというと、-1 番目が ($f(\zeta)/(\zeta-c)^{n+1}$ とかでなくて) f 自身の積分に係わるからである。そうなる理由は

$$\int_{|z-c|=R} (z-c)^n dz = \begin{cases} 2\pi i & (n = -1) \\ 0 & (n \neq -1) \end{cases}$$

にある。

f の正則点 (その点の近傍で f が正則であるような点のこと)、除去可能特異点における留数は 0 である。そこで極や真性特異点での留数が問題になる。

問 $\mathrm{Res}(f;c)=a_{-1}$ とするとき、次のものを求めよ。
(1) $\mathrm{Res}(f(z)+\cos z;c)$ (2) $\mathrm{Res}(3f(z);c)$

定理 4.19 (留数定理 (the residue theorem)) C は $\mathbf{C}$ 内の区分的に滑らかな単純閉曲線、$\mathcal{D}$ を C の囲む有界領域、Ω は $\overline{\mathcal{D}}\subset\Omega$ を満たす領域、$\{c_j\}_{j=1}^N$ は曲線 C 内の相異なる点、$f\colon\Omega\setminus\{c_1,\dots,c_N\}\to\mathbf{C}$ は正則とするとき、

$$\int_C f(z)\,dz=2\pi i\sum_{j=1}^N \mathrm{Res}(f;c_j).$$

ただし C は正の向きであるとする (C の進行方向の左手に $\mathcal{D}$ を見る)。

証明 (授業では、大きくて分かり易い図を描くこと！) 各 j に対して、c_j を中心とした、十分小さな半径 r_j の円周を正の向きにを一周する閉曲線 C_j を取って、

$$C':=C-C_1-C_2-\cdots-C_N,\quad \mathcal{D}':=\mathcal{D}\setminus\bigcup_{j=1}^N\overline{D}(c_j;r_j)$$

とおくと、$\partial\mathcal{D}'=C'$ (正の向き), $\overline{\mathcal{D}'}\subset\Omega\setminus\{c_1,\cdots,c_n\}$ であるから、定理 3.2 (Cauchy の積分定理) によって、

$$\int_C f(z)\,dz=\sum_{j=1}^N\int_{C_j} f(z)\,dz.$$

右辺の各項 (f の C_j に沿う積分) は、($\heartsuit$) によって

$$\int_{C_j} f(z)\,dz=\int_{|z-c_j|=r_j} f(z)\,dz=2\pi i\,\mathrm{Res}(f;c_j).$$

ゆえに

$$\int_C f(z)\,dz=2\pi i\sum_{j=1}^N\mathrm{Res}(f;c_j).\blacksquare$$

問 次の用語・記号の定義を述べよ。(1) 区分的に滑らかな曲線 (2) 単純曲線 (3) 閉曲線 (4) 領域 (5) $\mathbf{C}$ の部分集合 D に対する $\overline{D}$ (6) 正の向き

余談 4.3.34 「囲む」という言葉は単純な状況では誰でも意見の一致を見るかもしれないが、定理の仮定とする場合、案外と難しい面がある。正直に白状すると、筆者は上の定理が「気持ち悪い」。 ■

Example 4.3.35 単位円 $|z|=1$ を反時計まわりに一周する曲線を C とする。C は滑らかな単純閉曲線である。C の囲む領域 $\mathcal{D}=\{z\in\mathbf{C};|z|<1\}$ の閉包 $\overline{\mathcal{D}}=\{z\in\mathbf{C};|z|\le 1\}$ は $\Omega:=\mathbf{C}$ に含まれる。また C の向きは正の向きである。$f(z):=\dfrac{1}{z}$ は、$\Omega\setminus\{0\}$ で正則である。$N=1$, $c_1=0$ として、上の定理の仮定がすべて満たされ、

$$\int_{|z|=1}\frac{dz}{z}=2\pi i\,\mathrm{Res}(f;0)=2\pi i\cdot 1=2\pi i.\blacksquare$$

数式処理系 Mathematica, Maple で Maple で `series(1/(z*sin(z)),z=0,10)` としてみたら、0 のまわりの 10 次の項までの Laurent 展開が得られる。

$$z^{-2}+\frac{1}{6}+\frac{7}{360}z^2+\frac{31}{15120}z^4+\frac{127}{604800}z^6+\cdots$$

Mathematica でも `Series[1/(z Sin[z]),{z=0,20}]` で出る。

極における留数の求め方

(2010/11/17 解説)
$\mathrm{Res}(f;c)=a_{-1}$ を求めるにはどうすれば良いか。

ローラン級数 $f(z)=\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-c)^n$ を求める問題を解いたところだ…これは f が特に簡単だから出来たことだし、結構面倒だった。では、定理に書いてある

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-c|=r}\frac{f(z)}{(z-c)^{n+1}}dz$$

という公式を使うのはどうか?微分と違って積分の計算はいつも出来るとは限らない。そもそも $\displaystyle\int_{|z-c|=r}f(z)\,dz$ を求めるために、$\mathrm{Res}(f;c)$ を求めようとしていたので、本末転倒でしょう？。それは困った。

$$\text{テーラー展開の場合の公式 } a_n=\frac{f^{(n)}(c)}{n!} \text{ が懐かしいなあ…}$$

というわけで、それに似た方法を追求しよう。

Cf. Taylor 展開の係数

(これをまた復習するのはくどいようなのだが、以下に紹介する「公式」は丸暗記するのでなくて、自分で導出できるようになって欲しいので、あえてやる次第)

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n=a_0+a_1(z-c)+a_2(z-c)^2+a_3(z-c)^3+\cdots\quad(|z-c|<R).$$

$z=c$ を代入して、$f(c)=a_0$. 微分して、

$$f'(z)=a_1+2a_2(z-c)+3a_3(z-c)^2+\cdots.$$

$z=c$ を代入して、$f'(c)=a_1$. 微分して、

$$f''(z)=2a_2+3\cdot 2a_3(z-c)+4\cdot 3a_4(z-c)^2+\cdots.$$

$z=c$ を代入して、$f''(c)=2a_2$. ゆえに $a_2=\dfrac{f''(c)}{2}$. 微分して、

$$f'''(z)=3\cdot 2a_3+4\cdot 3\cdot 2a_4(z-c)+5\cdot 4\cdot 3a_5(z-c)^2+\cdots.$$

$z=c$ を代入して、$f'''(c)=3!a_3$. ゆえに $a_3=\dfrac{f'''(c)}{3!}$. 以下、同様にして、

$$\begin{aligned}f^{(n)}(z)&=n(n-1)\cdots 2\cdot 1a_n+(n+1)n(n-1)\cdots 2a_{n+1}(z-c)+\cdots\\&=\sum_{k=0}^{\infty}k(k-1)\cdots(k-n+1)a_k(z-c)^{k-n}=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{k!}{(k-n)!}a_k(z-c)^{k-n}\\&=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(n+m)!}{m!}a_{n+m}(z-c)^m\end{aligned}$$

から $f^{(n)}(c)=n!a_n$. ゆえに $a_n=\dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}$. ■

c が f の k 位の極であれば、

$$f(z)=\frac{a_{-k}}{(z-c)^k}+\frac{a_{-(k-1)}}{(z-c)^{k-1}}+\cdots+\frac{a_{-1}}{z-c}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n \quad (0<|z-c|<R)$$

と書けるので、

$$(z-c)^k f(z)=a_{-k}+a_{-(k-1)}(z-c)+a_{-(k-2)}(z-c)^2+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}a_{n-k}(z-c)^n \quad (0<|z-c|<R).$$

この右辺に上の議論を適用すると…というハナシである。$b_n:=a_{n-k}$, $g(z):=\sum_{n=0}^{\infty}b_n(z-c)^n$ とおくと、

$$b_n=\frac{g^{(n)}(c)}{n!}=\lim_{\substack{z\neq c\\ z\to c}}\frac{1}{n!}\left(\frac{d}{dz}\right)^n\left[(z-c)^k f(z)\right].$$

ゆえに

$$a_n=b_{n+k}=\lim_{\substack{z\neq c\\ z\to c}}\frac{1}{(n+k)!}\left(\frac{d}{dz}\right)^{n+k}\left[(z-c)^k f(z)\right]. \tag{4.13}$$

特に

$$a_{-1}=\lim_{\substack{z\neq c\\ z\to c}}\frac{1}{(k-1)!}\left(\frac{d}{dz}\right)^{k-1}\left[(z-c)^k f(z)\right].$$

c が 1 位の極である場合

c が f の 1 位の極であれば、$\exists R$, $\exists\{a_n\}$ s.t.

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n+\frac{a_{-1}}{z-c} \quad (0<|z-c|<R).$$

$(z-c)$ をかけた

$$(z-c)f(z)=a_{-1}+a_0(z-c)+a_1(z-c)^2+\cdots \quad (0<|z-c|<R)$$

を眺めると、$\mathrm{Res}(f;c)=a_{-1}$ を求めるために「$z=c$ を代入！」を思いつく。一応 $z\neq c$ で考えているので、正確には極限として処理する。

Proposition 4.3.36 c が f の 1 位の極ならば、

$$\mathrm{Res}(f;c)=\lim_{z\to c}(z-c)f(z). \tag{4.14}$$

2010 年度まで、この形で公式を提示してきたが、少し変えた方がずっと使いやすいことが分かった。仮定を「c が f の**高々** 1 位の極ならば」と弱くしても (4.14) が成立する (もちろん定理としては強くなる)。例えば f が $f=Q/P$ (P, Q は c の近傍で正則な関数) の形をしている場合、c が分母 P の 1 位の零点であれば (Q を調べなくても) 公式を適用できる。なお、証明はまったく同じである。

c が f の高々1 位の極というのは、c が f の 1 位の極か、または f の除去可能特異点であることをいう。

Example 4.3.37 $f(z)=\dfrac{1}{z^2+1}$ とするとき、$\mathrm{Res}(f;i)$ を求めよう。$f(z)=\dfrac{1}{(z+i)(z-i)}$ であるから、i は f の 1 位の極である。ゆえに

$$\mathrm{Res}(f;i)=\lim_{z\to i}(z-i)f(z)=\lim_{z\to i}\frac{1}{z+i}=\left.\frac{1}{z+i}\right|_{z=i}=\frac{1}{2i}=-\frac{i}{2}.\blacksquare$$

実際に計算するには、次の命題が便利である場合が多い。

Proposition 4.3.38 $f(z)=\dfrac{Q(z)}{P(z)}$, $P(z)$ と $Q(z)$ は c の近傍で正則、c は $P(z)$ の 1 位の零点で ($P(c)=0$ かつ $P'(c)\neq 0$ と言っても良い), $Q(c)\neq 0$ ならば、c は f の 1 位の極で

$$\mathrm{Res}(f;c)=\frac{Q(c)}{P'(c)}. \tag{4.15}$$

証明 c が P の 1 位の零点であるから、$\exists g$ s.t. g は c の近傍で正則かつ $P(z)=(z-c)g(z)$, $g(c)\neq 0$. このとき、

$$f(z)=\frac{Q(z)}{P(z)}=\frac{Q(z)}{(z-c)g(z)}=\frac{h(z)}{z-c},\quad h(z):=\frac{Q(z)}{g(z)}.$$

h は c の近傍で正則で、$h(c)=\dfrac{Q(c)}{g(c)}\neq 0$ であるから、c は f の 1 位の極である。Prop.4.3.36 によって、

$$\mathrm{Res}(f;c)=\lim_{\substack{z\neq c\\ z\to c}}(z-c)f(z)=\lim_{\substack{z\neq c\\ z\to c}}\frac{(z-c)Q(z)}{P(z)}=\lim_{z\to c}\frac{Q(z)}{\dfrac{P(z)-P(c)}{z-c}}=\frac{Q(c)}{P'(c)}. \tag{4.16}$$

ただし $P(c)=0$ を用いた。 $\blacksquare$

この命題も改良できることに気付く。「$f=Q/P$, P と Q は c の近傍で正則で、c は P の 1 位の零点ならば、c は f の高々 1 位の極で、$\mathrm{Res}(f;c)=\dfrac{Q(c)}{P'(x)}$.」$c$ が P の高々 1 位の極であれば、Prop.4.3.36 の公式が適用できるので、証明はずっと短くなる。

Example 4.3.39 $f(z)=\dfrac{1}{z^4-1}$ とするとき、$\mathrm{Res}(f;i)$ を求めよ。

(解) $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z+1)(z+i)(z-i)}$ であり、i は分母の 1 位の零点である。ゆえに

$$\mathrm{Res}(f;i)=\left.\frac{1}{(z^4-1)'}\right|_{z=i}=\frac{1}{4i^3}=\frac{i}{4}.\blacksquare$$

例 4.20 $n\in\mathbf{N}$, $f(z)=\dfrac{1}{z^n-1}$. 極は $z=\omega^k$ ($\omega:=\exp\dfrac{2\pi i}{n}$, $k=0,1,\cdots,n-1$) で、すべて分母 z^n-1 の 1 位の零点である。ゆえに ($\left(\omega^k\right)^n=1$ に注意して)

$$\mathrm{Res}(f;\omega^k)=\left.\frac{1}{(z^n-1)'}\right|_{z=\omega^k}=\left.\frac{z}{nz^n}\right|_{z=\omega^k}=\frac{\omega^k}{n}.\blacksquare$$

c が k 位の極である場合

c が f の k 位の極とする。定義によって、

$$f(z)=\frac{a_{-k}}{(z-c)^k}+\cdots+\frac{a_{-1}}{z-c}+a_0+a_1(z-c)+\cdots\quad (0<|z-c|<R).$$

やはり分母を払って

$$(z-c)^k f(z) = a_{-k} + a_{-(k-1)}(z-c) + \cdots + a_{-1}(z-c)^{k-1} + a_0(z-c)^k + a_1(z-c)^{k+1} + \cdots$$

a_{-1} が定数項になるまで、つまり $k-1$ 回微分すると、

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^{k-1}\left[(z-c)^k f(z)\right] = (k-1)!a_{-1} + \frac{k!}{1!}a_0(z-c) + \frac{(k+1)!}{2!}a_1(z-c)^2 + \cdots.$$

これから次の命題を得る。

番外命題 4.3.1 c が f の k 位の極ならば、

$$\operatorname{Res}(f;c) = \lim_{\substack{z\neq c\\ z\to c}} \frac{1}{(k-1)!}\left(\frac{d}{dz}\right)^{k-1}\left[(z-c)^k f(z)\right].$$

Example 4.3.40

$$f(z) = \frac{z}{(z-3)^2(z+1)}$$

とするとき、3 は f の 2 位の極であるから、

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f;3) &= \lim_{z\to 3}\frac{1}{(2-1)!}\left(\frac{d}{dz}\right)^{2-1}\left[(z-3)^2 f(z)\right] = \lim_{z\to 3}\left(\frac{z}{z+1}\right)' = \lim_{z\to 3}\frac{(z+1)\cdot 1 - 1\cdot z}{(z+1)^2}\\ &= \lim_{z\to 3}\frac{1}{(z+1)^2} = \frac{1}{(3+1)^2} = \frac{1}{16}.\blacksquare\end{aligned}$$

例 4.21 $f(z) = \dfrac{1}{z\sin z}$. $z=0$ は 2 位の極で、0 での Laurent 展開は

$$f(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{6} + \cdots$$

ゆえに $\operatorname{Res}(f;0)=0$. f は偶関数だから、留数が 0 であることは明らか。 ■

問 f は $0<|z|<\rho$ で正則で、

$$f(-z) = f(z) \quad (0<|z|<\rho)$$

を満たすとするとき、$\operatorname{Res}(f;0)=0$ であることを示せ。

問 c は f の極で $\operatorname{Res}(f;c)=a_{-1}$ とする。また φ は c の近傍で正則とする。このとき $\operatorname{Res}(\varphi(z)f(z);c)$ を求めよ。

例 4.22 (工事中) $f(z) = \pi\cot\pi z$ の極と留数をすべて求めよ。
(方法 1) (Prop.4.3.38 を用いる) $P(z) := \sin\pi z$, $Q(z) := \pi\cos\pi z$ とおくと、$f(z) = \dfrac{Q(z)}{P(z)}$. 比較的容易に $P(z)=0 \Leftrightarrow \exists n\in\mathbf{Z}$ s.t. $z=n$. $P'(z)=Q(z)$ である。$Q(n)=P'(n)=\pi\cos n\pi = \pi(-1)^n \neq 0$. ゆえに n は f の 1 位の極である。そして、

$$\operatorname{Res}(f;n) = \frac{Q(n)}{P'(n)} = 1.$$

(方法 2: 教科書 p.88 — そのうち取り込む) ■

例 4.23 (教科書 pp.88–89) $f(z) = \dfrac{1}{8z^2-2z-1}$

これで解決？

孤立特異点には、真性特異点というのがあった、そういう場合は、同じように処理することはできない。ちょっと難しい。つまり、除去可能特異点と極についてだけ、大分理解できた、という状況にある。

数式処理系 Mathematica, Maple で Mathematica では、`Residue[式,{変数,孤立特異点}]` で留数が求まり、`Series[式,{変数,孤立特異点,次数}]` でローラン展開が求まる。孤立特異点として `Infinity` が指定できる。なお `Apart[式]` で部分分数展開が出来る。

```
Residue[z/((z-2)(z-1)^3),{z,1}]
Series[z/((z-2)(z-1)^3),{z,1,10}]
```

Maple では、それぞれ `residue(z/((z-2)*(z-1)^3)),z=1` と `residue(z/((z-2)*(z-1)^3)),z=1,10` とする。■

4.4 定積分の計算への応用

原始関数が分からない関数の定積分を求める必要が生じることがある。例えば

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \pi,$$

$$\frac{1}{\sqrt{2t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/4t} e^{-ixy} dx = e^{-ty^2}$$

(いずれも非常に重要な積分である。) 数学者は様々な手段を用いて、これらの定積分の値を求めてきたが、19C 前半に Cauchy は、かなり広い範囲の積分について、統一的な方法で扱えることを発見した。それが (Cauchy による) 関数論のスタートでもあった。

関数論のテキストには、このテーマについて、かなり程度詳しく書いてあるものと、著者がほとんど興味を持っていないかのように思えるものの 2 種類がある。自分が興味を持った場合、あるいは将来必要が生じた場合、詳しく書いてある本をじっくり読むことを勧めたい。色々あるが、梶原 [7], 一松 [8], 森・杉原 [9], Bak and Newman [10] をあげておく。(理論的なことがたくさん書いてある本は、この手の計算法の話に冷淡というわけではなくて、例えば有名な Ahlfors [5] は積分計算について結構詳しく書いてある。詳しく書くかどうかは、単純に著者の趣味の問題のようだ。)

授業では、まず、どの本にも必ず載っているようなタイプをきちんと説明し、後は時間の余裕のあるときに、興味深い例を紹介するという形で行う。

この節の内容を単なる計算であると軽視しないこと。一松 [8] の「はしがき」に次のくだりがある。

> この本は数学ワンポイント双書の 1 冊として，元来は定積分の計算技術の解説のために企画された．とくに留数解析の応用という面についてである．
>
> しかしとりかかってみると，この話題は実質的に複素解析学の教科書になりかねないことがわかった．留数の定理を既知として，その使い方だけを解説しようと思っても，あまりにも多くの「常識的な」基礎知識が必要であり，しかも普通の教科書ではそれらが必ずしもきちんとおさえられていない場合が多いのである．

筆者は乏しい関数論の授業経験しか持っていないが、この一松先生の言葉には大いに頷ける。定積分計算とじっくり取り組むことで、幅広い関数論の知識が試されることになる。

4.4.1 細かい注意

広義積分の収束の定義, Cauchy の主値

広義積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

が $I \in \mathbf{C}$ に収束するとは、

$$(\sharp) \qquad \lim_{A,B\to+\infty} \int_{-A}^{B} f(x)\,dx = I,$$

すなわち

$$(\forall\varepsilon > 0) \quad (\exists R \in \mathbf{R}) \quad (\forall A \in \mathbf{R} : A \ge R) \quad (\forall B \in \mathbf{R} : B \ge R) \qquad \left| I - \int_{-A}^{B} f(x)\,dx \right| < \varepsilon$$

を意味する。このとき、

$$(\flat) \qquad \lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} f(x)\,dx = I$$

が成り立つが、($\flat$) が成り立つからと言って、($\sharp$) が成り立つとは限らないことに注意しよう。

Example 4.4.1

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi.$$

しかし

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{x} & (|x| \ge 1) \\ 0 & (|x| < 1) \end{cases}$$

とするとき、

$$\text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 0$$

であるが

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

は存在しない。■

($\flat$) の左辺を **Cauchy の主値**と呼び、

$$\text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \quad \text{あるいはフランス流に} \quad \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

で表す。

(もう一つの) Cauchy の主値

有理関数 f の分母が実軸上に零点 c を持つと、c を含む区間 (a,b) において、広義積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ は普通の意味では収束しない。しかし、c が f の 1 位の零点である場合は、広義積分に (以下に説明する) Cauchy の主値と呼ばれるものが存在し、役に立つことがある。

問　f が $[a,b]$ で C^1 級で、$c \in (a,b)$ とするとき、

$$\text{p.v.}\int_a^b \frac{f(x)}{x-c}\,dx := \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int_a^{c-\varepsilon}\frac{f(x)}{x-c}\,dx + \int_{c+\varepsilon}^b \frac{f(x)}{x-c}\,dx\right)$$

が存在することを示せ。■

　この極限値を

$$\underset{c}{\text{p.v.}}\int_a^b \frac{f(x)}{x-c}\,dx \quad \text{あるいは} \quad \text{p.v.}\int_a^b \frac{f(x)}{x-c}\,dx$$

と表し、やはり **Cauchy の主値**と呼ぶ。

4.4.2　有理関数の積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$

Proposition 4.4.2 $f(x) = \dfrac{Q(x)}{P(x)}$, $P(z), Q(z) \in \mathbf{C}[z]$, $\deg P(z) \geq \deg Q(z) + 2$, $\forall x \in \mathbf{R}$ $P(x) \neq 0$ が成り立つとき、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} c>0} \operatorname{Res}(f;c).$$

(ここで $\displaystyle\sum_{\operatorname{Im} c>0}$ は、f の極 c のうち、上半平面に属するものすべてについての和を意味する。)

余談 4.4.3 (後になって分かる注意) 後で、$\mathbf{C}$ に無限遠点 ∞ を付加した $\widehat{\mathbf{C}} := \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ で関数論を展開する。そのとき、実軸は $\widehat{\mathbf{C}}$ における閉曲線で、上半平面を囲んでいることが分かるので、この命題は留数定理から明らかになる。■

証明　まず広義積分が絶対収束であることを示そう。$n := \deg P(z)$, $m := \deg Q(z)$ とおくと、$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$ $(a_0 \neq 0)$, $Q(z) = b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \cdots + b_m$ $(b_0 \neq 0)$ と書ける。ゆえに

$$\exists R^* \in [1,\infty) \quad (\forall z \in \mathbf{C} : |z| \geq R^*) \quad |P(z)| \geq \frac{|a_0|}{2}|z|^n, \quad |Q(z)| \leq \frac{3|b_0|}{2}|z|^m.$$

これから、$P(z)$ のすべての零点は $|z| < R^*$ に含まれることが分かる。また仮定より、$n \geq m+2$ であることを用いると、

$$(\star) \qquad |f(z)| = \left|\frac{Q(z)}{P(z)}\right| \leq \frac{\frac{3}{2}|b_0||z|^m}{\frac{1}{2}|a_0||z|^n} = \frac{3|b_0|}{|a_0|}\frac{1}{|z|^{n-m}} \leq \frac{M}{|z|^2} \quad (|z| \geq R^*), \quad M := \frac{3|b_0|}{|a_0|}.$$

この評価と、仮定 $P(x) \neq 0$ $(x \in \mathbf{R})$ より f が $\mathbf{R}$ で連続であることを用いると、$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ は絶対収束で、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\,dx$$

であることが得られる。

　さて、

$$\Gamma_R : z = x \quad (x \in [-R,R]), \quad C_R : z = Re^{i\theta} \quad (\theta \in [0,\pi]), \quad \gamma_R := \Gamma_R + C_R$$

とおく。まず明らかに

$$\int_{-R}^{R} f(x)\,dx = \int_{\Gamma_R} f(z)\,dz.$$

(☆) を用いると、$\forall R > R^*$ に対して、

$$\left|\int_{C_R} f(z)\,dz\right| = \left|\int_0^\pi f(Re^{i\theta})\cdot iRe^{i\theta}\,d\theta\right| \le \max_{\theta\in[0,\pi]}\left|f\left(Re^{i\theta}\right)\right|\cdot R\cdot\pi \le \frac{M}{R^2}\cdot\pi R = \frac{M\pi}{R}$$

であるから、

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\,dz = 0.$$

$P(z)$ の零点は多項式であるから有限個で、上に述べたように円盤 $|z| < R^*$ に含まれ、仮定より実軸上にはない。それらは $f(z)$ の極または除去可能特異点であり、それら以外の点では f は正則である (ゆえに留数定理に現れるような「除外点 c_j」のうちで上半平面に属するものは、γ_R で囲まれた領域内に入っている)。また γ_R は単純閉曲線であるから、留数定理を用いて、

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{c\text{ は }\Gamma_R\text{ の内部}} \operatorname{Res}(f;c) = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} c>0} \operatorname{Res}(f;c).$$

以上より

$$2\pi i\sum_{\operatorname{Im} c>0}\operatorname{Res}(f;c) - \int_{-R}^{R} f(x)\,dx = \int_{\gamma_R} f(z)\,dz - \int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = \int_{C_R} f(z)\,dz \to 0 \quad (R\to\infty).$$

ゆえに

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i\sum_{\operatorname{Im} c>0}\operatorname{Res}(f;c).\blacksquare$$

問 f が Prop. 4.4.2 の仮定を満たすとき、$2\pi i \displaystyle\sum_{\operatorname{Im} c<0}\operatorname{Res}(f;c)$ は何になるか？(答は p.69)

Example 4.4.4 $I := \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2+1}dx$. これが Prop. 4.4.2 の仮定を満たすことは明らかである。$f(z) := \dfrac{1}{z^2+1}$ の極は分母 z^2+1 の零点で、$c = \pm i$ である。そのうち $\operatorname{Im} c > 0$ を満たすものは i のみであるから、

$$I = 2\pi i\sum_{\operatorname{Im} c>0}\operatorname{Res}(f;c) = 2\pi i\operatorname{Res}(f;i).$$

i は f の 1 位の極であるから、

$$\operatorname{Res}(f;i) = \lim_{\substack{z\ne i\\ z\to i}}(z-i)f(z) = \lim_{\substack{z\ne i\\ z\to i}}\frac{1}{z+i} = \frac{1}{2i}.$$

ゆえに

$$I = 2\pi i\cdot\frac{1}{2i} = \pi.\blacksquare$$

余談 4.4.5 Mathematica ならば `Integrate[1/(x^2+1),{x,-Infinity,Infinity}]` とする。Maple ならば `int(1/(x^2+1),x=-infinity..infinity)` ■

注意 4.4.6 f が偶関数の場合、$\displaystyle\int_0^\infty f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ だから、半無限区間 $(0,\infty)$ における積分もここで示す方法で計算できる。 ■

Example 4.4.7 (Ahlfors [5] p.173) $I := \displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2}{x^4+5x^2+6}dx$. 被積分関数は偶関数であるから、

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+5x^2+6}dx.$$

$f(x) := \dfrac{x^2}{x^4+5x^2+6}$, $P(z) := z^4+5z^2+6$, $Q(z) := z^2$ とおくと、$f(x) = \dfrac{Q(x)}{P(x)}$, $\deg P = \deg Q + 2$, $P(z) = (z^2+2)(z^2+3) = (z+\sqrt{2}i)(z-\sqrt{2}i)(z+\sqrt{3}i)(z-\sqrt{3}i)$, $\forall x \in \mathbf{R}$ $P(x) \neq 0$ であるから、

$$I = \frac{1}{2}\cdot 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} c>0} \operatorname{Res}(f;c) = \pi i \left(\operatorname{Res}\left(f;\sqrt{2}i\right) + \operatorname{Res}\left(f;\sqrt{3}i\right)\right).$$

$$\operatorname{Res}\left(f;\sqrt{2}i\right) = \frac{Q\left(\sqrt{2}i\right)}{P'\left(\sqrt{2}i\right)} = \left.\frac{z^2}{4z^3+10z}\right|_{z=\sqrt{2}i} = \left.\frac{z}{4z^2+10}\right|_{z=\sqrt{2}i} = \frac{\sqrt{2}i}{-8+10} = \frac{\sqrt{2}i}{2},$$
$$\operatorname{Res}\left(f;\sqrt{3}i\right) = \frac{Q\left(\sqrt{3}i\right)}{P'\left(\sqrt{3}i\right)} = \left.\frac{z^2}{4z^3+10z}\right|_{z=\sqrt{3}i} = \left.\frac{z}{4z^2+10}\right|_{z=\sqrt{3}i} = \frac{\sqrt{3}i}{-12+10} = -\frac{\sqrt{3}i}{2}.$$

ゆえに

$$I = \pi i \frac{\sqrt{2}i-\sqrt{3}i}{2} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}\pi.$$

(なぜか Mathematica では解けない。不定積分は求まるのに。Maple では一応求まった。) ■

例 4.24 (教科書 pp.89–90 とほぼ同じ)

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}.$$

$f(x) := \dfrac{1}{1+x^4}$, $P(z) := z^4+1$, $Q(z) := 1$ とおくと、$f = \dfrac{Q}{P}$, $\deg P \geq \deg Q + 2$, $\forall x \in \mathbf{R}$ $P(x) \neq 0$. $P(z) = 0$ の根 $z = c$ は、$c = \exp\left(\frac{\pi i}{4} + k\frac{2\pi i}{4}\right)$ $(k = 0,1,2,3)$ として、$c = \dfrac{\pm 1 \pm i}{\sqrt{2}}$ (複号任意). さぼらずに書くと、

$$c = \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, \frac{-1-i}{\sqrt{2}}, \frac{1-i}{\sqrt{2}}.$$

(あるいは $P(z) = z^4+2z^2+1-2z^2 = (z^2+1)^2 - \left(\sqrt{2}z\right)^2 = (z^2+\sqrt{2}z+1)(z^2-\sqrt{2}z+1)$ から、$c = \dfrac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{2-4}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}\pm\sqrt{2-4}}{2} = \dfrac{-1\pm i}{\sqrt{2}}, \dfrac{1\pm i}{\sqrt{2}}$ と解く。) そのうち上半平面にあるものは、$\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$ と $\dfrac{-1+i}{\sqrt{2}}$. $P(z)$ の任意の根 c は $c^4 = -1$ を満たすので、

$$\operatorname{Res}(f;c) = \frac{Q(c)}{P'(c)} = \left.\frac{1}{4z^3}\right|_{z=c} = \left.\frac{z}{4z^4}\right|_{z=c} = \frac{c}{4\cdot(-1)} = -\frac{c}{4}$$

に注意して、

$$I = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} c>0} \operatorname{Res}(f;c) = 2\pi i \left(\operatorname{Res}\left(f;\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right) + \operatorname{Res}\left(f;\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)\right)$$
$$= 2\pi i \left(-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}} + \frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \blacksquare$$

余談 4.4.8 Mathematica ならば `Integrate[1/(x^4+1), {x,-Infinity,Infinity}]` とする。Maple ならば `int(1/(x^4+1),x=-infinity..infinity)` とする。■

例 4.4.1 $n \in \mathbf{N}$ に対して、

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^{2n}} = \frac{\pi}{n \sin \dfrac{\pi}{2n}}.■$$

余談 4.4.9 Maple ならば

```
assume(n::integer, n>0)
int(1/(x^(2n)+1),x=-infinity..infinity)
```

Mathematica では計算できない？ ■

例 4.4.2 $n \in \mathbf{N}$ に対して、

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} = \pi \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.$$

余談 4.4.10 (数式処理系で検算) Mathematica で

```
Integrate[1/(1+x^2)^(n+1), {x,-Infinity,Infinity}, Assumptions-> n>0]
```

Maple で、

```
assume(n::integer, n>0)
```
$$\texttt{int}\left(\frac{1}{(1+x^2)^{n+1}}, x = -\texttt{infinity..infinity}\right)$$

とすると、いずれも

$$I = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(n+\dfrac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)}$$

という答が返って来る。$\Gamma(x) = x\Gamma(x-1)$ を繰り返し用いて、

$$\begin{aligned}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) &= \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdots\frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(1/2\right) = \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdots\frac{1}{2}\sqrt{\pi} \\ &= \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi},\end{aligned}$$

$$\Gamma(n+1) = n! = \frac{(2n)!!}{2^n}$$

であるから、

$$I = \frac{\sqrt{\pi}\cdot(2n-1)!!\sqrt{\pi}/2^n}{(2n)!!/2^n} = \frac{\pi(2n-1)!!}{(2n)!!}.■$$

問 以下の積分を求めよ。

(1) 正数 a に対して、$I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+a^2}$. (答: $\dfrac{\pi}{a}$)

(2) 正数 a に対して、$I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+a^4}\, dx$. (答: $\dfrac{\pi}{a^3\sqrt{2}}$)

(3) 正数 a に対して、$I=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)^2}$.　(答: $\dfrac{\pi}{2a^3}$)

(4) 正数 a に対して、$I=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^6+a^6}\,dx$.　(答: $\dfrac{2\pi}{3a^5}$)

(5) 正数 a に対して、$I=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^4}{(x^2+a^2)^4}\,dx$.　(答: $\dfrac{\pi}{16a^3}$)

(6) 正数 a に対して、$I=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{(x^4+a^4)^3}\,dx$.　(答: $\dfrac{5\sqrt{2}\pi}{64a^9}$)

(7) 正数 a, 自然数 n に対して、$I=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$.　(答: $\dfrac{\pi(2n-3)!!}{a^{2n-1}(2n-2)!!}$)

(8) 正数 a, 自然数 n に対して、$I=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^{2n}+a^{2n}}$.　(答: $\dfrac{\pi}{na^{2n-1}\sin\dfrac{\pi}{2n}}$)

余談 4.4.11 Maple ならば

```
assume(n::integer, n>0)
assume(a>0)
f:= n-> int(1/(x^2+a^2)^n,x=-infinity..infinity)
f(n)
```

とすると

$$\frac{(a^2)^{-n}a\sqrt{\pi}\Gamma(n-1/2)}{\Gamma(n)}=\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(n-1/2)}{a^{2n-1}(n-1)!}=\frac{\sqrt{\pi}\cdot\sqrt{\pi}(2n-3)!!/2^{n-1}}{a^{2n-1}(2n-2)!!/2^{n-1}}=\frac{\pi(2n-3)!!}{a^{2n-1}(2n-2)!!}.$$

```
seq(f(j),j=1..10)
```

として、

$$\frac{\pi}{a},\frac{\pi}{2a^3},\frac{3\pi}{8a^5},\frac{5\pi}{16a^7},\frac{35\pi}{128a^9},\frac{63\pi}{256a^{11}},\frac{231\pi}{1024a^{13}},\frac{429\pi}{2048a^{15}}.$$

同様に

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^{2n}+a^{2n}}=\frac{\pi}{na^{2n-1}\sin\dfrac{\pi}{2n}}.\blacksquare$$

問　(1) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x^2}{x^4+5x^2+6}\,dx$　(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}\,dx$　(3) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x^2}{(x^2+a^2)^3}dx$, $a\in\mathbf{R}$
(Ahlfors p.173)
(答) (1) $\dfrac{\pi(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{2}$　(2) $\dfrac{5\pi}{12}$　(3) $\dfrac{\pi}{16|a|^3}$

Cauchy の主値積分

$P(z), Q(z)\in\mathbf{C}[z]$, $\deg P(z)\ge\deg Q(z)+1$, $\forall x\in\mathbf{R}$ $P(x)\neq 0$ とするとき、$c\in\mathbf{R}$ に対して、

$$\text{p.v.}\int_{\infty}^{\infty}\frac{Q(x)}{(x-c)P(x)}dx=\pi i\frac{Q(c)}{P(c)}+2\pi i\sum_{\operatorname{Im}\zeta>0}\operatorname{Res}\left(\frac{Q(z)}{(z-c)P(z)};\zeta\right).$$

p.65 の問の解答 $-\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ に等しい。■

4.4.3 有理関数 $\times e^{iax}$ の積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax}\,dx$

応用上非常に重要な Fourier 変換、逆 Fourier 変換

$$(\mathcal{F}) \qquad \widehat{f}(y) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixy}dx \quad (y \in \mathbf{R})$$

$$(\mathcal{F}^*) \qquad \widetilde{g}(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(y)e^{ixy}dy \quad (x \in \mathbf{R})$$

を求めることに利用できる公式を紹介する。例えば Fourier 変換 $(\mathcal{F})$ の場合、$y<0$ に対して、$a=-y$ とおいて以下の命題を用いる。$y \geq 0$ に関しても少し工夫すれば計算できる。

$f(x)$ が実係数有理式である場合は、$x \in \mathbf{R}$ に対して $f(x) \in \mathbf{R}$ であるから、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(ax)\,dx = \mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax}\,dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(ax)\,dx = \mathrm{Im}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax}\,dx$$

であることに注意しておこう。

Proposition 4.4.12 $f(x) = \dfrac{Q(x)}{P(x)}$, $P(z), Q(z) \in \mathbf{C}[z]$, $\deg P(z) \geq \deg Q(z) + 1$,$\forall x \in \mathbf{R}$ $P(x) \neq 0$, $a > 0$ が成り立つとき、

$$(4.17) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax}\,dx = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\, c>0} \mathrm{Res}(f(z)e^{iaz}; c).$$

(4.17) の $\displaystyle\sum_{\mathrm{Im}\, c>0}$ は、$f(z)e^{iaz}$ の極 (それは f の極とも一致する) c のうち、上半平面に属するものすべてについての和を意味する。

証明 1

(筆者としてはお勧めの方法だが、採用している本が少なめ。) $\exists M \in \mathbf{R}$, $\exists R^* \in [1,\infty)$ s.t. $f(z)$ の分母 $P(z)$ の零点は $|z| < R^*$ に含まれ、

$$|f(z)| \leq \frac{M}{|z|} \quad (|z| \geq R^*).$$

(以下は図を描くのが早い) A, $B \in [R^*, \infty)$ に対して、

$$\begin{aligned}
C_1 &: z = x \quad (x \in [-A, B]),\\
C_2 &: z = B + iy \quad (y \in [0, A+B]),\\
-C_3 &: z = x + i(A+B) \quad (x \in [-A, B]),\\
-C_4 &: z = -A + iy \quad (y \in [0, A+B]),\\
C_{A,B} &:= C_1 + C_2 + C_3 + C_4
\end{aligned}$$

とおく。

$P(z)$ は多項式であるから、その零点は有限個で、上に述べたように円盤 $|z| < R^*$ に含まれ、仮定より実軸上にはない。それらは $f(z)e^{iaz}$ の極または除去可能特異点であり、それら以外の点では $f(z)e^{iaz}$ は正則である。$\operatorname{Im} c > 0$ を満たす極 c は単純閉曲線 $C_{A,B}$ の内部に含まれるから、留数定理を用いて、

$$\int_{C_{A,B}} f(z)e^{iaz}\,dz = 2\pi i \sum_{c \text{ は } C_{A,B} \text{ の内部}} \operatorname{Res}(f(z)e^{iaz}; c) = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} c>0} \operatorname{Res}(f(z)e^{iaz}; c)$$

曲線 C_1 に沿う線積分については、

$$\int_{C_1} f(z)e^{iaz}\,dz = \int_{-A}^{B} f(x)e^{iax}\,dx.$$

以上をまとめて、

$$\begin{aligned}\int_{-A}^{B} f(z)e^{iaz}\,dz &= \int_{C_1} f(z)e^{iaz}\,dz = \int_{C_{A,B}} f(z)e^{iaz}\,dz - \sum_{j=2}^{4}\int_{C_j} f(z)e^{iaz}\,dz \\ &= 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} c>0} \operatorname{Res}(f(z)e^{iaz}; c) - \sum_{j=2}^{4}\int_{C_j} f(z)e^{iaz}\,dz.\end{aligned}$$

曲線 C_2 に沿う線積分については、z が C_2 上の点であるとき、$z = z(y) = B + iy$ ($y \in [0, A+B]$) とおけるので、$dz = i\,dy$,

$$|z| = \sqrt{B^2+y^2} \ge B \ge R^*, \quad |f(z)| \le \frac{M}{|z|} \le \frac{M}{B},$$

$$\operatorname{Re}(iaz) = a\operatorname{Re}(iz) = -a\operatorname{Im} z = -ay, \quad \left|e^{iaz}\right| = e^{\operatorname{Re}(iaz)} = e^{-ay}$$

であるから、

$$\left|\int_{C_2} f(z)e^{iaz}\,dz\right| \le \int_{C_2} |f(z)|\left|e^{iaz}\right||dz| \le \frac{M}{B}\int_0^{A+B} e^{-ay}\,dy \le \frac{M}{B}\int_0^{\infty} e^{-ay}\,dy = \frac{M}{aB}.$$

曲線 $-C_3$ に沿う線積分については、$-C_3$ が $z = z(x) = x + (A+B)i$ ($x \in [-A, B]$) とパラメーターづけできることから、$dz = dx$,

$$|z| = \sqrt{(A+B)^2+x^2} \ge A+B \ge R^*, \quad |f(z)| \le \frac{M}{|z|} \le \frac{M}{A+B},$$

$$\operatorname{Re}(iaz) = a\operatorname{Re}(iz) = -a\operatorname{Im} z = -a(A+B), \quad \left|e^{iaz}\right| = e^{\operatorname{Re}(iaz)} = e^{-a(A+B)}$$

であるから、

$$\left|\int_{-C_3} f(z)\,dz\right| \le \int_{-C_3} |f(z)|\left|e^{iaz}\right||dz| \le \frac{M}{A+B}e^{-a(A+B)}\int_{-A}^{B} dx = Me^{-a(A+B)}.$$

曲線 $-C_4$ に沿う線積分については、$-C_4$ が $z = z(y) = -A + iy$ ($y \in [0, A+B]$) とパラメーターづけできるから、$dz = i\,dy$,

$$|z| = \sqrt{A^2+y^2} \ge A \ge R^*, \quad |f(z)| \le \frac{M}{|z|} \le \frac{M}{A},$$

$$\operatorname{Re}(iaz) = a\operatorname{Re}(iz) = -a\operatorname{Im} z = -ay, \quad \left|e^{iaz}\right| = e^{\operatorname{Re}\left(e^{iaz}\right)} = e^{-ay}$$

であるから、

$$\left|\int_{-C_4} f(z)e^{iaz}\,dz\right| \le \int_{-C_4} |f(z)|\left|e^{iaz}\right||dz| \le \frac{M}{A}\int_0^{A+B} e^{-ay}\,dy \le \frac{M}{A}\int_0^{\infty} e^{-ay}\,dy = \frac{M}{aA}.$$

ゆえに、$A, B \to \infty$ のとき、$\dfrac{M}{aB}, e^{-a(A+B)}, \dfrac{M}{aA} \to 0$ であるから$\cdots$, 正確に言うと、$\forall \varepsilon > 0$ に対して、$\exists R \in \mathbf{R}$ s.t.

$$A \ge R, \quad B \ge R \quad \Longrightarrow \left|\int_{C_j} f(z)e^{iaz}\,dz\right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (j = 2, 3, 4)$$

が成り立つので、広義積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax}\,dx$ が存在し、(4.17) が成立することが分かる。 ■

証明 2

(多くの本で採用されている証明法であるが、仮定を $\deg P \ge \deg Q + 2$ と強くしている場合が多いようだ。広義積分の存在証明が面倒だからか？)

広義積分が存在すること まず広義積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax}\,dx$ が存在することを確める。このことを証明していない本が多い。その場合は、定理が

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)e^{iax}\,dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} c > 0} \operatorname{Res}(f(z)e^{iaz}; c) \tag{4.18}$$

を主張していると読めば良い。

$P(x), Q(x) \in \mathbf{R}[x]$ を仮定して証明する。$\deg P(x) = n$, $m := \deg Q(x)$ とおくと、$P(x) = a_0x^n + \cdots + a_n$ $(a_0 \ne 0)$, $Q(x) = b_0x^m + \cdots + a_m$ $(b_0 \ne 0)$ と書ける。$n \ge m + 2$ であれば広義積分が絶対収束することは明らかである ($\left|P(x)e^{iax}\right| = |P(x)|$ で、Prop.4.4.2 の証明と同じ証明が出来る)。以下、$n = m + 1$ とする。$\exists h(x)$, $\exists M \in \mathbf{R}$ s.t. $\forall x \ne 0$

$$f(x) = \frac{b_0}{a_0x}(1 + h(x)), \quad |h(x)| \le \frac{M}{x}.$$

広義積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{b_0}{a_0x} e^{iax}\,dx$$

が収束することは、実部虚部に分解して、交代級数の議論を用いて確められる。一方

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{b_0}{a_0x} h(x)e^{iax}\,dx$$

が絶対収束することも容易に確められる。ゆえに広義積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax}\,dx$ が存在し、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax}\,dx = \int_{-R}^{R} f(x)e^{iax}\,dx.$$

(4.18) の証明 さて、$\exists M \in \mathbf{R}$, $\exists R^* \in [1, \infty)$ s.t. $f(z)$ の分母 $P(z)$ の零点は $|z| < R^*$ に含まれ、

$$|f(z)| \le \frac{M}{|z|} \quad (|z| \ge R^*).$$

$R \in [R^*, \infty)$ に対して、Γ_R を $z = x$ $(x \in [-R, R])$, C_R を $z = Re^{i\theta}$ $(\theta \in [0, \pi])$ で定め、$\gamma_R := \Gamma_R + C_R$ とおく。$P(z)$ の零点は多項式であるから有限個で、円盤 $|z| < R^*$ に含まれ (ゆえに上半平面にあるものは、γ_R の内部に存在する)、仮定より実軸上にはない。それらは $f(z)e^{iaz}$ の極または除去可能特異

点であり、それら以外の点では $f(z)e^{iaz}$ は正則である。また γ_R は単純閉曲線であるから、留数定理を用いて、

$$\int_{\gamma_R} f(z)e^{iaz}\,dz = 2\pi i \sum_{c\ \text{は}\ \gamma_R\ \text{の内部}} \mathrm{Res}(f(z)e^{iaz}; c) = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\,c>0} \mathrm{Res}(f(z)e^{iaz}; c).$$

C_R は $z = Re^{i\theta}$ $(\theta \in [0,\pi])$ とパラメーターづけできる。$dz = iRe^{i\theta}\,d\theta$ で、

$$\int_{\gamma_R} f(z)e^{iaz}\,dz = \int_0^\pi f(Re^{i\theta})e^{iaRe^{i\theta}} \cdot iRe^{i\theta}\,d\theta,$$

$$\begin{aligned} iaRe^{i\theta} &= iaR(\cos\theta + i\sin\theta) = -aR\sin\theta + iaR\cos\theta, \\ \mathrm{Re}\left[iaRe^{i\theta}\right] &= -aR\sin\theta, \quad \left|e^{iaRe^{i\theta}}\right| = e^{\mathrm{Re}\left[iaRe^{i\theta}\right]} = e^{-aR\sin\theta} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \left|\int_{\gamma_R} f(z)e^{iaz}\,dz\right| &\le \int_0^\pi \left|f(Re^{i\theta})\right|\left|e^{iaRe^{i\theta}}\right|\left|iRe^{i\theta}\right| d\theta \le \frac{M}{R}\cdot R\int_0^\pi e^{-aR\sin\theta}\,d\theta \\ &= M\int_0^\pi e^{-aR\sin\theta}\,d\theta. \end{aligned}$$

実は

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^\pi e^{-aR\sin\theta}\,d\theta = 0 \tag{4.19}$$

である。これを認めれば、

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax}\,dx &= \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)e^{iax}\,dx = \int_{\Gamma_R} f(z)e^{iaz}\,dz \\ &= \int_{\gamma_R} f(z)e^{iaz}\,dz - \int_{C_R} f(z)e^{iaz}\,dz \\ &= 2\pi i\sum_{\mathrm{Im}\,c>0}\mathrm{Res}(f(z)e^{iaz}; c) - \int_{C_R} f(z)e^{iaz}\,dz \\ &\to 2\pi i\sum_{\mathrm{Im}\,c>0}\mathrm{Res}(f(z)e^{iaz}; c) \quad (R\to\infty) \end{aligned}$$

として証明が完了する。(4.19) については、以下で 3 通りの証明を与える。■

(4.19) の証明

これは Lebesgue の有界収束定理を知っているならば、

$$\left|e^{-aR\sin\theta}\right| \le 1, \quad \int_0^\pi 1\,d\theta = \pi < \infty, \quad \lim_{R\to\infty} e^{-aR\sin\theta} = \begin{cases} 0 & (\theta \in (0,\pi)) \\ 1 & (\theta = 0,\pi) \end{cases} = 0 \quad \text{(a.e.)}$$

から明らかである。

初等的な方法としては、$0 < \forall\delta < \pi/2$ に対して

$$\begin{aligned} \int_0^\pi e^{-aR\sin\theta} d\theta &= 2\int_0^{\pi/2} e^{-aR\sin\theta} d\theta = 2\left(\int_0^\delta e^{-aR\sin\theta} d\theta + \int_\delta^{\pi/2} e^{-aR\sin\theta} d\theta\right) \\ &\le 2\left(\delta + e^{-aR\sin\delta}\int_\delta^{\pi/2}\right) \le 2\delta + \pi e^{-aR\sin\delta} \end{aligned}$$

が成り立つことから、最初に δ を十分小さく取って右辺第 1 項を小さくしておいてから、R を大きくして右辺第 2 項を小さくする、という方針で証明するのが簡単である。

あるいは、Jordan の不等式[15]

$$\sin\theta \geq \frac{2\theta}{\pi} \quad (0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}) \tag{4.20}$$

から導かれる不等式

$$0 < \int_0^{\pi/2} e^{-R\sin\theta} d\theta \leq \int_0^{\pi/2} e^{-2R\theta/\pi} d\theta = \left[-\frac{\pi}{2R} e^{-2R\theta/\pi}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2R}(1 - e^{-R}) < \frac{\pi}{2R} \tag{4.21}$$

を使う。■

$a < 0$ の場合は、次のようになる (証明は容易に想像できるであろう)。なお、例 4.4.15 も見よ。

Corollary 4.4.13 $f(x) = \dfrac{Q(x)}{P(x)}$, $P(z), Q(z) \in \mathbf{C}[z]$, $\deg P(z) \geq \deg Q(z) + 1$, $\forall x \in \mathbf{R}\ P(x) \neq 0$, $a < 0$ が成り立つとき、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{iax}\, dx = -2\pi i \sum_{\operatorname{Im} c < 0} \operatorname{Res}(f(z) e^{iaz}; c). \tag{4.22}$$

注意 4.4.14 なお、$f(x) = \dfrac{Q(x)}{P(x)}$ において、$\deg P(x) \geq \deg Q(x) + 2$ である場合は、$a \geq 0$ に対して (つまり $a = 0$ も OK[16]) 広義積分が絶対収束であることも簡単に示せるし、

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z) e^{iaz}\, dz = 0$$

の証明も

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{R} \int_0^{\pi} e^{-aR\sin\theta}\, d\theta = 0$$

に帰着され、簡単である ($e^{-aR\sin\theta} \leq 1$ より $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{-aR\sin\theta} d\theta \leq \pi$ が導かれる)。■

Example 4.4.15 (簡単だが、a の符号に関する条件について、示唆的な例) $a \geq 0$ とするとき、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{1+x^2}\, dx = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^{iaz}}{1+z^2}; i\right) = 2\pi i \lim_{\substack{z \neq i \\ z \to i}} (z - i) \frac{e^{iaz}}{1+z^2} = 2\pi i \frac{e^{ia\cdot i}}{i+i} = \pi e^{-a}. \tag{4.23}$$

両辺の実部、虚部を取ると、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2}\, dx = \pi e^{-a}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ax}{1+x^2}\, dx = 0. \tag{4.24}$$

$a < 0$ のときは、$e^{iax} = \overline{e^{i(-a)x}}$ と考えて、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{1+x^2}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\overline{e^{i(-a)x}}}{1+x^2}\, dx = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(-a)x}}{1+x^2}\, dx} = \overline{\pi e^{-(-a)}} = \overline{\pi e^{a}} = \pi e^{a}.$$

[15] $y = \sin\theta$ と $y = \dfrac{2\theta}{\pi}$ のグラフを描くと「分かる」。これは微分法の簡単な演習問題である。しかし、この不等式を利用する方法をとっさに発見するのは難しいので、甘く見ていると、院試などであわてることになる。Jordan の不等式という名は、吉田 [11] (p.17) で知った。

[16] この場合は、前項で示した公式になる。

これが分かりにくい場合は、例えば $a=-2$ の場合を書き下して見よう。$e^{-2ix}=\overline{e^{2ix}}$ であるから、

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-2ix}}{1+x^2}\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\overline{e^{2ix}}}{1+x^2}\,dx=\overline{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{2ix}}{1+x^2}\,dx}=\overline{\pi e^{-2}}=\pi e^{-2}.$$

a が非負の場合、負の場合をまとめて

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iax}}{1+x^2}\,dx=\pi e^{-|a|}\quad(a\in\mathbf{R}) \tag{4.25}$$

とも書ける (脱線になるが、これが a の関数として $a=0$ で微分可能でないのは面白い…と思って欲しい, これは広義積分の難しさの一面を表している)。

なお、(4.25) を得るのに、(4.23) を用いるのでなく、(4.24) から始めるのが簡単かも知れない。$a<0$ であるとき、

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos ax}{1+x^2}\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(|a|x)}{1+x^2}\,dx=\pi e^{-|a|},$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin ax}{1+x^2}\,dx=-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(|\alpha|x)}{1+x^2}\,dx=0$$

これを 1 つの複素数にまとめて (4.25) を得る。この方が簡単という人も多いかな。■

余談 4.4.16
```
assume(a>0)
int(cos(I*a*x)/(1+x^2),x=-infinity..infinity)
```

例 4.4.3 $\alpha>0$

$$I=\int_0^{\infty}\frac{x^2\sin\alpha x}{x^4+1}\,dx=\frac{\pi}{2}e^{-\alpha/\sqrt{2}}\cos\frac{\alpha}{\sqrt{2}}.\blacksquare$$

Example 4.4.17 積分範囲である実軸上に 1 位の極がある場合、通常の意味では広義積分は発散するが、主値を取ることにすれば、留数の半分だけを入れれば良いことが分かる。つまり、$a>0$, $\deg P(z)\ge\deg Q(z)+1$, $P(z)$ は実軸上に 2 位以上の零点を持たないとするとき、

$$\mathrm{p.v.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{Q(x)}{P(x)}e^{iax}dx=2\pi i\sum_{\operatorname{Im}c>0}\operatorname{Res}\left(\frac{Q(z)}{P(z)}e^{iaz};c\right)+\pi i\sum_{\operatorname{Im}c=0}\operatorname{Res}\left(\frac{Q(z)}{P(z)}e^{iaz};c\right)$$

のような公式が成立する。これを用いると、

$$\mathrm{p.v.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x}\,dx=\lim_{\delta\downarrow 0}\int_{|x|>\delta}\frac{e^{ix}}{x}\,dx=2\pi i\cdot\frac{1}{2}\operatorname{Res}\left(\frac{e^{iz}}{z};0\right)=\pi i\lim_{\substack{z\neq 0\\ z\to 0}}z\cdot\frac{e^{iz}}{z}=\pi i.$$

これから

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx=\frac{1}{2}\operatorname{Im}\left(\mathrm{p.v.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x}\,dx\right)=\frac{\pi}{2}.$$

以上は乱暴な説明だから、ていねいに計算し直す。■

例 4.25 (教科書にも採用されている有名な例)

$$I=\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}.$$

(原点での特異性の処理の仕方が、1 位の極がある場合の主値積分の処理の仕方と同じ。それは普通の留数定理の証明に近いところがある。)

$$\begin{aligned}
&f(z) := \frac{e^{iz}}{z},\\
&\Gamma_{\varepsilon,R} : z = x \quad (x \in [\varepsilon, R]),\\
&C_R : z = Re^{i\theta} \quad (\theta \in [0,\pi]),\\
&\Gamma_{-R,-\varepsilon} : z = x \quad (x \in [-R, -\varepsilon]),\\
&C_\varepsilon : z = \varepsilon e^{i\theta} \quad (\theta \in [0,\pi]),\\
&\gamma_{\varepsilon,R} := \Gamma_{\varepsilon,R} + C_R + \Gamma_{-R,\varepsilon} + (-C_\varepsilon)
\end{aligned}$$

とおく。f は 0 以外で正則であるから、f の閉曲線 $\gamma_{\varepsilon,R}$ (0 はその外側にある) に沿う線積分は、Cauchy の積分定理によって 0 である。

$$(\star) \qquad 0 = \int_{\gamma_{\varepsilon,R}} f(z)\,dz = \int_{\Gamma_{\varepsilon,R}} f(z)\,dz + \int_{\Gamma_{-R,-\varepsilon}} f(z)\,dz + \int_{C_R} f(z)\,dz - \int_{C_\varepsilon} f(z)\,dz.$$

実は

$$(\natural) \qquad \lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)\,dz = 0.$$

実際、

$$\int_{C_R} f(z)\,dz = \int_0^\pi \frac{e^{iRe^{i\theta}}}{Re^{i\theta}} \cdot iRe^{i\theta}\,d\theta = i\int_0^\pi e^{iR(\cos\theta + i\sin\theta)} d\theta$$

であるから、(4.21) を用いて

$$\left|\int_{C_R} f(z)\,dz\right| \le \int_0^\pi \left|e^{iR(\cos\theta+i\sin\theta)}\right| d\theta = \int_0^\pi e^{-R\sin\theta} d\theta < 2\frac{\pi}{2R} = \frac{\pi}{R} \to 0.$$

一方、

$$\int_{\Gamma_{-R,-\varepsilon}} f(z)\,dz = \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x} dx = \int_R^\varepsilon \frac{e^{-it}}{-t} \cdot (-1) dt = -\int_\varepsilon^R \frac{e^{-it}}{t} dt$$

であるから、

$$(\sharp) \qquad \int_{\Gamma_{\varepsilon,R}} f(z)\,dz + \int_{\Gamma_{-R,-\varepsilon}} f(z)\,dz = \int_\varepsilon^R \frac{e^{ix}}{x}\,dx - \int_\varepsilon^R \frac{e^{-it}}{t} dt = 2i\int_\varepsilon^R \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

実は

$$(\flat) \qquad \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{C_\varepsilon} f(z)\,dz = i\pi$$

である。(これがもし一周の線積分ならば、Cauchy の積分公式または留数定理で $2\pi i$ ということが分かるが、C_ε は半円周である。) この証明を 2 つ示す。

(証明 1) Lebesgue の有界収束定理を使って良いとき。$z = \varepsilon e^{i\theta}$ $(\theta \in [0,\pi])$ として、

$$\int_{C_\varepsilon} f(z)\,dz = \int_0^\pi \frac{e^{i(\varepsilon e^{i\theta})}}{\varepsilon e^{i\theta}} \cdot i\varepsilon e^{i\theta}\,d\theta = i\int_0^\pi e^{i(\varepsilon e^{i\theta})}\,d\theta \to i\int_0^\pi d\theta = i\pi \quad (\varepsilon \to 0).$$

ただし、$\left|e^{i(\varepsilon e^{i\theta})}\right| = e^{-\varepsilon\sin\theta} \le 1$, $e^{i(\varepsilon e^{i\theta})} \to e^0 = 1$ $(\varepsilon \to +0)$ を用いた。

(証明 2) Lebesgue の有界収束定理を使わずにするやり方 (の一つ)。これはこれで教育的。

$$f(z)=\frac{e^{iz}}{z}=\frac{1}{z}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(iz)^n}{n!}\right)=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n!}z^{n-1}=\frac{1}{z}+g(z),\quad g(z):=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^{n+1}}{(n+1)!}z^n$$

であり、g は整関数である。

$$\int_{C_\varepsilon}\frac{1}{z}\,dz=\int_0^\pi\frac{1}{\varepsilon e^{i\theta}}\cdot i\varepsilon e^{i\theta}\,d\theta=i\int_0^\pi d\theta=i\pi$$

であるから、

$$\int_{C_\varepsilon}f(z)\,dz-i\pi=\int_{C_\varepsilon}\left(f(z)-\frac{1}{z}\right)\,dz=\int_{C_\varepsilon}g(z)\,dz.$$

g は整関数であるから、特に $|z|\le 1$ で連続であり、$M:=\max_{|z|\le 1}|g(z)|$ が存在する。ゆえに $\varepsilon<1$ ならば、

$$\left|\int_{C_\varepsilon}f(z)\,dz-i\pi\right|\le\int_{C_\varepsilon}|g(z)|\,|dz|\le M\int_{C_\varepsilon}|dz|=M\pi\varepsilon.$$

ゆえに $\displaystyle\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{C_\varepsilon}f(z)\,dz=i\pi.$

$(\star)$, $(\sharp)$, $(\flat)$, $(\natural)$ より、

$$2i\int_\varepsilon^R\frac{\sin x}{x}\,dx=\int_{C_\varepsilon}f(z)dz+\int_{\Gamma_R}f(z)dz\to\pi i+0\quad(\varepsilon\to 0,\ R\to\infty).$$

ゆえに

$$\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}.\blacksquare$$

問 f は c の近傍で正則とする。C_ε: $z=c+\varepsilon e^{i\theta}$ $(\theta\in[0,\pi])$ とするとき、

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{C_\varepsilon}\frac{f(z)}{z-c}\,dz=\pi i f(c).$$

問 以下の積分を求めよ。

(1) 正数 a, α に対して、$\displaystyle I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\alpha x}{x^2+a^2}\,dx.$ (答: $\dfrac{e^{-a\alpha}}{a}$)

(2) 正数 a, α に対して、$\displaystyle I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\alpha x}{(x^2+a^2)^2}\,dx.$ (答: $\dfrac{\pi(1+a\alpha)e^{-a\alpha}}{2a^3}$)

(3) 正数 a, α に対して、$\displaystyle I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\alpha x}{x^4+a^4}\,dx.$ (答: $\dfrac{\pi e^{-a\alpha/\sqrt{2}}}{\sqrt{2}a^3}\left(\cos\dfrac{a\alpha}{\sqrt{2}}+\sin\dfrac{a\alpha}{\sqrt{2}}\right)$)

(4) 正数 a, α に対して、$\displaystyle I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin\alpha x}{x^4+a^4}\,dx.$ (答: $\dfrac{\pi e^{-a\alpha/\sqrt{2}}}{a^2}\sin\dfrac{ab}{\sqrt{2}}$)

問 $\displaystyle\int_0^\infty\frac{x\sin x}{x^2+a^2}\,dx$ $(a\in\mathbf{R})$ (答: $\dfrac{\pi e^{-|a|}}{2}$)

4.4.4 三角関数の有理関数の周期積分 $\displaystyle\int_0^{2\pi} r(\cos\theta, \sin\theta)d\theta$

1 変数の微積分で学んだように、$r(X, Y)$ を X, Y の有理式とするとき、$\displaystyle\int r(\cos\theta, \sin\theta)\,d\theta$ は初等関数で求まるが、実際の計算はかなり面倒になることが多い。しかし特に重要な $[0, 2\pi]$ 上の積分 (周期積分) については、留数を用いて簡単に計算できる。

Proposition 4.4.18 (三角関数の有理関数の積分) $r(X, Y)$ を X, Y の有理式とするとき、

$$\int_0^{2\pi} r(\cos\theta, \sin\theta)\,d\theta = 2\pi i \sum_{|c|<1} \mathrm{Res}(f; c).$$

ただし

$$f(z) := \frac{1}{iz}\, r\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\right)$$

で、$f(z)$ は $|z| = 1$ 上に極を持たないとする。

授業では、この公式は丸暗記するものでないこと、

$$z = e^{i\theta} \quad (\theta \in [0, 2\pi])$$

という変数変換で、

$$\cos\theta = (z + 1/z)/2, \quad \sin\theta = (z - 1/z)/(2i), \quad dz = ie^{i\theta}d\theta \quad \text{より} \quad d\theta = \frac{dz}{iz}$$

と出来て、単位円坂内の留数の和の計算になることを強調する。証明するよりは、一気に例の紹介をした方が良いかもしれない。

証明

$$I := \int_0^{2\pi} r(\cos\theta, \sin\theta)d\theta$$

は、$z = e^{i\theta}$ $(\theta \in [0, 2\pi])$ とすることで、

$$\begin{aligned}
dz &= ie^{i\theta}d\theta, \quad d\theta = \frac{dz}{iz},\\
\cos\theta &= \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) = \frac{z^2+1}{2z},\\
\sin\theta &= \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right) = \frac{z^2-1}{2iz}
\end{aligned}$$

であるから、

$$I = \int_{|z|=1} r\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\right)\frac{dz}{iz} = \int_{|z|=1} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{|c|<1} \mathrm{Res}(f; c).\blacksquare$$

注意 4.4.19 (試験の採点現場から) 上では、

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} = \frac{z+z^{-1}}{2}, \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z-z^{-1}}{2i}$$

と置いているが、

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} = \frac{z+\overline{z}}{2},\quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z-\overline{z}}{2i}$$

と置いてみたくもなるところである (実際にテストに出題すると、かなりの数の人がそうした)。しかし

$$f(z) := \frac{1}{iz} r\left(\frac{z+\overline{z}}{2}, \frac{z-\overline{z}}{2i}\right)$$

で定義した f は (特殊な場合を除いて) 正則関数にならないので、留数定理を使うことが出来なくなる。 ■

例 4.26 $0<r<R$ とするとき、$I := \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{R^2+r^2-2Rr\cos\theta}$ を求めよ (被積分関数は**ポアソン核**と呼ばれる重要な関数である)。
(解答) $z = e^{i\theta}$ ($\theta \in [0,2\pi]$) とおくと、

$$\begin{aligned} I &= \int_{|z|=1} \frac{1}{R^2+r^2-2Rr\cdot\dfrac{z^2+1}{2z}}\cdot\frac{dz}{iz} = \frac{1}{i}\int_{|z|=1}\frac{dz}{(R^2+r^2)z-Rr(z^2+1)} \\ &= i\int_{|z|=1}\frac{dz}{Rrz^2-(R^2+r^2)z+Rr} = i\int_{|z|=1}\frac{dz}{(Rz-r)(rz-R)}. \end{aligned}$$

留数定理を用いて

$$\begin{aligned} I &= i\cdot 2\pi i\sum_{|c|<1}\operatorname{Res}\left(\frac{1}{(Rz-r)(rz-R)};c\right) = -2\pi\operatorname{Res}\left(\frac{1}{(Rz-r)(rz-R)};\frac{r}{R}\right) \\ &= -2\pi\lim_{z\to r/R}\frac{z-r/R}{(Rz-r)(rz-R)} = -\frac{2\pi}{R}\cdot\frac{1}{r\cdot r/R-R} = \frac{2\pi}{R^2-r^2}.\blacksquare \end{aligned}$$

Example 4.4.20 $a>0$ とするとき、

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1-2a\cos\theta+a^2} = \frac{2\pi}{|a^2-1|}.\blacksquare$$

Example 4.4.21 $a>1$ とするとき、

$$\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{a+\cos\theta} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}.\blacksquare$$

Example 4.4.22 $0\le e<1$ に対して

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(1+e\cos\theta)^2} = \frac{2\pi}{(1-e^2)^{3/2}}.$$

(Mathematica は、`Integrate[1/(1+e Cos[x])^2,{x,0,2Pi}, Assumptions->e>0 && e<1]` で計算してくれる。これは Kepler 運動の周期の計算に必要な積分である。) ■

以下の問題の多くは、梶原 [12] pp.80–81 などから採った。

問 (1) 自然数 n に対して、$I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^{2n}\theta\ d\theta$. (2) 自然数 n に対して、$I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \sin^{2n}\theta\ d\theta$. (3) 正数 a, b に対して、$I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}$. (4) (立教大) $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5-4\cos\theta}$. (5) (慶応大、早大、立教大、九大) $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{R^2+r^2-2Rr\cos\theta}$ $(0 < r < R)$. (6) (東海大) $I = \displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\left(\frac{R+re^{i\theta}}{R-re^{i\theta}}\right) d\theta$ $(0<r<R)$. (7) $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(R^2+r^2-2Rr\cos\theta)^2}$ $(0<r<R)$. (8) (九大、早大) $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+b\cos\theta}$ $(a>b>0)$. (9) 自然数 m, 正数 r, R $(r<R)$ に対して、$I+iJ$ を計算し I, J を求めよ。

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos m\theta}{R^2+r^2-2Rr\cos\theta} d\theta, \quad J = \int_0^{2\pi} \frac{\sin m\theta}{R^2+r^2-2Rr\cos\theta} d\theta.$$

(10) 正数 a, 自然数 n に対して、$I+iJ$ を計算し I, J を求めよ。

$$I = \int_0^{2\pi} e^{a\cos\theta}\cos(a\sin\theta - n\theta)\,d\theta, \quad J = \int_0^{2\pi} e^{a\cos\theta}\sin(a\sin\theta - n\theta)\,d\theta.$$

解答 (1) $\dfrac{2\pi(2n)!}{4^n(n!)^2}$ (2) $\dfrac{2\pi(2n)!}{4^n(n!)^2}$ (3) $\dfrac{2\pi}{ab}$ (4) $\dfrac{2\pi}{3}$ (5) $\dfrac{2\pi}{R^2-r^2}$ (6) 1 (7) $\dfrac{2\pi(R^2+r^2)}{(R^2-r^2)^3}$ (8) $\dfrac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$ (9) $I = \dfrac{2\pi}{R^2-r^2}\left(\dfrac{r}{R}\right)^m$, $J=0$ (10) $I = \dfrac{2\pi a^n}{n!}$, $J=0$

問 $a^2 > b^2 + c^2$ を満たす実数 a, b, c に対して、

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{a+b\cos x + c\sin x}$$

を求めよ。(答: $\dfrac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2-c^2}}$)

問 (Ahlfors [5], p.173) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a+\sin^2 x}$, $|a|>1$ (答: $\mathrm{sign}\, a\dfrac{\pi}{2\sqrt{a^2+a}}$)

4.4.5 $x^\alpha\times$ 有理関数の積分 $\displaystyle\int_0^\infty x^\alpha f(x)dx$

有理関数 f と x^α $(0<\alpha<1)$ との積の $[0,\infty)$ 上での積分

$$I = \int_0^\infty x^\alpha f(x)\,dx$$

を求めよう。要点を一言にまとめると、z^α の多価性を利用して計算する、となる。

関数 z^α は多価関数である

α を任意の実数とする。実関数 x^α は、$x<0$ では普通定義されないことを思い出そう。「複素関数」としての z^α は、
$$z^\alpha = \exp(\alpha \log z)$$
で定義することになるが[a]、これは普通の関数ではなくて、($\log z$ の多価性によって) 多価関数であることに注意する (だから上の等式は、本当は集合に関する等式である)。
$z = re^{i\theta}$ ($r>0$, $\theta \in [0, 2\pi)$) とするとき、
$$\log z = \log r + i(\theta + 2n\pi) \quad (n \in \mathbf{Z})$$
であった (この右辺の $\log r$ は実関数としての log の値)。ゆえに
$$z^\alpha = \exp(\alpha(\log r + i(\theta + 2n\pi))) = r^\alpha e^{i\alpha\theta} e^{i2\alpha n\pi}.$$
もし $\alpha \in \mathbf{Z}$ であれば、$\forall n \in \mathbf{Z}$ に対して $n\alpha \in \mathbf{Z}$ であるから、$e^{i2\alpha n\pi} = 1$ であって、上の式は n によらない 1 つの複素数を定める。しかし $\alpha \notin \mathbf{Z}$ の場合は、複数 (しばしば無限個) の値を取る。
絶対値については、
$$|z^\alpha| = r^\alpha = |z|^\alpha.$$
(右辺の $|z|^\alpha$ は実関数としての α 乗である。) ■

[a] 実関数として、$x = \exp(\log x)$, $x^\alpha = \exp(\alpha \log x)$ であるから、式の形は自然に感じられるであろう。

$\Omega := \mathbf{C} \setminus [0, \infty)$ における対数関数 $\log z$ を、虚部 $\in (0, 2\pi)$ となるような分枝を選ぶことで定義する。すなわち、z を $z = re^{i\theta}$ ($r>0$, $\theta \in (0, 2\pi)$) と極形式で表示したとき、$\log z = \log r + i\theta$. これを用いて、
$$z^\alpha := \exp(\alpha \log z) = \exp(\alpha(\log r + i\theta)) = r^\alpha e^{i\alpha\theta}.$$
(自然に感じられるかも知れないが、全然当たり前ではなく、上に書いた約束に基づいていることに注意！)

この項で用いる z^α (ただし $\alpha \in (0, 1)$)

$z = re^{i\theta}$ ($r>0$, $\theta \in (0, 2\pi)$) とするとき、$z^\alpha = r^\alpha e^{i\alpha\theta}$, $|z^\alpha| = |z|^\alpha$.
$z \in (0, \infty)$ の場合
$$(\heartsuit) \qquad (z^\alpha)_{\text{下半平面からの極限}} = (z^\alpha)_{\text{上半平面からの極限}} \times e^{2\pi\alpha i}$$
である (授業では図を描いて説明)。

命題 4.4.1 (有理関数のメリン変換) $f(z) = \dfrac{Q(z)}{P(z)}$, ここで $P(z), Q(z) \in \mathbf{C}[z]$, $\deg P(z) \geq \deg Q(z) + 2$, $\forall x \in (0, \infty)$ $P(x) \neq 0$, 0 は f の正則点または高々1 位の極とし、$0 < \alpha < 1$ とする。このとき、
$$\int_0^\infty x^\alpha f(x)\, dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi\alpha i}} \sum_{c \neq 0} \operatorname{Res}(z^\alpha f(z); c).$$

証明 $0 < \varepsilon < R$, $0 < \delta < \pi$ なる ε, R, δ を取る (以下で $\varepsilon \to 0$, $\delta \to 0$, $R \to \infty$ とする)。$C := C_1 + C_2 + C_3 + C_4$, C_1 は $z = te^{i\delta}$ ($t \in [\varepsilon, R]$), C_2 は $z = Re^{i\theta}$ ($\theta \in [\delta, 2\pi - \delta]$), $-C_3$ は $z = te^{i(2\pi - \delta)}$ ($t \in [\varepsilon, R]$), $-C_4$ は $z = \varepsilon e^{i\theta}$ ($\theta \in [\delta, 2\pi - \delta]$), とする。
　留数定理から、十分小さい任意の ε, δ, 十分大きい任意の R に対して、
$$(\flat) \qquad \int_{C_1} z^\alpha f(z)\, dz + \int_{C_2} z^\alpha f(z)\, dz + \int_{C_3} z^\alpha f(z)\, dz + \int_{C_4} z^\alpha f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{c \neq 0} \operatorname{Res}(z^\alpha f(z); c).$$

C_1 に沿う線積分は、

$$\int_{C_1} z^\alpha f(z)\,dz = \int_\varepsilon^R \left(te^{i\delta}\right)^\alpha f(te^{i\delta})\,dt = e^{i\alpha\delta}\int_\varepsilon^R t^\alpha f(te^{i\delta})\,dt.$$

$\delta \to 0$ のとき、$t \in [\varepsilon, R]$ について一様に $t^\alpha f(te^{i\delta}) \to t^\alpha f(t)$, また $e^{i\alpha\delta} \to 1$ であるから、

$$\int_{C_1} z^\alpha f(z)\,dz \to \int_\varepsilon^R t^\alpha f(t)\,dt.$$

C_2 に沿う線積分は、

$$\int_{C_2} z^\alpha f(z)\,dz = \int_\delta^{2\pi-\delta} (Re^{i\theta})^\alpha f(Re^{i\theta}) \cdot iRe^{i\theta}\,d\theta \to \int_0^{2\pi} (Re^{i\theta})^\alpha f(Re^{i\theta}) \cdot iRe^{i\theta}\,d\theta \quad (\delta \to 0).$$

ただし $\theta = 0$ のとき $(Re^{i\theta})^\alpha = R^\alpha$, $\theta = 2\pi$ のとき $(Re^{i\theta})^\alpha = R^\alpha e^{2\pi\alpha i}$ とみなす (そうすると被積分関数は $[0, 2\pi]$ 上の連続関数になり、積分の収束が容易に分かる)。

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{2\pi} (Re^{i\theta})^\alpha f(Re^{i\theta}) \cdot iRe^{i\theta}\,d\theta\right| &\le R^{\alpha+1}\int_0^{2\pi}\left|f(Re^{i\theta})\right|d\theta \le R^{\alpha+1}\cdot 2\pi\frac{M}{R^2} \\ &= \frac{2\pi M}{R^{1-\alpha}} \to 0 \quad (R \to \infty).\end{aligned}$$

$-C_3$ に沿う線積分は、

$$\begin{aligned}\int_{-C_3} z^\alpha f(z)\,dz &= \int_\varepsilon^R (te^{(2\pi-\delta)i})^\alpha f(te^{(2\pi-\delta)i}) \cdot e^{(2\pi-\delta)i}\,dt \\ &= e^{(2\pi-\delta)\alpha i}e^{(2\pi-\delta)i}\int_\varepsilon^R t^\alpha f(te^{(2\pi-\delta)i})\,dt = e^{2\pi\alpha i}e^{-(1+\alpha)\delta i}\int_\varepsilon^R t^\alpha f(te^{-\delta i})\,dt.\end{aligned}$$

$\delta \to 0$ のとき、$t \in [\varepsilon, R]$ について一様に $t^\alpha f(te^{-\delta i}) \to t^\alpha f(t)$ であるから、

$$\int_{-C_3} z^\alpha f(z)\,dz \to e^{2\pi\alpha i}\int_\varepsilon^R t^\alpha f(t)\,dt.$$

$-C_4$ に沿う線積分は

$$\int_{-C_4} z^\alpha f(z)\,dz = \int_\delta^{2\pi-\delta} (\varepsilon e^{i\theta})^\alpha f(\varepsilon e^{i\theta}) \cdot i\varepsilon e^{i\theta}\,d\theta \to \int_0^{2\pi} (\varepsilon e^{i\theta})^\alpha f(\varepsilon e^{i\theta}) \cdot i\varepsilon e^{i\theta}\,d\theta \quad (\delta \to 0).$$

ただし $\theta = 0$ のとき $(\varepsilon e^{i\theta})^\alpha = \varepsilon^\alpha$, $\theta = 2\pi$ のとき $(\varepsilon e^{i\theta})^\alpha = \varepsilon^\alpha e^{2\pi\alpha i}$ とみなす (そうすると被積分関数は $[0, 2\pi]$ 上の連続関数になり、積分の収束が容易に分かる)。

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{2\pi} (\varepsilon e^{i\theta})^\alpha f(\varepsilon e^{i\theta}) \cdot i\varepsilon e^{i\theta}\,d\theta\right| &\le \varepsilon^{\alpha+1}\int_0^{2\pi}\left|f(\varepsilon e^{i\theta})\right|d\theta \le \varepsilon^{\alpha+1}\cdot 2\pi\frac{M'}{\varepsilon} \\ &= 2\pi M'\varepsilon^\alpha \to 0 \quad (\varepsilon \to 0).\end{aligned}$$

まず、($\flat$) で $\delta \to 0$ としてから、$\varepsilon \to 0$, $R \to \infty$ として、

$$\int_0^\infty t^\alpha f(t)\,dt - e^{2\pi\alpha i}\int_0^\infty t^\alpha f(t)\,dt = 2\pi i\sum_{c \ne 0}\operatorname{Res}(z^\alpha f(z); c).$$

ゆえに

$$\int_0^\infty t^\alpha f(t)\,dt = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi\alpha i}}\sum_{c \ne 0}\operatorname{Res}(z^\alpha f(z); c). \blacksquare$$

反省　上の証明を振り返ると、$\delta \to 0$ のとき

$$\int_{C_1} z^\alpha f(z)\,dz \to \int_\varepsilon^R t^\alpha f(t)\,dt,$$

$$\int_{-C_3} z^\alpha f(z)\,dz \to e^{2\pi\alpha i}\int_\varepsilon^R t^\alpha f(t)\,dt$$

となり、どちらも図形としては同じ線分 $[\varepsilon, R]$ 上の積分であるにもかかわらず、値が食い違い、引いても打ち消し合わないところがミソである。

全体の話が見える式を掲げると、

$$2\pi i\sum_c \mathrm{Res}\left(f(z)\log z; c\right) = \int_{C_{\varepsilon,R}} f(z)\log z\,dz = (1-e^{2\pi\alpha i})\int_0^R f(x)dx + \text{剰余項}.$$

(積分路 $C_{\varepsilon,R}$ は図で描くのが簡単。)

例 4.4.4

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^\infty \frac{x^\alpha}{1+x^2}\,dx &= \frac{2\pi i}{1-e^{2\pi\alpha i}}\left(\mathrm{Res}\left(\frac{z^\alpha}{1+z^2}; i\right) + \mathrm{Res}\left(\frac{z^\alpha}{1+z^2}; -i\right)\right)\\ &= \frac{2\pi i}{1-e^{2\pi\alpha i}}\left(\frac{e^{\pi\alpha i/2}}{2i} - \frac{e^{3\pi\alpha i}/2}{2i}\right)\\ &= \frac{\pi\left(e^{\pi\alpha i/2} - e^{3\pi\alpha i/2}\right)}{1-e^{2\pi\alpha i}} = \frac{\pi}{2\cos\dfrac{\pi\alpha}{2}}.\blacksquare\end{aligned}$$

この例については、Mathematica, Maple 等でも問題なく計算できる (それぞれ `Integrate[x^a/(1+x^2), {x,-Infinity,Infinity}]`, `integrate(x^a/(1+x^2),x =-infinity..infinity)` と入力する)。 ■

問　(Ahlfors p.174) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{1/3}}{1+x^2}\,dx$

4.4.6　有理関数の半直線上の積分 $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\,dx$

(授業では丸々カットするか、ちょろっと言及するだけにする。)

ここで紹介する公式は載っていない本が多い。多くの本にあるのは、f が偶関数であるとき (これは強い条件であるため、適用範囲はかなり狭くなってしまう)、

$$\int_0^\infty f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \frac{1}{2}\cdot 2\pi i\sum_{\mathrm{Im}\,c>0}\mathrm{Res}(f;c) = \pi i\sum_{\mathrm{Im}\,c>0}\mathrm{Res}(f;c)$$

とするものだが、実は偶関数でない f に対しても、留数を用いて積分を求めることが出来る。

手短に証明の要点の式を掲げると、$z \in (0,\infty)$ の場合の

$$(\log z)_{\text{下半平面からの極限}} = (\log z)_{\text{上半平面からの極限}} + 2\pi i$$

という不連続性に起因して得られる

$$2\pi i\sum_c \mathrm{Res}\left(f(z)\log z; c\right) = \int_{C_{\varepsilon,R}} f(z)\log z\,dz = -2\pi i\int_0^R f(x)dx + \text{剰余項}.$$

(積分路 $C_{\varepsilon,R}$ は図で描くのが簡単。)

Proposition 4.4.23 (有理関数の半直線上の積分) $f(z) = \dfrac{Q(z)}{P(z)}$, ここで $P(z), Q(z) \in \mathbf{C}[z]$, $\deg P(z) \ge \deg Q(z) + 2$, $\forall x \in [0,\infty)$ $P(x) \ne 0$ ならば、

$$\int_0^\infty f(x)\,dx = -\sum_{c\in\mathbf{C}\setminus[0,\infty)} \operatorname{Res}\left(f(z)\log z; c\right).$$

ただし log は $\operatorname{Im}\log \in (0, 2\pi)$ であるような分枝を取る。

証明 $f(z)\log z$ を命題 4.4.1 と同じ積分路に沿って積分する。ε, δ が十分小さく、R が十分大きければ

$$\sum_{j=1}^4 \int_{C_j} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{c\in\mathbf{C}\setminus[0,\infty)} \operatorname{Res}(z^\alpha f(z); c).$$

$\delta \to 0$ のとき、

$$\int_{C_1} f(z)\log z\,dz \to \int_\varepsilon^R f(t)\log t\,dt,$$

$$-\int_{C_3} f(z)\log z\,dz \to \int_\varepsilon^R f(t)\left[\log t + 2\pi i\right]dt.$$

ゆえに

$$\int_{C_1+C_3} f(z)\log z\,dz \to -2\pi i\int_\varepsilon^R f(t)\,dt.$$

また $\delta \to 0$ のとき、

$$\int_{C_2} f(z)\log z\,dz \to \int_0^{2\pi} f(Re^{i\theta})(\log R + i\theta)\cdot iRe^{i\theta}d\theta,$$

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{2\pi} f(Re^{i\theta})(\log R + i\theta)\cdot iRe^{i\theta}d\theta\right| &\le R(\log R + 2\pi)\int_0^{2\pi}\left|f(Re^{i\theta})\right|d\theta \\ &\le R(\log R + 2\pi)\cdot\frac{M}{R^2}\cdot 2\pi \to 0 \quad (R\to\infty).\end{aligned}$$

同様に C_4 上の積分も $\varepsilon \to 0$ のとき 0 に収束することが分かる。ゆえに

$$-2\pi i\int_0^\infty f(t)\,dt = 2\pi i\sum_{c\in\mathbf{C}\setminus[0,\infty)} \operatorname{Res}(z^\alpha f(z); c).$$

両辺を $-2\pi i$ で割って結果を得る。■

森・杉原 [9] pp.160–163 には、

$$\int_0^\infty f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\operatorname{Log}(-z)\,dz = -\sum_{c\ \text{は}\ f\ \text{の極}} \operatorname{Res}\left(f(z)\operatorname{Log}(-z); c\right).$$

と書いてある。ここで C は実軸の正の部分を正の向きに囲む単純閉曲線で、C およびその内部 (実軸の正の部分の開近傍) で正則となるように取る。

分枝の取り方をいちいち説明しなくて済むように (?)、主値 Log を用いている (その代わり $\operatorname{Log}(-z)$ のような少し分かりづらいものを使うことになる — コンピューター使う時は便利なのか？)。

特にすべてが単純極であれば、

$$\int_0^\infty f(x)\,dx = -\sum_{c\ \text{は}\ f\ \text{の極}} \operatorname{Res}\left(f(z); c\right)\operatorname{Log}(-c).$$

例 4.4.5

$$I = \int_0^\infty \frac{dx}{x^3+1} = \frac{2\sqrt{3}\pi}{9}. \blacksquare$$

4.4.7　偶関数 $\times (\log x)^n$ の積分 $\displaystyle\int_0^\infty g(x)(\log x)^n\,dx$

(授業ではカットする。使うときは推敲が必要。)

$\Omega = \{z \in \mathbf{C}; \operatorname{Im} z > 0\}$, g は $\overline{\Omega}$ のある開近傍において、有限個の点を除いて正則、実軸上に特異点はなく、$\forall x \in \mathbf{R}$ $g(-x) = g(x)$ を満たす。$R \to \infty$ のとき、$\theta \in [0,\pi]$ について一様に、$g(Re^{i\theta})R\log R \to 0$. このとき

$$2\int_0^\infty g(x)\log x\,dx + i\pi\int_0^\infty g(x)\,dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} c>0} \operatorname{Res}(g(z)\operatorname{Log} z; c).$$

$\operatorname{Log} z$ はいわゆる主値、すなわち $\operatorname{Im}(\operatorname{Log} z) \in (0, 2\pi)$.

例 4.4.6 $a > 0$ に対して、$I = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\log x}{x^2+a^2}\,dx = \frac{\pi\log a}{2a}$. 実際、

$$2\int_0^\infty \frac{\log x}{x^2+a^2}\,dx + i\pi\int_0^\infty \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{\operatorname{Log} z}{z^2+a^2}; ia\right) = \frac{\pi}{a}\left(\log a + \frac{\pi}{2}i\right)$$

より、

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{x^2+a^2}\,dx = \frac{\pi\log a}{2a}. \blacksquare$$

例 4.4.7 $a > 0$ に対して、$I = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\log x}{(x^2+a^2)^2}\,dx = \frac{\pi(\log a - 1)}{4a^3}$. 実際、

$$2\int_0^\infty \frac{\log x}{(x^2+a^2)^2}\,dx + i\pi\int_0^\infty \frac{1}{(x^2+a^2)^2}\,dx = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{\operatorname{Log} z}{(z^2+a^2)^2}; ia\right) = 2\pi i \left.\frac{d}{dz}\left((z-ia)^2\frac{\operatorname{Log} z}{(z^2+z^2)^2}\right)\right|_{z=ia} = 2\pi$$

より。$\blacksquare$

例 4.4.8 $a > 0$ に対して、$I = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\log x}{x^4+a^4}\,dx = \frac{\pi(2\log a - \pi/2)}{4\sqrt{2}a^3}$. 実際、

$$\begin{aligned} 2\int_0^\infty \frac{\log x}{x^4+a^4}\,dx + i\pi\int_0^\infty \frac{1}{x^4+a^4}\,dx &= 2\pi i\left(\operatorname{Res}\left(\frac{\operatorname{Log} z}{z^4+a^4}; ae^{\pi i/4}\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{\operatorname{Log} z}{z^4+a^4}; ae^{3\pi i/4}\right)\right) \\ &= \cdots = \frac{\pi}{2\sqrt{2}a^3}\left[(2\log a - \frac{\pi}{2}) + i\pi\right] \end{aligned}$$

より。$\blacksquare$

例 4.4.9 $a > 0$ に対して、$I = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\log x}{x^6+a^6}\,dx = \frac{\pi(\log a - 2\pi/\sqrt{3})}{3a^5}$. 実際、

$$2\pi i \sum_{\operatorname{Im} c>0} \operatorname{Res}() = \frac{\pi}{3a^5}\left(2\log a - \frac{2\sqrt{3}}{3}\pi + i\pi\right)$$

となるので ??? $\blacksquare$

問 (Ahlfors p.174) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log x}{1+x^2}\,dx$ (答: 0)

4.4.8 有理関数 $\times(\log x)^n$ の積分 $\displaystyle\int_0^\infty f(x)(\log x)^n\,dx$

(授業ではカットする。使うときは推敲が必要。)

偶関数とは限らない有理関数 f に対して、

$$\int_0^\infty f(x)\,(\log x)^n\,dx$$

を求める ($n=0$ の場合が 4.4.6)。

x^α も実は log を使って表されるので、このタイプである。

4.4.9 その他

(授業ではカットする。使うときは推敲が必要。)

有理関数の有限区間の積分

$a<b$ とするとき、

$$\operatorname{Log}\frac{z-a}{z-b}$$

は $z=a,b$ を分岐点とする。主値の性質から、$\mathbf{C}\setminus[a,b]$ で連続である。$x\in(a,b)$ とするとき、

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left(\operatorname{Log}\frac{z+1}{z-1}\bigg|_{z=x+i\varepsilon}-\operatorname{Log}\frac{z+1}{z-1}\bigg|_{z=x-i\varepsilon}\right)=-2\pi i$$

である。

f が $[a,b]$ の ($\mathbf{C}$ における) 開近傍 D で正則であるとき、

$$\int_a^b f(x)\,dx=\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\operatorname{Log}\frac{z-a}{z-b}\,dz.$$

ただし C は、$[a,b]$ を正の向きに囲む D 内の単純閉曲線で、C の内部と C の周上では f は正則であるとする。

例 4.4.10

$$I=\int_{-1}^1\frac{dx}{x^4+1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{Log}\left(1+\sqrt{2}\right)+\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

例 4.4.11

$$I=\int_0^\pi \log\sin\theta\,d\theta=\pi\log 2.$$

問 (Ahlfors p.174) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log(1+x^2)}{x^{1+\alpha}}\,dx$ $(0<\alpha<2)$ (答 $\dfrac{\pi}{\alpha\sin\dfrac{\alpha\pi}{2}}$)

問題箱

この節では、a を始点、b を終点とする線分を $\Gamma_{a,b}$ と表す。

例 4.4.12 (Fresnel (フレネル) の積分) $f(z) := \exp(-z^2/2)$ の $C := C_1 + C_2 + C_3$, $C_1 := \Gamma_{0,X}$, $C_2 := \Gamma_{X,(1+i)X}$, $C_3 := \Gamma_{(1+i)X,0}$ $(X \in (0,\infty))$ に沿っての積分を考えることで、

$$\int_0^\infty \cos\left(x^2\right) dx = \int_0^\infty \sin\left(x^2\right) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$$

を示せ[17]。
(解) f は整関数であるから、閉曲線 C に沿う線積分は 0 である。

$$0 = \int_C f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz + \int_{C_3} f(z)\,dz.$$

ゆえに

$$\int_{-C_3} f(z)\,dz = \int_{C_1}\ dz + \int_{C_2}\ dz.$$

C_1 は $z = x$ $(x \in [0,X])$ とパラメーターづけできるから、

$$\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_0^X e^{-x^2/2}\,dx.$$

$x/\sqrt{2} = t$ と置換すると、$dx = \sqrt{2}dt$ であるから、

$$\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_0^{X/\sqrt{2}} e^{-t^2}\cdot\sqrt{2}\,dt \to \sqrt{2}\int_0^\infty e^{-t^2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

C_2 は $z = X + iy$ $(y \in [0,X])$ とパラメーターづけできる。

$$-\frac{z^2}{2} = -\frac{X^2 - y^2 + 2iXy}{2}, \quad dz = i\,dy$$

であるから、

$$\int_{C_2} f(z)\,dz = \int_0^X e^{-(X^2-y^2+2iXy)/2}\cdot i\ dy.$$

$\left|e^{-(X^2-y^2+2iXy)/2}\right| = e^{-(X^2-y^2)/2}$, $-(X^2-y^2) = -(X+y)(X-y) \le -X(X-y)$ であるから、

$$\begin{aligned}\left|\int_{C_2} f(z)\,dz\right| &\le \int_0^X e^{-(X^2-y^2)/2}dy \le \int_0^X e^{-X(X-y)/2}dy \\ &= \int_X^0 e^{-Xt/2}\cdot(-1)dt = \int_0^X e^{-Xt/2}dt = \left[-\frac{2}{X}\cdot e^{-Xt/2}\right]_0^X \\ &= -\frac{2}{X}\left(e^{-X^2/2} - 1\right) \to 0 \quad (X \to \infty).\end{aligned}$$

$-C_3$ は $z = (1+i)t$ $(t \in [0,X])$ とパラメーターづけできる。$z^2 = (1+i)^2t^2 = 2it^2$, $dz = (1+i)dt$ に注意して

$$\int_{-C_3} f(z)\,dz = \int_0^X e^{-it^2}\cdot(1+i)dt = (1+i)\int_0^X \left(\cos(t^2) - i\sin\left(t^2\right)\right)dt.$$

[17] Augustin-Jean Fresnel (1788–1827) の名を冠された Fresnel 積分 $C(x) := \displaystyle\int_0^x \cos\left(t^2\right)dt$, $S(x) := \displaystyle\int_0^x \sin\left(t^2\right)dt$ の $x \to \infty$ での極限である。Fresnel は光の回折の研究に用いた。

以上まとめて、

$$(1+i)\left(\int_0^X \cos(t^2)dt - i\int_0^X \sin(t^2)dt\right) = \sqrt{2}\int_0^{X/\sqrt{2}} e^{-t^2}\,dt + \int_{C_2} f(z)\,dz \to \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad (X\to\infty).$$

ゆえに左辺の二つの積分の $X\to\infty$ のときの極限も存在して、

$$\int_0^\infty \cos(t^2)\,dt - i\int_0^\infty \sin(t^2)\,dt = \frac{1}{1+i}\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \frac{1-i}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

実部、虚部を取って

$$\int_0^\infty \cos\left(t^2\right)dt = \int_0^\infty \sin\left(t^2\right)dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.\blacksquare$$

例 4.4.13 $\forall a\in\mathbf{R}$ に対して、

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2+i2ax}\,dx = e^{-a^2}\sqrt{\pi}.$$

実部、虚部を取って、

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\cos(2ax)dx = e^{-a^2}\sqrt{\pi},\quad \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\sin(2ax)dx = 0.$$

以上を示せ。
(解答) $a=0$ のときは良く知られた結果である (微分積分学の教科書に載っている)。広義積分の存在そのものは明らかである ($\left|e^{-x^2+i2ax}\right| = e^{-x^2}$, $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,dx<\infty$ であるから、絶対収束する)。$a>0$ の場合に証明すれば十分であることも容易に分かる ($a<0$ のとき、a の代わりに $|a|$ について考えれば良い)。

$f(z) := \exp(-z^2)$ とおく。$a>0$, $X>0$ に対して、$C_1 := \Gamma_{-X,X}$, $C_2 := \Gamma_{X,X+ia}$, $C_3 := \Gamma_{X+ia,-X+ia}$, $C_4 := \Gamma_{-X+ia,-X}$, $C := C_1+C_2+C_3+C_4$ とおく。f は整関数で、C は閉曲線であるから、

$$0 = \int_C f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz + \int_{C_3} f(z)\,dz + \int_{C_4} f(z)\,dz.$$

ゆえに

$$\int_{-C_3} f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz + \int_{C_4} f(z)\,dz.$$

C_1 は $z=x$ ($x\in[-X,X]$) とパラメーターづけできるので、

$$\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{-X}^X e^{-x^2}\,dx.$$

C_2 は $z=X+iy$ ($y\in[0,a]$) とパラメーターづけでき、$-(X+iy)^2 = -(X^2-y^2+2iXy)$ であるから、

$$\int_{C_2} f(z)\,dz = \int_0^a \exp\left[-(X^2-y^2+2iXy)\right]\cdot i\,dy.$$

$X>a$ と仮定すると、$y\in[0,a]$ に対して、

$$\operatorname{Re}\left[-(X^2-y^2+2iXy)\right] = -(X^2-y^2) = -(X+y)(X-y) \le -X(X-y) \le -X(X-a)$$

であるから、

$$\begin{aligned}\left|\int_{C_2} f(z)\,dz\right| &\le \int_0^a \left|\exp\left[-(X^2-y^2+2iXy)\right]\right|dy = \int_0^a e^{-(X^2-y^2)}\,dy\\ &\le \int_0^a e^{-X(X-a)}\,dy = ae^{-X(X-a)} \to 0 \quad (X\to\infty).\end{aligned}$$

同様にして、

$$\left|\int_{C_4} f(z)\,dz\right| \to 0 \quad (X \to \infty).$$

$-C_3$ は $z = x + ia$ ($x \in [-X, X]$) とパラメーターづけできて、

$$\exp(-z^2) = \exp\left[-(x+ia)^2\right] = \exp\left[-x^2 + a^2 - 2aix\right] = e^{a^2} e^{-x^2}\left(\cos(2ax) - i\sin(2ax)\right)$$

であるから、

$$\int_{-C_3} f(z)\,dz = e^{a^2}\left(\int_{-X}^{X} e^{-x^2}\cos(2ax)dx - i\int_{-X}^{X} e^{-x^2}\sin(2ax)dx\right).$$

以上をまとめると、

$$\begin{aligned} e^{a^2}\left(\int_{-X}^{X} e^{-x^2}\cos(2ax)dx - i\int_{-X}^{X} e^{-x^2}\sin(2ax)dx\right) &= \int_{-X}^{X} e^{-x^2}\,dx + \int_{C_2} f(z)\,dz + \int_{C_4} f(z)\,dz \\ &\to \sqrt{\pi} \quad (X \to \infty). \end{aligned}$$

ゆえに

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\cos(2ax)dx = e^{-a^2}\sqrt{\pi}.$$

なお、この広義積分の存在そのものは明らかであり、また被積分関数が奇関数であることから明らかに

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\sin(2ax)dx = 0.$$

あるいは一つにまとめて、

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{i2ax}\,dx = e^{-a^2}\sqrt{\pi}.\blacksquare$$

例 4.4.14 $n, m \in \mathbf{N}$, $m < n$ に対して、

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^n}\,dx = \frac{\pi/n}{\sin(m\pi/n)}.$$

特殊な形の積分であるが (以下の議論で、積分路の取り方が n に依存しているので、分母を変更するのは難しい)、意外な応用があり、多くのテキストに載っている例である。

$$\begin{gathered} \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^3} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}, \quad \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}, \\ \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^5} = \frac{4\pi}{5\sqrt{10-2\sqrt{5}}}, \quad \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^6} = \frac{\pi}{3}, \quad \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^8} = \frac{\pi}{4\sqrt{2-\sqrt{2}}}, \\ \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^{10}} = \frac{(\sqrt{5}+1)\pi}{10}, \quad \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^{12}} = \frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})\pi}{12}. \end{gathered}$$

なお、有理数 $r \in (0,1)$ に対して[18]、

$$\int_0^{\infty} \frac{x^r}{1+x}\,dx = \frac{\pi}{\sin(r\pi)}$$

を証明するのにも利用できる ($r = m/n$ として、$x^n = u$ という置換積分をする)。

[18] 有理数でなくても成立する。後で別の方法で示す。

(解答) $f(z) := \dfrac{z^{m-1}}{1+z^n}$ とおく。これは、$\exp\dfrac{(1+2k)\pi i}{n}$ $(k=0,1,\dots,n-1)$ を極として持ち、それ以外の範囲では正則である。$\omega := \exp\dfrac{\pi i}{n}$ とおくと、f の極は ω^{2k+1} $(k=0,1,\dots,n-1)$ と表せる。$\omega^n=-1$, $\omega^{2n}=1$ が成り立つ。

$R\in(1,\infty)$ に対して、

$$C_1 := \mathit{\Gamma}_{0,R},\quad C_2 : z = Re^{i\theta}\quad (\theta\in[0,2\pi/n]),\quad C_3 := \mathit{\Gamma}_{R\omega^2,0},\quad C := C_1+C_2+C_3$$

とおくと、C は閉曲線で (C_2 の終点が $R\omega^2$ であることに注意)、その上に f の極はなく、内部にある f の極は ω だけである。留数定理から

$$(\sharp)\qquad \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz + \int_{C_3} f(z)\,dz = 2\pi i\operatorname{Res}(f;\omega).$$

まず ω は f の 1 位の極であるから、

$$\operatorname{Res}(f;\omega) = \left.\frac{z^{m-1}}{(1+z^n)'}\right|_{z=\omega} = \left.\frac{z^{m-1}}{nz^{n-1}}\right|_{z=\omega} = \frac{\omega^{m-1}}{n\omega^{n-1}} = \frac{\omega^m}{n\omega^n} = -\frac{\omega^m}{n}.$$

C_1 は $z=x$ $(x\in[0,R])$ とパラメーター付けできるから、

$$\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_0^R f(x)\,dx = \int_0^R \frac{x^{m-1}}{1+x^n}\,dx.$$

C_2 に沿う線積分は

$$\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_0^{2\pi/n} f(Re^{i\theta})\cdot iRe^{i\theta}\,d\theta$$

である。ある正数 M, R^* が存在して、$|f(z)|\le M/|z|^2$ $(|z|\ge R^*)$ という評価が成り立つので、$R>R^*$ に対して、

$$\left|\int_{C_1} f(z)\,dz\right| \le \int_0^{2\pi/n}\left|f(Re^{i\theta})\right|\cdot R\,d\theta \le \frac{M}{R^2}\cdot R\int_0^{2\pi/n} d\theta = \frac{2\pi M}{nR}\to 0\quad (R\to\infty).$$

$-C_3$ は $z=t\omega^2$ $(t\in[0,R])$ とパラメーター付け出来るから、

$$\int_{-C_3} f(z)\,dz = \int_0^R f(t\omega^2)\cdot\omega^2\,dt = \int_0^R \frac{t^{m-1}\omega^{2(m-1)}}{1+t^n\omega^{2n}}\cdot\omega^2\,dt = \omega^{2m}\int_0^R \frac{x^{m-1}}{1+x^n}\,dx.$$

$(\sharp)$ に代入して、

$$\left(1-\omega^{2m}\right)\int_0^R \frac{x^{m-1}}{1+x^n}\,dx + \int_{C_2} f(z)\,dz = -2\pi i\frac{\omega^m}{n}.$$

$R\to\infty$ とすると、左辺第 2 項が 0 に収束するので、左辺第 1 項の極限が存在して

$$(1-\omega^{2m})\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{1+x^n}\,dx = -2\pi i\frac{\omega^m}{n}$$

が成り立つ。ゆえに

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{1+x^n}\,dx = \frac{-2\pi i\omega^m}{n(1-\omega^{2m})} = \frac{\pi\cdot 2i}{n(\omega^m-\omega^{-m})} = \frac{\pi}{n\sin(m\pi/n)}.\blacksquare$$

例 4.4.15

$$\Gamma\left(\frac{q}{p}\right)\Gamma\left(1-\frac{q}{p}\right)=B\left(\frac{q}{p},1-\frac{q}{p}\right)=p\int_0^\infty \frac{x^{q-1}}{1+x^p}dx=\frac{\pi}{\sin\left(\pi q/p\right)}.$$

最初の等号は有名な $B(\alpha,\beta)=\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)/\Gamma(\alpha+\beta)$ と $\Gamma(1)=1$ による。また最後の等号は、上の例による。以下、真ん中の等号を示す。

まず $x^p=u$ という置換を用いて、

$$\int_0^\infty \frac{x^{q-1}}{1+x^p}dx=\frac{1}{p}\int_0^\infty \frac{u^{q/p-1}}{1+u}du. \tag{4.26}$$

一方、ベータ関数の定義式

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$

において、$x=t/(1+t)$ と変数変換すると

$$B(p,q)=\int_0^\infty \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}dt \tag{4.27}$$

が得られる。これから

$$\int_0^\infty \frac{x^{q-1}}{1+x^p}dx=\frac{1}{p}B\left(\frac{q}{p},1-\frac{q}{p}\right)$$

が得られる。

稠密性の議論によって、$\forall x\in(0,1)$ に対して

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin(\pi x)}.$$

解析接続によって $\mathbf{C}$ 全体で成立する。

$$\Gamma(z)=\frac{e^{-\gamma z}}{z}\prod_{k=1}^\infty \frac{e^{z/k}}{1+z/k}\quad (\gamma \text{ は Euler の定数})$$

より、

$$\Gamma(z)\Gamma(-z)=-\frac{e^{-\gamma z}e^{\gamma z}}{z^2}\prod_{k=1}^\infty \frac{e^{z/k}}{1+z/k}\prod_{k=1}^\infty \frac{e^{-z/k}}{1-z/k}=-\frac{1}{z^2}\prod_{k=1}^\infty \frac{1}{1-(z/k)^2}.$$

ゆえに

$$\sin\pi z=\frac{\pi}{\Gamma(z)\Gamma(-z)}=-\pi z^2\prod_{k=1}^\infty\left(1-(z/k)^2\right)=-\pi z\prod_{k=0}^\infty\left(1-(z/k)^2\right).$$

4.5 無限遠点とリーマン球面

志賀 [13] に書いてあることは、間接的かもしれないがとても参考になる。

4.5.1 無限遠点の導入

はじめに

無限遠点 (無限大, infinity, point at infinity) ∞ について。

複素数の世界 (複素平面 $\mathbf{C}$) に、新たに 1 点 ∞ を付け加えて、これまでの $z\to\infty$ (無限大に発散する) が、点 ∞ に収束することを意味するように、諸々必要なことを定義する。

実数世界と複素数世界の無限大の違い

実数の世界の ∞ $(+\infty)$, $-\infty$ と、複素数の世界の ∞ は違う。本当は同じ記号を使うのがマズイくらいである。ここでは区別を強調するため、実数世界の ∞ は $+\infty$ と書くことにする。
実数の世界には、数直線で言うと、右の果て $+\infty$ と、左の果て $-\infty$ がある。

$$-\infty = (-1)\cdot(+\infty) \neq +\infty$$

が成り立つ。
複素数の世界には、原点から果てしなく遠い点 ∞ が 1 個あるだけ。

$$(-1)\cdot\infty = \infty$$

である。

lim と ∞

実関数の場合　f を実関数 $f\colon I\to\mathbf{R}$ $(I\subset\mathbf{R})$, $a\in\overline{I}$, $A\in\mathbf{R}$ とする。

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \quad \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \quad \forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x\in I \quad |x-a|<\delta \Longrightarrow |f(x)-A|<\varepsilon.$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \quad \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \quad \forall U\in\mathbf{R} \quad \exists\delta>0 \quad \forall x\in I \quad |x-a|<\delta \Longrightarrow f(x)>U.$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = A \quad \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \quad \forall\varepsilon>0 \quad \exists R\in\mathbf{R} \quad \forall x\in I \quad x>R \Longrightarrow |f(x)-A|<\varepsilon.$$

問　$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ はどういうことか？

問　$\to +\infty$ の代りに $\to -\infty$ とすると？

複素関数の場合　f を複素関数 $f\colon\Omega\to\mathbf{C}$ $(\Omega\subset\mathbf{C})$, $a\in\overline{\Omega}$, $A\in\mathbf{C}$ とする。

$$\lim_{z\to a} f(z) = A \quad \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \quad \forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall z\in\Omega \quad |z-a|<\delta \Longrightarrow |f(z)-A|<\varepsilon.$$

$$\lim_{z\to a} f(z) = \infty \quad \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \quad \forall U\in\mathbf{R} \quad \exists\delta>0 \quad \forall z\in\Omega \quad |z-a|<\delta \Longrightarrow |f(z)|>U.$$

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = A \quad \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \quad \forall\varepsilon>0 \quad \exists R\in\mathbf{R} \quad \forall z\in\Omega \quad |z|>R \Longrightarrow |f(z)-A|<\varepsilon.$$

問　$\displaystyle\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$ はどういうことか？

例 4.5.1 実関数の場合、

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$$

は発散する。$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x} = +\infty$ ではないことに注意する。

$$\lim_{x\to +0}\frac{1}{x} = +\infty, \quad \lim_{x\to -0}\frac{1}{x} = -\infty$$

が成り立つ。一方、複素関数の場合、

$$\lim_{z\to 0}\frac{1}{z} = \infty$$

が成り立つ。 ■

問　これを証明せよ。

例 4.5.2 (もう少し詳しく実関数の極限との相違点) 対応する実関数の極限との微妙な違いに注意すること。これは関数のせいというよりも、∞ と $+\infty$, $-\infty$ の違いによるところが大きい。

$n \in \mathbf{N}$ に対して $\displaystyle\lim_{z\to\infty} z^n = \infty$. (Cf. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^n = \pm\infty$ (n が偶数のとき $+$, n が奇数のとき $-$))

より一般に次数が 1 以上の多項式 (定数でない多項式) $P(z)$ に対して、$\displaystyle\lim_{z\to\infty} P(z) = \infty$.

$n \in \mathbf{N}$ に対して $\displaystyle\lim_{z\to 0} \frac{1}{z^n} = \infty$. (Cf. n が偶数ならば、$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^n} = +\infty$. n が奇数ならば、$\displaystyle\lim_{x\to +0} \frac{1}{x^n} = +\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to -0} \frac{1}{x^n} = -\infty$ であるから、$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^n}$ は存在しない。)

$\displaystyle\lim_{z\to\infty} \exp z$ は存在しない。(Cf. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$.)

もちろん $\displaystyle\lim_{z\to 0} \sin z = 0$. ゆえに $\displaystyle\lim_{z\to 0} \frac{1}{\sin z} = \infty$. 同様に $\displaystyle\lim_{z\to\pi/2} \cos z = 0$, $\displaystyle\lim_{z\to\pi/2} \tan z = \infty$. ■

対数の主値 $\operatorname{Log} z$ について、$\displaystyle\lim_{\substack{z\in\mathbf{C}\setminus(-\infty,0)\\ z\to\infty}} \operatorname{Log} z = \infty$, $\displaystyle\lim_{\substack{z\in\mathbf{C}\setminus(-\infty,0)\\ z\to 0}} \operatorname{Log} z = \infty$. $\log z$ は多価であるが、$\operatorname{Re}\log z = \log|z|$ (右辺の $\log$ は実関数としての $\log$) なので、実は主値に限定しなくても、やはり $\displaystyle\lim_{z\to\infty} \log z = \infty$, $\displaystyle\lim_{\substack{z\in\mathbf{C}\setminus\{0\}\\ z\to 0}} \log z = \infty$.

冪乗 $\mathbf{C}\setminus\{0\} \ni z \mapsto z^\alpha$ も一般には多価関数であるが、$\alpha \in \mathbf{R}$ の場合は $|z^\alpha| = |z|^\alpha$ (右辺は実関数としての冪乗) であるから、

(i) $\alpha > 0$ のとき、$\displaystyle\lim_{z\to\infty} z^\alpha = \infty$, $\displaystyle\lim_{\substack{z\neq 0\\ z\to 0}} z^\alpha = 0$.

(ii) $\alpha < 0$ のとき、$\displaystyle\lim_{z\to\infty} z^\alpha = 0$, $\displaystyle\lim_{\substack{z\neq 0\\ z\to 0}} z^\alpha = \infty$.

ここに書いてある式を覚えようと努力することはお勧めしない。むしろ、自分でどうなるか確かめられる (計算できる) ようにしておくべきである。この辺は三角関数にからむ公式をどこまで覚えるかという話と似ている。確実に覚えておける公式 (それは人によって異なる[19]) から、他の公式をどうやって導くかを体得するのが望ましい。■

∞ をモノに格上げしよう

前項に出て来る ∞ は独立した意味を持つモノではない (∞ 単独で出て来るわけでなくて、必ず "$\to\infty$" あるいは $\lim =$ の右辺という形で現れ、それは絶対値が $+\infty$ に近付くという意味であった)。

∞ を新しい点 ($\infty \in \mathbf{C}$) として、$\mathbf{C}$ にそれをつけ加えて拡張したものを $\widehat{\mathbf{C}}$ あるいは $\mathbb{P}^1$ と書く:

$$\widehat{\mathbf{C}} = \mathbb{P}^1 = \mathbb{P}^1(\mathbf{C}) := \mathbf{C} \cup \{\infty\}.$$

(これ (特に $\mathbb{P}^1(\mathbf{C})$ と書いたとき) は、1 次元複素射影空間と呼ばれるものであるが、ここでは後で正式に紹介する「リーマン球」と呼び名を使うことを推奨する。)

∞ の四則　$\lim$ と「合う」ように次のように定めることがある。

$$\forall a \in \mathbf{C} \quad a + \infty = \infty + a = \infty.$$

[19]筆者の場合は、$\sin$, $\cos$ の加法定理は高校生のとき以来正確に覚えていられるようなので (ちなみに $\tan$ はダメです)、いつもそこからスタートするが、人によっては、オイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ (と指数法則) や、原点のまわりの回転を表す行列 $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ (と行列の積の定義) からスタートするかもしれない。一方もっとたくさんの公式を苦労なく覚えておける、という人もいるだろう。

$$\forall b \in \mathbf{C} \setminus \{0\} \quad b \cdot \infty = \infty \cdot b = \infty.$$

$$\infty \cdot \infty = \infty.$$

$$\forall a \in \mathbf{C} \setminus \{0\} \quad \frac{a}{0} = \infty.$$

$$\forall b \in \mathbf{C} \quad \frac{b}{\infty} = 0.$$

しかし、$\infty + \infty$ や $0 \cdot \infty$, $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$ は定義しない。

$\widehat{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ は体ではなく、移項や消去などは気軽に出来ない。

何の役に立つ？例えば 1 次分数変換

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad (a,\ b,\ c,\ d \text{ は } ad - bc \neq 0 \text{ を満たす複素数の定数})$$

は、$\mathbf{C}$ の範囲で考えると、定義できない点もあるし、結構煩わしいことが起きる。$f\colon \widehat{\mathbf{C}} \to \widehat{\mathbf{C}}$ が、全単射かつ両連続になるように出来る。

例 4.5.3 $f(z) = \dfrac{z+2}{3z+4}$ は、“普通に” 考えると、$z \neq -\dfrac{4}{3}$ に対して定義できる。つまり $f\colon \mathbf{C}\setminus\left\{-\dfrac{4}{3}\right\} \to \mathbf{C}$ である。これは単射 ($z_1 \neq z_2 \quad \Longrightarrow \quad f(z_1) \neq f(z_2)$) であるが、全射ではない。実際、$f(z) = \dfrac{1}{3}$ を満たす z は存在しない ($\dfrac{z+2}{3z+4} = \dfrac{1}{3}$ は $3(z+2) = 3z+4$ と同値で、これは解を持たないことは明らか)。ところで

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{1+2/z}{3+4/z} = \frac{1}{3}, \qquad \lim_{\substack{z\neq -4/3\\ z\to -4/3}} f(z) = \infty$$

であることに注目しよう。そこで

$$\widetilde{f}(z) := \begin{cases} \dfrac{z+2}{3z+4} & \left(z \in \mathbf{C} \setminus \left\{-\dfrac{4}{3}\right\}\right) \\ \infty & \left(z = -\dfrac{4}{3}\right) \\ \dfrac{1}{3} & (z = \infty) \end{cases}$$

とおくと、$\widetilde{f}\colon \widehat{\mathbf{C}} \to \widehat{\mathbf{C}}$ で、$\widetilde{f}$ は全単射になる。また

$$\lim_{z\to -4/3} \widetilde{f}(z) = \widetilde{f}\left(-\frac{4}{3}\right), \qquad \lim_{z\to\infty} \widetilde{f}(z) = \widetilde{f}(\infty)$$

であるので、後で $\widehat{\mathbf{C}}$ に (この lim と整合する) 位相を定めると $\widetilde{f}$ は連続になる。実は $\widetilde{f}^{-1}$ も同様の 1 次変換になるので連続で、$\widetilde{f}\colon \widehat{\mathbf{C}} \to \widehat{\mathbf{C}}$ は同相写像になる。■

幾何学的イメージ — リーマン球面

$$S := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}, \quad N := (0,0,1)$$

とおく。また x_1x_2 平面 ($x_3 = 0$) を H で表し、複素平面 $\mathbf{C}$ と同一視する。すなわち $(x_1, x_2, 0) \in H$ に $x_1 + ix_2 \in \mathbf{C}$ を対応させる。

$\forall P \in S \setminus \{N\}$ に対して、N と P を通る直線と、H との交点 P' がただ一つ定まる。P に P' を対応させる写像 $\varphi\colon S \setminus \{N\} \ni P \mapsto P' \in H = \mathbf{C}$ を、N からの**立体射影** (**stereographic projection**) と呼ぶ。

$P' = (x, y, 0) = x + iy$ とすると、簡単な計算 (与えられた 2 点を通る直線と、与えられた平面との交点を求める計算) により

$$x = \frac{x_1}{1-x_3}, \quad y = \frac{x_2}{1-x_3}, \quad x + iy = \frac{x_1 + ix_2}{1-x_3}.$$

問　このことを確かめよ。

$\varphi\colon S\setminus\{N\}\to H$ は全単射である。このことは幾何学的に考えても明らかであるが、$z=\varphi(x_1,x_2,x_3)$ が次のように具体的に x_1, x_2, x_3 について解けることからも分かる[20]。

$$|z|^2=\frac{1+x_3}{1-x_3},\quad x_3=\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1},\quad x_1=\frac{z+\overline{z}}{|z|^2+1},\quad x_2=\frac{-i(z-\overline{z})}{|z|^2+1}.$$

$\varphi(\text{北半球})=\{z\in\mathbf{C};|z|>1\}$, $\varphi(\text{赤道})=\{z\in\mathbf{C};|z|=1\}$, $\varphi(\text{南半球})=\{z\in\mathbf{C};|z|<1\}$, $\varphi(\text{南極})=0$ が成り立つ。

この $\varphi\colon S\setminus\{N\}\to\mathbf{C}$ の拡張 $\varphi\colon S\to\widehat{\mathbf{C}}=\mathbf{C}\cup\{\infty\}$ を

$$\varphi(N):=\infty$$

で定義する (拡張した写像を同じ文字 φ を用いて表している)。この φ はやはり全単射である。

こうして、$\widehat{\mathbf{C}}=\mathbf{C}\cup\{\infty\}$ と対応づけた球面 S のことを**リーマン球面** (**Riemann sphere**) と呼ぶ。

もともと $P\to N$ のとき、$\varphi(P)\to\infty$ であるから、$\widehat{\mathbf{C}}$ の位相を適切に定義すれば、φ は N で連続となると期待できる。

注意 4.5.1 実は、リーマン球面の定義は、本によって異なる。S は $\xi^2+\eta^2+(\zeta-1/2)^2=(1/2)^2$ であるとしたり、南極からの立体射影を用いたり (おっと教科書はこっちでしたか…)、色々なバリエーションがある。■

$\widehat{\mathbf{C}}$ の位相　良く知られているように、$a\in\mathbf{C}$ とするとき、$\{D(a;\varepsilon)\}_{\varepsilon>0}$ は a の基本近傍系になる。

定義 4.5.1 X を位相空間、$a\in X$ とする。X の部分集合族 $\mathcal{U}$ が、a の**基本近傍系**とは、次の 2 条件が成り立つことを言う。

(i) $\mathcal{U}$ の任意の元 U は a の近傍である (U は a を含むある開集合を含む)。

(ii) $(\forall V\colon V$ は a の近傍$)$ $\exists U\in\mathcal{U}$ s.t. $U\subset V$.

$\mathbf{C}$ に ∞ を加えた $\widehat{\mathbf{C}}=\mathbf{C}\cup\{\infty\}$ に位相空間の構造を与えるには、各点の基本近傍系を定めれば良い (これは一般論からの帰結)。ここでは次のようにする。

(a) $a\in\mathbf{C}$ に対しては、($\mathbf{C}$ のときと同様) $\{D(a;\varepsilon)\}_{\varepsilon>0}$ を a の基本近傍系とする。

(b) ∞ に対しては、$\{U_R\}_{R>0}$ を ∞ の基本近傍系とする。ただし $U_R:=\{z\in\mathbf{C};|z|>R\}\cup\{\infty\}$.

(部分集合族がある位相に関する a の基本近傍系となるための条件というのを書いておく必要がある。
)

すると、複素数 a に対して、$\widehat{\mathbf{C}}$ で a に収束というのは、これまでと同じ意味 ($\mathbf{C}$ で a に収束) で、$\widehat{\mathbf{C}}$ で ∞ に収束というのは、これまで $z\to\infty$ (無限大に発散) と言ってきたことに相当する。

例 4.27 $f(z)=\dfrac{1}{z}$ は、$z=0$ で連続である。実際、上の規約により $f(0)=\dfrac{1}{0}=\infty$,

$$\lim_{\substack{z\neq 0\\ z\to 0}}f(z)=\infty$$

であるから、$\lim_{z\to 0}f(z)=f(0)$ が成り立つ。同様に f は $z=\infty$ でも連続である。■

---

[20]念のため、少し書いておく。$x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$ であるから、$|z|^2=x^2+y^2=\dfrac{x_1^2+x_2^2}{(1-x_3)^2}=\dfrac{1-x_3^2}{(1-x_3)^2}=\dfrac{1+x_3}{1-x_3}$. これを x_3 について解いて、$x_3=\dfrac{|z|^2-1}{|z|^2+1}$. これから $1-x_3=\dfrac{2}{|z|^2+1}$ が導かれるので、$x_1=x(1-x_3)=\dfrac{z+\overline{z}}{2}\cdot\dfrac{2}{|z|^2+1}=\dfrac{z+\overline{z}}{|z|^2+1}$. 同様に $x_2=y(1-x_3)=\dfrac{z-\overline{z}}{2i}\cdot\dfrac{2}{|z|^2+1}=\dfrac{-i(z-\overline{z})}{|z|^2+1}$.

$\widehat{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ は、次式で定義される d を距離として距離空間になる:

$$d(z, z') := \left\|\varphi^{-1}(z) - \varphi^{-1}(z')\right\| = \frac{2|z - z'|}{\sqrt{(1 + |z|^2)\,(1 + |z'|^2)}}. \tag{4.28}$$

これは要するに、リーマン球面 S を $\mathbf{R}^3$ の部分距離空間として考えていることになる。この距離から定まる $\widehat{\mathbf{C}}$ の位相は、上の基本近傍系の定める位相と同じであることが分かる (証明は略する)。

4.5.2 無限遠点での座標

$z = \infty$ が、$f(z)$ の孤立特異点、正則点 (除去可能特異点)、極、(孤立) 真性特異点である、という定義は、$z = \dfrac{1}{w}$ で変数変換した $g(w) := f\left(\dfrac{1}{w}\right)$ の $w = 0$ での性質で定める (ただし留数については注意が必要である)。

復習: $c \in \mathbf{C}$ での留数解析

$c \in \mathbf{C}$ が f の**孤立特異点** (isolated singularity) であるとは、$\exists R > 0$ s.t. f は $\{z \in \mathbf{C}; 0 < |z-c| < R\}$ を定義域に含み、そこで正則であることをいう。このとき、$\exists \{a_n\}_{n\in\mathbf{Z}}$ s.t.

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-c)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n \quad (0 < |z-c| < R).$$

この右辺の級数を f の c における (c のまわりの) **Laurent 級数**、この級数を求めることを f を c において **Laurent 展開**する、という。
f の孤立特異点 c は以下の 3 つに分類できる。

(i) c が**除去可能特異点** (removable singulariry, 正則点, regular point) であるとは、$\forall n \in \mathbf{N}$ $a_{-n} = 0$ が成り立つことをいう。これは次の (a) や (b) と同値である。

  (a) $\exists \varepsilon \in (0, R)$ s.t. f は $0 < |z-c| < \varepsilon$ で有界

  (b) $\displaystyle\lim_{\substack{z\neq c\\ z\to c}} f(z)$ は $\mathbf{C}$ 内で極限を持つ (実は $\displaystyle\lim_{\substack{z\neq c\\ z\to c}} f(z) = a_0$)。

(ii) c が**極 (pole)** であるとは、$\exists k \in \mathbf{N}$ s.t. $a_{-k} \neq 0$ かつ $\forall n > k$ $a_{-n} = 0$ が成り立つことをいう (このとき k を極 c の**位数** (order), c は f の k 位の極と呼ぶ)。これは $\displaystyle\lim_{\substack{z\neq c\\ z\to c}} f(z) = \infty$ と同値である。

(iii) c が **(孤立) 真性特異点** (essential singularity) であるとは、$\forall k \in \mathbf{N}$, $\exists n > k$ s.t. $a_{-n} \neq 0$ が成り立つことをいう。これは $\displaystyle\lim_{\substack{z\neq c\\ z\to c}} f(z)$ が $\mathbf{C}$ 内で極限を持たず、かつ $\displaystyle\lim_{\substack{z\neq c\\ z\to c}} f(z) = \infty$ でもないことを意味する ($\widehat{\mathbf{C}}$ で極限を持たない、とも言い換えられる)。

f の c における**留数** (residue) $\mathrm{Res}(f; c)$ を

$$\mathrm{Res}(f; c) = \operatorname*{Res}_{z=c} f(z)\,dz := a_{-1}$$

で定義する。c のまわりを正の向きに一周する、区分的に滑らかな $D(c; R)$ 内の閉曲線 C に対して、

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i \,\mathrm{Res}(f; c)$$

が成り立つ。

定義 4.5.2 (∞ が孤立特異点、正則点、極、真性特異点とは) ∞ が f の**孤立特異点** (isolated singularity) であるとは、$\exists R\in(0,+\infty)$ s.t. $\{z\in\mathbf{C};|z|>R\}$ は f の定義域に含まれ、そこで f は正則であることをいう。このとき、

$$g(w):=f\left(\frac{1}{w}\right)\quad(0<|w|<\frac{1}{R})$$

とおくと、0 は g の孤立真性特異点となるが、この g を使って、f の孤立特異点 ∞ の分類をする。

(i) ∞ が f の**除去可能特異点** (removable singularity, **正則点**, regular point) であるとは、0 が g の正則点 (除去可能特異点) であることをいう。

(ii) ∞ が f の**極** (pole) であるとは、0 が g の極であることをいう。0 が g の k 位の極であるとき、∞ は f の k 位の極であるという。

(iii) ∞ が f の**真性特異点** (essential singularity) であるとは、0 が g の真性特異点であることをいう。

命題 4.5.1 (∞ における Laurent 展開に基づく孤立特異点の分類) ∞ が f の孤立真性特異点とするとき、$\exists R\in(0,+\infty)$ s.t.

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{z^n}+a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_nz^n\quad(R<|z|<+\infty)\tag{4.29}$$

が成り立つが、さらに以下の (1)〜(3) が成り立つ。

(1) ∞ が f の正則点 $\Leftrightarrow$ $\forall n\in\mathbf{N}$ $a_n=0$

(2) ∞ が f の極 $\Leftrightarrow$ $\exists k\in\mathbf{N}$ $a_k\neq 0$ かつ $\forall n>k$ $a_n=0$.

(3) ∞ が f の真性特異点 $\Leftrightarrow$ $\forall k\in\mathbf{N}$ $\exists n>k$ s.t. $a_n\neq 0$.

証明　f は円環領域 $A(0;R,+\infty)=\{z\in\mathbf{C};R<|z|<+\infty\}$ で正則であるので、円環領域内で正則な関数に関する Laurent 展開の定理を用いて、(4.29) を満たす $\{a_n\}_{n\in\mathbf{Z}}$ が存在することが分かる ($c=0$, $R_1=R$, $R_2=+\infty$ とする)。

$$g(w)=f\left(\frac{1}{w}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}a_{-n}w^n+a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{w^n}\quad(0<|w|<\frac{1}{R})$$

から後半は明らかである。■

(4.29) を f の ∞ のまわりの (∞ における) **Laurent 展開**、また $\sum_{n=1}^{\infty}a_nz^n$ をその**主要部**と呼ぶ。

命題 4.5.2 (孤立特異点 ∞ の lim による特徴づけ) ∞ が f の孤立特異点であるとき、次の (1),(2),(3) が成り立つ。

(1) ∞ が f の正則点 $\Leftrightarrow$ $\displaystyle\lim_{\substack{z\in\mathbf{C}\\z\to\infty}} f(z)$ は $\mathbf{C}$ 内で極限を持つ (実は a_0 に等しいことが分かる)

(2) ∞ が f の極 $\Leftrightarrow$ $\displaystyle\lim_{\substack{z\in\mathbf{C}\\z\to\infty}} f(z)=\infty.$

(3) ∞ が f の真性特異点 $\Leftrightarrow$ $\displaystyle\lim_{\substack{z\in\mathbf{C}\\z\to\infty}} f(z)$ は $\mathbf{C}$ 内で収束しないし、$=\infty$ でもない ($\widehat{\mathbf{C}}$ で収束しない)

証明 $z=\dfrac{1}{w}$ の関係があるとき、$z\to\infty \Leftrightarrow w\to 0$ であるから、有限な孤立特異点の特徴づけの定理 (Cor. 4.3.18, p.49) から明らかである。 ■

注意 4.5.2 後で **Riemann 面** (1 次元複素多様体) を学ぶと、$\widehat{\mathbf{C}}=\mathbf{C}\cup\{\infty\}$ が Riemann 面で、∞ の座標近傍 $U_R=\{z\in\widehat{\mathbf{C}}; R<|z|\le\infty\}$ における局所座標が $w=\dfrac{1}{z}$ であると理解できる。 ■

例 4.5.4 $f(z)=\dfrac{1}{z}$ は、$z=\infty$ を正則点 (除去可能特異点) とする。実際、

$$g(w):=f\left(\frac{1}{w}\right)=\frac{1}{\frac{1}{w}}=w$$

は $w=0$ を正則点に持つから。これは $\displaystyle\lim_{z\to\infty}\frac{1}{z}=0$ (有限の極限！) からも明らかである。 ■

例 4.5.5 $f(z)=z$ は、$z=\infty$ を極に持つ。実際、

$$g(w):=f\left(\frac{1}{w}\right)=\frac{1}{w}$$

は $w=0$ を極に持つから。これは $\displaystyle\lim_{z\to\infty} z=\infty$ からも明らかである。 ■

例 4.28 (これはもう少し事前の説明が必要ではないか？カットするか？) $f(z):=\dfrac{z-1}{z+1}$ とするとき、

$$f\left(\frac{1}{w}\right)=\frac{\frac{1}{w}-1}{\frac{1}{w}+1}=\frac{1-w}{1+w}$$

は w の関数として $w=0$ の近傍で正則であるから、f は $z=\infty$ の近傍で正則である (もちろん $\displaystyle\lim_{z\to\infty} f(z)=1$ であるから、と言っても良い)。また $f(\infty)=1.$ ゆえに $g(z):=\operatorname{Log}\dfrac{z-1}{z+1}$ も $z=\infty$ で正則で $g(\infty)=0.$ ■

例 4.29 $n\in\mathbf{N}$ とするとき、n 次多項式 $P(z)=a_0z^n+\cdots+a_n$ $(a_0\neq 0)$ について、

$$P\left(\frac{1}{w}\right)=\frac{a_0}{w^n}+\cdots+\frac{a_1}{w}+a_0,\quad a_0\neq 0$$

は $w=0$ は n 位の極に持つから、$z=\infty$ は P の n 位の極である。 ■

例 4.30 $z = \infty$ は、$\sin z, \exp z$ など、多項式でない整関数の (孤立) 真性特異点である。実際、$f\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ が整関数ならば、

$$\exists \{a_n\}_{n \geq 0} \quad \text{s.t.} \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (z \in \mathbf{C}).$$

多項式でないということは、$a_n \neq 0$ を満たす a_n が無限個あるということである。

$$f\left(\frac{1}{w}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{w^n} + a_0 \quad (w \in \mathbf{C})$$

は、$w \mapsto f\left(\dfrac{1}{w}\right)$ の $w = 0$ のまわりでのローラン展開であるから、$w = 0$ はこの関数の (孤立) 真性特異点である。ゆえに ∞ は f の (孤立) 真性特異点である。■

4.5.3 無限遠点での留数

C は ∞ の近傍 $U_R = \{z \in \widehat{\mathbf{C}}; R < |z| \leq +\infty\}$ 内の閉曲線で、∞ のまわりを正の向きに 1 周するものとする。z 平面、Riemann 球、w 平面を考えてみよう。

簡単のため、$r \in (R, +\infty)$ に対して、C が $z = re^{-i\theta}$ $(\theta \in [0, 2\pi])$ とするとき、Riemann 球では、C は北極を囲む小円に対応し、w 平面では、$\widetilde{C}$ $w = \dfrac{1}{r} e^{i\theta}$ $(\theta \in [0, 2\pi])$ に対応する。

このとき

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f; \infty)$$

が成り立つように $\operatorname{Res}(f;\infty)$ を定義したい。

$z = \dfrac{1}{w}$ と変数変関すると、$dz = -\dfrac{1}{w^2} dw$, C に対応するのは $\widetilde{C}$ であるから、

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{\widetilde{C}} f\left(\frac{1}{w}\right) \cdot (-\frac{1}{w^2}) dw = 2\pi i \operatorname{Res}\left(-\frac{1}{w^2} f\left(\frac{1}{w}\right); 0\right).$$

ゆえに

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(f;\infty) &= \operatorname{Res}\left(-\frac{1}{w^2} f\left(\frac{1}{w}\right); 0\right) \\
&= -\frac{1}{w^2} \sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n w^{-n} \text{ の } w^{-1} \text{ の係数} = -\sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n w^{-n-2} \text{ の } w^{-1} \text{ の係数} = -a_{-1}
\end{aligned}$$

と定めれば良いことが分かる。

定義 4.5.3 (∞ における留数) ∞ が f の孤立特異点であるとき、

$$\operatorname{Res}(f;\infty) = \operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)\,dz := \operatorname{Res}\left(-\frac{1}{w^2} f\left(\frac{1}{w}\right); 0\right) = -a_{-1}$$

とおき、f の ∞ における**留数** (residue) と呼ぶ。

注意 4.5.3 (危険な曲り角) $\operatorname{Res}(f;\infty)$ は、主要部の最初の項の係数 a_1 でもないし、$\operatorname{Res}(g;0)$ でもないことに注意しよう。無限遠点が正則点 ($\forall n \in \mathbf{N}$ に対して $a_n = 0$) であっても、$\operatorname{Res}(f;\infty) \neq 0$ $(-a_{-1} \neq 0)$ ということがありうる。■

注意 4.5.4 (留数を表す記号について) 我々が使っている教科書では、留数を $\mathrm{Res}(f;c)$ でなく $\operatorname*{Res}_{z=c} f(z)\,dz$ と書き、線積分や留数は、関数 f でなく、微分形式 $f(z)dz$ に対して定義される、と考えるのが自然であるから、としてある。しかし、この記号を採用してあるテキストはあまり多くない (一松先生の本 [8] には、留数は実は微分形式に対して定義されるものだと書いてあるが、記号はそうなっていない)。やはり書くのに少し面倒だからであろう。しかし、このあたりは、教科書の言い分も良く分かる。■

例 4.31 $f(z)=\dfrac{1}{z}$ は $z=\infty$ で正則である。

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)\,dz=\operatorname*{Res}_{w=0}\left(-\frac{1}{w^2}\cdot\frac{1}{\dfrac{1}{w}}\right)dw=-\operatorname*{Res}_{w=0}\frac{dw}{w}=-1.$$

もちろん、$f(z)=\displaystyle\sum_{n\in\mathbf{Z}}a_nz^n$ と見て、$-a_{-1}=-1$ として良い。■

例 4.32 (有理関数の ∞ での Laurent 展開の主要部と留数の求め方) 有理関数の ∞ での Laurent 展開の主要部と留数の求め方を例で説明しよう。

$$f(z)=\frac{z^4+10z^2+9}{z^2-z+2}.$$

まず、級数の割り算を実行して Laurent 展開の最初の数項を計算する、という方針で求めてみよう。

$$f(z)=z^2\cdot\frac{1+\dfrac{10}{z^2}+\dfrac{9}{z^4}}{1-\dfrac{1}{z}+\dfrac{2}{z^2}}$$

であるから、

$$g(w):=\frac{1+10w^2+9w^4}{1-w+2w^2}$$

とおくと、

$$f(z)=z^2g\left(\frac{1}{z}\right).$$

g は、$|w|<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ で正則であるから、

$$g(w)=\frac{1+10w^2+9w^4}{1-w+2w^2}=c_0+c_1w+c_2w^2+c_3w^3+c_4w^4+\cdots\quad(|w|<\frac{1}{\sqrt{2}})$$

と Taylor 展開が可能である。このとき

$$f(z)=z^2g\left(\frac{1}{z}\right)=z^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{z^n}=c_0z^2+c_1z+c_2+\frac{c_3}{z}+\frac{c_4}{z^2}+\cdots\quad(\sqrt{2}<|z|<\infty)$$

は f の $|z|>\sqrt{2}$ における Laurent 展開を与える (Laurent 展開の一意性による)。係数 $\{c_n\}$ を最初の何項か求めよう。

$$1+10w^2+9w^4=(1-w+2w^2)(c_0+c_1w+c_2w^2+\cdots)$$

から

$$\begin{aligned}
1&=c_0,\\
0&=-c_0+c_1,\\
10&=2c_0-c_1+c_2,\\
0&=2c_1-c_2+c_3,\\
9&=2c_2-c_3+c_4,\\
0&=2c_n-c_{n+1}+c_{n+2}\quad(n\geq 3).
\end{aligned}$$

これから

$$c_0 = 1, \quad c_1 = 1, \quad c_2 = 9, \quad c_3 = 7, \quad c_4 = -2, \quad c_5 = -16, \cdots$$

が得られるので (その気になれば一般項は容易に求められるが省略する)、

$$\begin{aligned}
g(w) &= 1 + w + 9w^2 + 7w^3 - 2w^4 - 16w^5 + \cdots \quad (|w| < \frac{1}{\sqrt{2}}),\\
f(z) &= z^2 \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{9}{z^2} + \frac{7}{z^3} - \frac{2}{z^4} - \frac{16}{z^5} + \cdots\right)\\
&= z^2 + z + 9 + \frac{7}{z} - \frac{2}{z^2} + \frac{16}{z^3} + \frac{c_6}{z^4} + \frac{c_7}{z^5} + \cdots \quad (|z| > \sqrt{2}).
\end{aligned}$$

主要部は $z^2 + z$, 留数は -7. これを知るためには、g を第 4 項まで展開すれば良かった。

もう一つ、最初に分子の多項式を分母の多項式で割り算して、多項式 + 真分数式としてから展開を考える方法がある。$z^4 + 10z^2 + 9$ を $z^2 - z + 2$ で割って、商 $z^2 + z + 9$, 余り $7z - 9$ であるから、

$$f(z) = \frac{(z^2 - z + 2)(z^2 + z + 9) + 7z - 9}{z^2 - z + 2} = z^2 + z + 9 + \frac{7z - 9}{z^2 - z + 2}. \tag{4.30}$$

ここで

$$\frac{7z - 9}{z^2 - z + 2} = \frac{z\left(7 - \dfrac{9}{z}\right)}{z^2\left(1 - \dfrac{1}{z} + \dfrac{2}{z^2}\right)} = \frac{1}{z} h\left(\frac{1}{z}\right), \quad h(w) := \frac{7 - w}{1 - w + 2w^2}.$$

h は $|w| < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ で正則だから、

$$h(w) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n w^n \quad (|w| < \frac{1}{\sqrt{2}})$$

と Taylor 展開できる。すると、

$$f(z) = z^2 + z + 9 + \frac{1}{z} h\left(\frac{1}{z}\right) = z^2 + z + 9 + \frac{d_0}{z} + \frac{d_1}{z^2} + \cdots \quad (\sqrt{2} < |z|)$$

これから、主要部は $z^2 + z$, 留数 $\mathrm{Res}(f; \infty)$ は $d_0 = h(0) = -7$. このように、主要部と留数を求めるだけならば、級数の割算の計算は実質的に必要ない。要するに

$$\mathrm{Res}(f; \infty) = d_0 = h(0) = \lim_{z \to \infty} \left(z \cdot \frac{7z - 9}{z^2 - z + 2}\right)$$

であるから、留数は (4.30) を眺めるだけで計算可能である。

振り返って、2 つの方法を比較してみると、この例の関数については、後者の方が簡単であると思うが (多項式の割り算だけで「ほぼ終了」)。しかし前者の方が楽という場合もあると思われる。また、前者の方法は有理関数以外の場合にも適用できる可能性があり、捨て切れない (授業では、つい計算の簡単な具体例をあげたくなるので、まるで「有理関数論」のようになってしまっているが、もっと一般の関数に適用可能な理論の解説が目標である。もちろん。)。 ■

4.6 有理関数

f が**有理関数** (**rational function**) であるとは、$f(z)$ が z の有理式であること、つまり

$$\exists P(z), Q(z) \in \mathbf{C}[z] \quad \text{s.t.} \quad f(z) = \frac{Q(z)}{P(z)} \quad (P(z) \neq 0 \text{ となる } z \in \mathbf{C})$$

が成り立つことをいうのであった。

有理関数と有理型関数

まず、有理関数とある意味では似ている、有理型関数を紹介する。

定義 4.6.1 (有理型関数) D を $\widehat{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ の領域とするとき、f が D で**有理型** (**meromorphic**) とは、極を除いて正則であることをいう。すなわち、$\exists E \subset D$ s.t. $D \setminus E$ は $\widehat{\mathbf{C}}$ の領域で、$f\colon D \setminus E \to \mathbf{C}$ は正則、$\forall c \in E$ に対して、c は f の極である。

極全体の集合 $E = \emptyset$ もありうる (除外していない) ので、「正則関数は有理型関数である」。

我々は極の取り扱いに十分慣れたので、それを例外的とはみなさないで仲間に入れてみよう、というニュアンス？

命題 4.6.1 有理関数は $\widehat{\mathbf{C}}$ で有理型である。

証明 $f(z) = \dfrac{Q(z)}{P(z)}$ ($P(z)$, $Q(z)$ は互いに素な複素係数の多項式) とする。$P(z)$ の零点を $c_1, \dots, c_N$ とするとき、f は $\mathbf{C} \setminus \{c_1, \dots, c_N\}$ で正則であり、f は c_j を極とする $(j = 1, 2, \dots, N)$。一方、$z = \infty$ について調べよう。

$$g(w) := f\left(\frac{1}{w}\right)$$

とおくとき、明らかに

$$g(w) = \frac{w\,\text{の多項式}}{w\,\text{の多項式}}$$

と書き直すことが出来る。これは $w = 0$ を極または除去可能特異点とする。ゆえに $f(z)$ は $z = \infty$ を極または正則点とする。■

注意 4.6.1 E の各点は孤立点である。実際、$c \in E$ とするとき、c は f の極であり、特に孤立特異点であるから、$\exists R > 0$ s.t. f は $\{z \in \mathbf{C}; 0 < |z - c| < R\}$ で定義されていて正則であるから、$D(c; R) \cap E = \{c\}$. ■

有理型関数でない関数としては、真性特異点を持つ関数、分岐点を持つ関数がある。真性特異点は、孤立特異点でない場合にも定義することを注意しておく。

定義 4.6.2 (一般の真性特異点の定義) $c \in \mathbf{C}$, $R > 0$, f は $A(c; 0, R) = \{z \in \mathbf{C}; 0 < |z - c| < R\}$ で有理型とする。c が f の**真性特異点**であるとは、f は $D(c; R) = \{z \in \mathbf{C}; |z - c| < R\}$ では有理型でないことをいう。

c が f の孤立特異点であるとき、真性特異点の二つの定義の条件は同値である。実際、c が f の孤立特異点 ($\exists R > 0$ s.t. f は $A(c; 0, R) = \{z \in \mathbf{C}; 0 < |z - c| < R\}$ で正則) という前提のもとで、(a) (除去可能特異点), (b) (極) のいずれの場合も、f は $D(c; \varepsilon)$ で有理型であり、一方 (c) (孤立真性特異点) の場合、f は $D(c; \varepsilon)$ で有理型とはならない。

c が f の真性特異点であるとは、要するに、c は f の除去可能特異点や極ではないということである。

定理 4.6.1 (Picard) f は $0 < |z - c| < R$ で有理型で、c は f の真性特異点とするとき、

$$0 < |z - c| < R \quad \text{かつ} \quad f(z) \neq \omega$$

であるような $\omega \in \widehat{\mathbf{C}}$ は存在するとしても高々 2 つである。

$\widehat{\mathbf{C}} \setminus f(A(c; 0, R))$ の要素数は 2 以下である。

例 4.6.1 $f(z)=\exp\dfrac{1}{z}$ は 0 を真性特異点に持つ。$\widehat{\mathbf{C}}\setminus f(A(c;0,R))=\{0,\infty\}$

4.6.1 (有理関数の) 部分分数分解

(教科書にこういう内容が用意されているのは、Mittag-Leffler の定理や、を意識しているのだろうか?)

有理関数の**部分分数分解** (**partial fraction decomposition**) は、微分積分の授業で、有理関数の不定積分を計算するときにおなじみであろう[21]。ここでは複素関数論の観点から見直してみる。

$$f(z)=\frac{Q(z)}{P(z)},\quad (P(z),\,Q(z)\text{ は互いに素な複素係数多項式})$$

とする。$f(z)$ の $\mathbf{C}$ 内の極は $P(z)$ の零点であるので、有限個である。それを $c_1,\dots,c_r$, さらに、各 c_j における主要部を

$$f_j(z)=\frac{a^{(j)}_{-k_j}}{(z-c_j)^{k_j}}+\cdots+\frac{a^{(j)}_{-1}}{z-c_j}$$

とおく。

$R:=\max\{|c_1|,\cdots,|c_r|\}+1$ とおくと、f は $R<|z|<\infty$ で正則であるから、$\exists\{a_n\}_{n\in\mathbf{Z}}$ s.t.

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{z^n}+a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_nz^n\quad (R<|z|<\infty).$$

これを f の ∞ のまわりの Laurent 展開、また正冪の項を集めた

$$f_\infty(z):=\sum_{n=1}^{\infty}a_nz^n.$$

を、f の ∞ のまわりの Laurent 展開の**主要部** と呼ぶのであった。

$n:=\deg Q(z)$, $m:=\deg P(z)$, $N:=n-m$ とおくとき、

$$\lim_{z\to\infty}\frac{f(z)}{z^N}=a_N\neq 0,\quad \forall n>N\quad a_n=0$$

が成り立つことは容易に分かる。特に

$$f_\infty(z)=\sum_{n=1}^{N}a_nz^n\quad (N\le 0\text{ のとき、}\sum_{n=1}^{N}=0\text{ と考える}).$$

さて、

$$g(z):=f(z)-\sum_{j=1}^{r}f_j(z)-f_\infty(z)\quad (z\in\mathbf{C}\setminus\{c_j\}_{j=1}^{r})$$

とおくと、g は $\widehat{\mathbf{C}}$ で極を持たない。$\mathbf{C}$ で至るところ正則である。

また g は $\mathbf{C}$ で有界である。実際、$\displaystyle\lim_{z\to\infty}g(z)=a_0$ は明らかであるから、

$$\exists R'>0,(\forall z\in\mathbf{C}:|z|\ge R')\quad |g(z)|\le|a_0|+1$$

が成り立ち、$\forall z\in\mathbf{C}$ に対して、

$$|g(z)|\le\max\{M,|a_0|+1\},\quad M:=\max_{|z|\le R'}|g(z)|.$$

[21] そのときは、実関数の範囲で分解するように、判別式が負であるような 2 次式が現れたりしたが、複素関数の場合は、任意の多項式は 1 次式の積に分解されるため、もっと簡単になる。

ゆえに Liouville の定理から、g は定数関数である:

$$\exists C \in \mathbf{C} \quad \forall z \in \mathbf{C} \quad g(z) = C.$$

$z \to \infty$ の極限を考えると、$C = a_0$ である。ゆえに

$$f(z) = f_\infty(z) + \sum_{j=1}^{N} f_j(z) + a_0.$$

これは実は $f(z)$ の**部分分数分解**に他ならない j。そのことを理解するために「部分分数分解の一意性」を示そう。

部分分数分解の一意性　部分分数分解については、次のように学んだ人が多いと思われる。任意の有理式 $f(z)$ が与えられたとき、ある手順に基づいて計算すると、次の ($\sharp$) の形に変形できて、その結果を $f(z)$ の部分分数分解と呼ぶ。計算手順を別にして、「ある形」の部分に焦点を合わせると、次の定理が得られていることになる。

> 任意の有理式 $f(z)$ に対して、
>
> $$\exists N \in \mathbf{N}, \quad \exists \{a_n\}_{n=0}^{N}, \quad \exists r \in \mathbf{N} \cup \{0\}, \quad \exists \{c_j\}_{j=1}^{r}, \quad \exists \{m_j\}_{j=1}^{r}, \quad \exists \{a_{jk}\}_{\substack{1 \le j \le r \\ 1 \le k \le m_j}}$$
>
> s.t.
>
> $$(\sharp) \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n + \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=1}^{m_j} \frac{a_{jk}}{(z - c_j)^k} \quad (z \in \mathbf{C} \setminus \{c_j\}_{j=1}^{r}), \quad a_N \ne 0, \quad a_{jm_j} \ne 0.$$

ここで存在を主張している N, $\{a_n\}$, r, $\{c_j\}$, $\{m_j\}$, $\{a_{jk}\}$ には実は一意性がある。その証明のアイディアを以下説明しよう。

多項式の係数の一意性は高校以来知っているであろう。すなわち、

$$\sum_{n=0}^{N} a_n z^n = \sum_{n=0}^{N} b_n z^n \quad (z \in \mathbf{C}), \qquad \Longrightarrow \quad (a_0, a_1, \ldots, a_N) = (b_0, b_1, \ldots, b_N).$$

この事実は色々な証明の仕方があるが、ここでは極限を用いよう。まず、仮定の式を移項した

$$\sum_{n=1}^{N} (a_n - b_n) z^n = b_0 - a_0 \quad (z \in \mathbf{C})$$

で $z \to \infty$ として、左辺の極限が有限であるために $a_n - b_n = 0$ $(n = 1, 2, \ldots, N)$. すると左辺は 0 になるので、右辺 $= b_0 - a_0 = 0$. 結局 $(a_0, a_1, \ldots, a_N) = (b_0, b_1, \ldots, b_N)$.

任意の $a_1, \ldots, a_m$ について

$$\lim_{z \to \infty} \sum_{k=1}^{m} \frac{a_k}{(z - c)^k} = 0$$

が成り立つことに注意すると、部分分数分解の多項式部分 $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} a_n z^n$ の一意性はまったく同じ論法で導くことが出来る。

さらに、(i) $a_m \ne 0$ であれば、

$$\lim_{z \to c} \sum_{k=1}^{m} \frac{a_k}{(z - c)^k} = \infty,$$

(ii) $c \neq c'$ であれば、

$$\lim_{z \to c'} \sum_{k=1}^{m} \frac{a_k}{(z-c)^k} = \sum_{k=1}^{m} \frac{a_k}{(c'-c)^k} \quad (\text{特に有限}).$$

この (i), (ii) 二つの事実を用いると、多項式部分以外の部分についても一意性が導かれる。

問

$$f(z) := \frac{z^4 + 3z - 1}{(z-1)^2(z+2)}$$

とするとき、以下の問に答えよ。

(1) $\operatorname{Res}(f; -2)$ を求めよ。

(2) $\operatorname{Res}(f; 1)$ を求めよ。

(3) f の $z = 1$ でのローラン展開の主部を求めよ。

(4) f の $z = \infty$ でのローラン展開の主部を求めよ。

(5) f の部分分数分解を求めよ。

例 4.33

$$f(z) := \frac{z^4 + 3z - 1}{(z-1)^2(z+2)}.$$

この関数 f のすべての極における Laurent 展開の主部を求めることで、$f(z)$ の部分分数分解を求めてみよう (実際にこの $f(z)$ の部分分数分解を求めるには、微分積分で学ぶアルゴリズムの方が簡単であるので、以下の計算はあくまでも、上の議論の確認をするためのものである)。■

命題 4.6.2 $\widehat{\mathbf{C}}$ で有理型な関数は有理関数である。

(実は証明の要は上の議論と同じである。)

証明　f が $\widehat{\mathbf{C}}$ で有理型とする。定義から、f のすべての極の集合を $E \subset \widehat{\mathbf{C}}$ とするとき、$\widehat{\mathbf{C}} \setminus E$ で f は正則である。

実は E は有限集合である。実際、もし無限集合ならば、$\exists \{c_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ s.t. $\forall n \in \mathbf{N}$ $c_n \in E$, かつ $\forall j \neq k$ $c_j \neq c_k$. $\widehat{\mathbf{C}}$ は球面に同相であるからコンパクトで、$\{c_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ は収束部分列を持つ。その極限を c とする。c が極であっても (i.e. $c \in E$)、c が極でなくても (i.e. $c \notin E$, c は f の正則点)、$\exists R > 0$ s.t. f は $0 < |z - c| < R$ で正則となる。これは $\displaystyle\lim_{n \to \infty} c_n = c$ と矛盾する[22]。

E が有限集合であるので、各点 c_j ($j = 1, 2, \ldots, N$) における Laurent 展開の主部 f_j を集めて、$\displaystyle f - \sum_{j=1}^{N} f_j$ を考えると、上の議論と同様に定数関数となる。その定数を C とおくと

$$f(z) = \sum_{j=1}^{N} f_j(z) + C \quad (z \in \widehat{\mathbf{C}}).$$

Laurent 展開の主部 f_j はいずれも z の有理関数であるから、f も有理関数である。■

$\mathbf{C}$ においては、収束部分列を持たない点列が存在する。それは実は必ず有界でない点列である (Bolzano-Wierstrass の定理を思いだそう)。そのような点列は、∞ に発散するような部分列を持つが、$\widehat{\mathbf{C}}$ においては、それは ∞ に収束することに注意しよう。

[22]念のために書いておくと、$c_n \to c$ であることから、$\exists N \in \mathbf{N}$ s.t. $\forall n \geq N$ $|c_n - c| < R$. c_N と c_{N+1} は相異なり、ともに E の点であるから、$D(c; R)$ 内に 2 つの E の点があることになる。

4.6.2 有理関数の留数

$$f(z)=\frac{Q(z)}{P(z)},\quad (P(z),\,Q(z)\text{ は互いに素な複素係数多項式})$$

とする。$f(z)$ の $\mathbf{C}$ 内の極を $c_1,\dots,c_N$ とする ($N=0$ もあり得る)。$R>0$ を $\{c_1,\cdots,c_n\}\subset D(0;R)$ を満たすように十分大きく取る (例えば、$N\ge 1$ の場合は $R:=\max\{|c_1|,\dots,|c_N|\}+1$ とおけば良い)。

このとき、留数定理より、

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R}f(z)\,dz=\sum_{j=1}^{N}\mathrm{Res}(f;c_j).$$

一方、∞ における留数の定義によって、左辺は $-\mathrm{Res}(f;\infty)$ である。従って次の命題を得る。

命題 4.34 (有理関数のリーマン球面内のすべての極の留数の和は 0) 有理関数 f の $\widehat{\mathbf{C}}=\mathbf{C}\cup\{\infty\}$ にあるすべての極の留数の和は 0 である:

$$\sum_{\alpha=c_0,c_1,\dots,c_N,\infty}\mathrm{Res}(f;\alpha)=0.$$

この命題は一見当たり前 (trivial) であるような気がするかもしれないが、意外とそうではない。この形にまとめておかないと、なかなか気が付かない事実である。

例 4.35 a,b,c,d は互いに相異なる 4 つの複素数とするとき、

$$\begin{aligned}\frac{bcd}{(a-b)(a-c)(a-d)}&+\frac{acd}{(b-a)(b-c)(b-d)}\\&+\frac{abd}{(c-a)(c-b)(c-d)}+\frac{abc}{(d-a)(d-b)(d-c)}=-1\end{aligned}\tag{4.31}$$

を示せ。

(解) a,b,c,d のいずれも 0 でないとして示す。

$$f(z):=\frac{abcd}{(z-a)(z-b)(z-c)(z-d)}\cdot\frac{1}{z}$$

とおくと、f の極は $a,b,c,d,0$ である。例えば a は、明らかに f の 1 位の極で、

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}(f;a)&=\lim_{z\to a}(z-a)f(z)=\lim_{z\to a}\frac{abcd}{(z-b)(z-c)(z-d)}\cdot\frac{1}{z}=\frac{abcd}{(a-b)(a-c)(a-d)}\cdot\frac{1}{a}\\&=\frac{bcd}{(a-b)(a-c)(a-d)}.\end{aligned}$$

同様にして

$$\mathrm{Res}(f;b)=\frac{acd}{(b-a)(b-c)(b-d)},\quad \mathrm{Res}(f;c)=\frac{abd}{(c-a)(c-b)(c-d)},\quad \mathrm{Res}(f;d)=\frac{abc}{(d-a)(d-b)(d-c)}.$$

さらに

$$\mathrm{Res}(f;0)=\lim_{z\to 0}zf(z)=\lim_{z\to 0}\frac{abcd}{(z-a)(z-b)(z-c)(z-d)}=\frac{abcd}{(-a)(-b)(-c)(-d)}=1.$$

$f(z)$ は z の 5 次多項式の逆数であるから、$\displaystyle\lim_{z\to\infty}z^4f(z)=0$ であるので、f の ∞ のまわりの Laurent 展開を $f(z)=\displaystyle\sum_{n\in\mathbf{Z}}a_nz^n$ とするとき、

$$(\forall n\in\mathbf{Z}:n\ge -4)\quad a_n=0.$$

特に

$$\mathrm{Res}(f;\infty) = -a_{-1} = 0.$$

上の命題から

$$\mathrm{Res}(f;a) + \mathrm{Res}(f;b) + \mathrm{Res}(f;c) + \mathrm{Res}(f;d) + \mathrm{Res}(f;\infty) + \mathrm{Res}(f;0) = 0$$

であるから、

$$\begin{aligned}(4.31)\ \text{の左辺} &= \mathrm{Res}(f;a) + \mathrm{Res}(f;b) + \mathrm{Res}(f;c) + \mathrm{Res}(f;d) \\ &= -\mathrm{Res}(f;\infty) - \mathrm{Res}(f;0) = -0 - 1 = -1 = (4.31)\ \text{の右辺}.\blacksquare\end{aligned}$$

次の命題は、実質的に上の例の中で証明して用いた (後のために書き抜いておく)。

Proposition 4.6.2 ∞ が f の孤立特異点で、$\lim_{z\to\infty} zf(z)$ が有限の極限値 A を持てば、$A = -\mathrm{Res}(f;\infty)$. 特に $\lim_{z\to\infty} zf(z) = 0$ ならば、$\mathrm{Res}(f;\infty) = 0$.

Remark 4.6.1 有限の複素数 c が f の正則点であるとき、$\mathrm{Res}(f;c) = 0$ であるが、f が ∞ の近傍で正則であっても、$\mathrm{Res}(f;\infty) = 0$ であるとは限らない。例えば $f(z) = \dfrac{1}{z}$ のとき、$\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$ であるから、f は ∞ で正則であるが、$\mathrm{Res}(f;\infty) = -1 \neq 0$. 上の Proposition は、$\mathrm{Res}(f;\infty) = 0$ のための簡単な十分条件を与えている点で価値がある。 ■

4.6.3 1 次分数変換

定義

定義 4.6.3 $ad - bc \neq 0$ を満たす a, b, c, d を用いて

(i) ($c \neq 0$ の場合)

$$\varphi(z) := \begin{cases} \infty & (z = -d/c) \\ \dfrac{a}{c} & (z = \infty) \\ \dfrac{az+b}{cz+d} & (z \neq -d/c, \infty) \end{cases}$$

(ii) ($c = 0$ の場合)

$$\varphi(z) := \begin{cases} \infty & (z = \infty) \\ \dfrac{az+b}{cz+d} & (z \neq \infty) \end{cases}$$

で定められる $\varphi\colon \widehat{\mathbf{C}} \to \widehat{\mathbf{C}}$ を **1 次分数変換** (**linear fractional transformation**) と呼ぶ。

∞ での値や、$-d/c$ での値は、極限として定義されていると考えるのが覚えやすい。