2010年度 関数論2・同演習 試験問題 (担当 桂田祐史)

2011年1月31日 (月) 14:30〜16:30 施行,
ノート等持ち込み禁止, 解答用紙 (2枚両面解答可) のみ提出

次の **1**〜**6** の 6 問に解答せよ。**5A**, **5B** はどちらかを選択せよ。

1. 複素関数が Laurent 展開可能であることを結論とする定理 (授業で紹介した) を一つ書け。(展開が成り立つ変数の範囲、Laurent 展開の係数などについて言及すること。)

2. 以下の各用語について、(a) 定義, (b) 例 を記せ (ただし定義域は $\mathbf{C}$ 内の領域とする)。
(1) 複素関数の極とその位数　(2) 複素関数の零点とその位数　(3) 複素関数の孤立特異点における留数

3. $c \in \mathbf{C}$, $R > 0$, $\Omega := \{z \in \mathbf{C}; |z - c| < R\}$, $P\colon \Omega \to \mathbf{C}$ と $Q\colon \Omega \to \mathbf{C}$ は正則とする。

(1) $\forall n \in \mathbf{N}\ P^{(n)}(c) = 0$ ならば、P は定数関数であることを示せ。

(2) $k \in \mathbf{N}$, $P(c) = P'(c) = \cdots = P^{(k-1)}(c) = 0$, $P^{(k)}(c) \neq 0$ が成り立つならば、Ω で正則な関数 P_1 で、$P(z) = (z-c)^k P_1(z)$ を満たすものが存在することを示せ。また、このとき $P_1(c)$ の値を P, k, c で表せ。

(3) P が (2) の仮定を満たすとき、$f := \dfrac{Q}{P}$ は c を高々 k 位の極に持つことを示せ (高々 k 位の極とは、$\exists k' \in \{1, 2, \ldots, k\}$ s.t. c は f の k' 位の極であるか、または c は f の除去可能特異点であることを言う)。

4. $f(z) := \dfrac{5z^5 - 14z^4 + 9z^3 - 5z^2 + 11z - 8}{z(z-1)^2(z-2)}$ について、以下の問に答えよ。
(1) 0 のまわりの Laurent 展開を求めよ。収束範囲も書くこと。(2) $2 < |z| < \infty$ における Laurent 展開を求めよ。(3) $\operatorname{Res}(f; \infty)$ を求めよ。

5A. $P(z)$ と $Q(z)$ は多項式で、(i) $\deg P(z) \geq \deg Q(z) + 2$, (ii) $\forall x \in \mathbf{R}\ P(x) \neq 0$ を満たすとする。このとき、$f(z) := \dfrac{Q(z)}{P(z)}$ とおくと、次の (1), (2) が成り立つことを示せ。

(1) 正数 R に対して、曲線 C_R を $z = Re^{i\theta}$ $(\theta \in [0, \pi])$ で定めるとき、$\displaystyle\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)\,dz = 0.$

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} c > 0} \operatorname{Res}(f; c).$

5B. (1) $\pi \cot \pi z = \pi \dfrac{\cos \pi z}{\sin \pi z}$ の極とその位数、留数を求めよ。(2) $c \in \mathbf{C}$ が f の 1 位の極、g は c の近傍で正則とするとき、$\operatorname{Res}(fg; c) = g(c) \operatorname{Res}(f; c)$ を示せ。(3) $\displaystyle\int_{|z|=5/2} z^2 \pi \cot \pi z\, dz$ を求めよ。

6. 次の定積分の値を求めよ。(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^6 + 1}\,dx$　(2) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + a^2)^3}\,dx$, $a > 0$

1 の採点基準

- (6 点) f が円環領域 $R_1 < |z-c| < R_2$ または除外近傍 $0 < |z-c| < R$ で正則という仮定
- (8 点) 展開式
  $f(z) =$ が抜けていても 4 点与える、収束範囲がなくても 4 点与える。
- (6 点) 係数を積分で表す式

2 の採点基準

- ダブルスタンダード。部分分数分解出来たら 10 点とする。そうでなければ
- (a) 4 点, (b) 3 点.
  Laurent 展開の式で $a_{-k} \neq 0$ があれば 2 点. 「Laurent 展開の主部 $\neq 0$ が有限項」で 4 点. 例については、f と c が正しく書いてあれば 3 点。一方だけは NG.
- (a) 3 点, (b) 3 点.
- (a) 4 点, (b) 3 点.

教科書では 0 のまわりの Laurent 展開が書いてあって、それを覚えているせいで $\sum a_n z^n$ とした人がいた。自己責任ではあるけれど、教科書もちょっといただけない。

3 の採点基準

(1) 7 点.

(2) 6 点。$P_1(c) = P^{(k)}(c)/k!$ だけでも 3 点。

(3) 7 点

4 の採点基準

ダブルスタンダード。

$$f(z)=\frac{8z^3-25z^2+23z-8}{z(z-1)^2(z-2)}+5z+6=\frac{1}{z-2}+\frac{2}{(z-1)^2}+\frac{3}{z-1}+\frac{4}{z}+5z+6.$$

(1) は、

$$f(z)=\frac{4}{z}+\frac{9}{2}+\frac{23}{4}z+\sum_{n=2}^{\infty}\left(2n-1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n \quad (0<|z|<1).$$

(2) は、

$$f(z)=\frac{8}{z}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n+1+2^{n-1}}{z^n}+5z+6 \quad (2<|z|<\infty).$$

(3) は $\operatorname{Res}(f;\infty)=-8$.
$0<|z|<1$ で

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{z},\quad \frac{1}{z-1}=-\sum_{n=0}^{\infty}z^n,\quad \frac{1}{(z-1)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n,\quad \frac{1}{z-2}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}.$$

$2<|z|<\infty$ で

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{z},\quad \frac{1}{z-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n},\quad \frac{1}{(z-1)^2}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{z^n},\quad \frac{1}{z-2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{z^n}.$$

この 8 つ、それぞれ 2 点。最後の $\operatorname{Res}(f;\infty)=-8$ は 4 点。
あるいは部分分数分解きちんと出来たら、それで 10 点。

5A の採点基準

(1) 10 点。$|f(z)|\le\dfrac{M}{R^2}$ に 3 点. $\displaystyle\int_{C_R}f(z)\,dz=\int_0^{\pi}f\left(Re^{i\theta}\right)\cdot iRe^{i\theta}d\theta$ に 3 点. $\displaystyle\left|\int_{C_R}f(z)\,dz\right|\le\frac{M}{R}$ に 4 点。

(2) 10 点。「留数定理」に 4 点。ちゃんと閉曲線を指定したら 4 点。

5B の採点基準

- (1) は 10 点
  $n\in\mathbf{Z}$ が極であることに 4 点 (根拠書いてなければ 2 点)、1 位であることに 3 点 (根拠書いてなければ 2 点)、$\operatorname{Res}(f;n)=1$ に 3 点。0 や 1 だけしかやってなかったら半分 (例えば位数 1 までだったら、$[(4+3)/2]=3$)。
- (2) は 5 点
- (3) は 5 点

6 の採点基準

(1) $z^6+1=0$ の根が得られたら 5 点。最後まで行って 5 点。根が $\pm i$ しか見つからない… 結果は $\dfrac{\pi}{3}$ というのは、解くこと以外出来ているとして 5 点やる (あまりやりたくないが)。
$= 2\pi i\left[\mathrm{Res}\left(f;\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right)+\mathrm{Res}\left(f;\dfrac{-\sqrt{3}+i}{2}\right)+\mathrm{Res}\,(f;i)\right]$ とあれば 7 点。

(2) 10 点
こちらは極を探すのは楽だが、位数 3 なので計算が面倒、そこに点をやる。
$\dfrac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,2\pi i\,\mathrm{Res}\,\big(f(z)e^{iz};ai\big)$ で 6 点 (1/2, e^{iz}, ai)。$\dfrac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left\{2\pi i\lim_{z\to ai}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{d}{dz}\right)^2\big[(z-ai)^3 f(z)e^{iz}\big]\right\}$ で 8 点。

計算ミスは 2 点くらい引く。

(略解 — 誤植もたくさんあるものと思われます。)

1. $c \in \mathbf{C}$, $0 \le R_1 < R_2 \le \infty$, $f\colon A(c;R_1,R_2) := \{z \in \mathbf{C}; R_1 < |z-c| < R_2\} \to \mathbf{C}$ が正則ならば、$\exists \{a_n\}_{n\in\mathbf{Z}}$ s.t.

$$(\star) \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-c)^n} \quad (z \in A(c;R_1,R_2)).$$

これを f の $A(c;R_1,R_2)$ における Laurent 展開と呼ぶ。($\star$) の級数は $A(c;R_1,R_2)$ で広義一様絶対収束する。また ($\star$) を満たす $\{a_n\}$ は一意的に定まり、

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-c|=r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-c)^{n+1}} d\zeta \quad (n \in \mathbf{Z}).$$

ここで r は $R_1 < r < R_2$ を満たす任意の数である。

関数論２の大部分の議論 (孤立特異点の話) の基礎になる定理で、授業中に何度も板書した。この問題が白紙とか、留数定理を書いているような人は、勉強の仕方を間違えている。

こういう問題は最初のうちは次のように勉強するのだろう。

1. 大事な用語、定理をピックアップする。「良く出て来る」が一つの基準。(本当は全体像を自分で描いて、どこが大事か分かるようになるべきだが、それはレベルが一段高いかも。まずは「良く出て来る」が大事の基準。桂田の授業の場合、基礎的なことを後になっても口に出したり書いたりするので、それで大事なところが押さえられるはず。上の段階になると、基本は分かっていて当たり前で、表面上は現れなくなったりするので、ピックアップも難しくなる。)

2. ピックアップした用語の定義、定理をノートやテキストから抜き出す。自分で意味が分かるような形で書く。場合によっては、専用のノートやカードを作るのかも。誰かにチェックしてもらうと良い。そしてそれを見ないで書けるか自己点検。定義、定理を抜き出した資料を先生に作って欲しいと考えたり、誰かが作ったものをコピーしてそれを読んで覚えよう、とか考えるのは、まだ勉強の仕方を誤解している。それを自分でするのが勉強で、それは時間がかかるようだが、それをすると、実はその後が簡単である。若い頭だったら、もう頭の中に入ってしまっているかもしれない。

2.

(1) (a) c が複素関数 f の極であるとは、$\exists R > 0$ s.t. f は $0 < |z-c| < R$ で正則で、その Laurent 展開

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-c)^n} \quad (0 < |z-c| < R)$$

において、

$$\exists k \in \mathbf{N} \quad \text{s.t.} \quad a_{-k} \ne 0 \quad \text{and} \quad (\forall n \in \mathbf{N} : n > k) \quad a_{-n} = 0$$

が成り立つことを言う (つまり f の c における Laurent 展開の主部は 0 ではないが、0 でない項は有限個しかない、ということ)。k のことを f の極 c の位数と呼ぶ。(b) $f(z) = \dfrac{1}{z}$ $(z \in \mathbf{C} \setminus \{0\})$, $c = 0$ とするとき、c は f の 1 位の極である。

(2) (a) c が正則関数 f の零点であるとは、$f(c) = 0$ を満たすことを言う。

$$f(c) = f'(c) = \cdots = f^{(k-1)}(c) = 0, \quad f^{(k)}(c) \ne 0$$

を満たす $k \in \mathbf{N}$ が存在するとき、k を f の零点 c の位数と呼ぶ (注: 定数関数 0 は位数を持たない。あえて言えば無限大？)。(b) $f(z) = \sin z$, $c = 0$ とするとき、c は f の 1 位の零点である。

(3) (a) c が f の孤立特異点 ($\Leftrightarrow \exists R > 0$ s.t. f は $0 < |z-c| < R$ で正則) であるとき、f の c のまわりの Laurent 展開を

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-c)^n} \quad (0 < |z-c| < R)$$

する。このとき、a_{-1} を f の孤立特異点 c における留数と呼ぶ。(b) $f(z) = 1 + \dfrac{2}{z} + \dfrac{3}{z^2}$, $c = 0$ とするとき、f の c における留数は 2 である。

3. 仮定から

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P^{(n)}(c)}{n!}(z-c)^n \quad (z \in \Omega).$$

(1) $P^{(n)}(c) = 0$ $(n \in \mathbf{N})$ ならば、$n = 0$ の項だけ残って、$P(z) = P(c)$ $(z \in \Omega)$. (2) $P^{(n)}(c) = 0$ $(n = 0, 1, \dots, k-1)$ ならば、$\forall z \in \Omega$ に対して、

$$P(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{P^{(n)}(c)}{n!}(z-c)^n = (z-c)^k \sum_{n=k}^{\infty} \frac{P^{(n)}(c)}{n!}(z-c)^{n-k} = (z-c)^k \sum_{m=0}^{\infty} \frac{P^{(m+k)}(c)}{(m+k)!}(z-c)^m.$$

ここで

$$P_1(z) := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{P^{(m+k)}(c)}{(m+k)!}(z-c)^m$$

とおくと、右辺が $z \in \Omega$ で収束する冪級数であることから、P_1 は Ω における正則関数で、$z \in \Omega$ で、

$$P(z) = (z-c)^k P_1(z).$$

また $P_1(c) = P^{(k)}(c)/k!$.
(3) (2) の結果を用いる。$Q_1(z) := Q(z)/P_1(z)$ とおくと、これは c の近傍で正則な関数である ($P_1(c) = P^{(k)}(c)/k! \neq 0$ に注意)。Q_1 の c の周りの Taylor 展開を

$$Q_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-c)^n \quad (|z-c| < R')$$

とおくと、

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{Q(z)}{P(z)} = \frac{Q(z)}{(z-c)^k P_1(z)} = \frac{Q_1(z)}{(z-c)^k} = \frac{1}{(z-c)^k} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-c)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-c)^{n-k} \\ &= \sum_{n=-k}^{\infty} b_{m+k} (z-c)^m = \frac{b_0}{(z-c)^k} + \cdots + \frac{b_{k-1}}{z-c} + \sum_{n=0}^{\infty} b_{n+k}(z-c)^n \quad (|z-c| < R'). \end{aligned}$$

ゆえに c は f の高々 k 位の極である。

4. $5z^5 - 14z^4 + 9z^3 - 5z^2 + 11z - 8$ を $z(z-1)^2(z-2) = z^4 - 4z^3 + 5z^2 - 2z$ で割ると、商 $5z + 6$, 余り $8z^3 - 25z^2 + 23z - 8$ であるから、

$$f(z) = \frac{8z^3 - 25z^2 + 23z - 8}{z(z-1)^2(z-2)} + 5z + 6.$$

ある定数 A, B, C, D が存在して、

$$\frac{8z^3 - 25z^2 + 23z - 8}{z(z-1)^2(z-2)} = \frac{A}{z-2} + \frac{B}{(z-1)^2} + \frac{C}{z-1} + \frac{D}{z}$$

となるはずである。容易に $A=1,\ B=2,\ C=3,\ D=4$ が得られる。ゆえに $f(z)$ の部分分数分解は

$$f(z)=\frac{1}{z-2}+\frac{2}{(z-1)^2}+\frac{3}{z-1}+\frac{4}{z}+5z+6.$$

(1) $0<|z|<1$ で

$$\frac{3}{z-1}=\frac{-3}{1-z}=-3\sum_{n=0}^{\infty}z^n,$$
$$\frac{2}{(z-1)^2}=-2\left(\frac{1}{z-1}\right)'=\left(\frac{2}{1-z}\right)'=2\sum_{n=0}^{\infty}nz^{n-1}=2\sum_{m=0}^{\infty}(m+1)z^m=2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n.$$

その他、同様にして、

$$f(z)=\frac{4}{z}+\frac{9}{2}+\frac{23}{4}z+\sum_{n=2}^{\infty}\left(2n-1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n\quad(0<|z|<1).$$

(2) $2<|z|<\infty$ で

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-2/z}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{z^n}.$$

$$\frac{3}{z-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{z^n},$$

$$\frac{2}{(z-1)^2}=-2\left(\frac{1}{z-1}\right)'=-2\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}\right)'=-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-n}{z^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{z^{n+1}}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2(n-1)}{z^n}.$$

$$f(z)=\frac{4}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{z^n}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2(n-1)}{z^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{z^n}+5z+6=\frac{8}{z}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n+1+2^{n-1}}{z^n}+5z+6\quad(2<|z|<\infty).$$

(3) (2) の展開から、$\operatorname{Res}(f;\infty)=-8$. あるいは、

$$f(z)=5z+6+\frac{8z^3-25z^2+23z-8}{z(z-1)^2(z-2)}$$

から

$$\operatorname{Res}(f;\infty)=-\lim_{z\to\infty}z\frac{8z^3-25z^2+23z-8}{z(z-1)^2(z-2)}=-\lim_{z\to\infty}\frac{8-25/z+23/z^2-8/z^3}{(1-1/z)^2(1-2/z)}=-8.$$

あるいは、部分分数分解から $\operatorname{Res}(f;0)=4$, $\operatorname{Res}(f;1)=3$, $\operatorname{Res}(f;2)=1$ が分かるので、

$$\operatorname{Res}(f;\infty)=-\left(\operatorname{Res}(f;0)+\operatorname{Res}(f;1)+\operatorname{Res}(f;2)\right)=-8.$$

5A (1) $\deg P(z)\ge\deg Q(z)+2$ であるから、$\exists M\in\mathbf{R}$, $\exists R>0$ s.t. $(\forall z\in\mathbf{C}:|z|\ge R)$

$$|f(z)|\le\frac{M}{|z|^2}.$$

このとき

$$\int_{C_R}f(z)\,dz=\int_0^{\pi}f(Re^{i\theta})\cdot iRe^{i\theta}d\theta=iR\int_0^{\pi}f\left(Re^{i\theta}\right)e^{i\theta}d\theta.$$

ゆえに

$$\left|\int_{C_R} f(z)\,dz\right| \le R\int_0^\pi \left|f(Re^{i\theta})\right| d\theta \le R\int_0^\pi \frac{M}{R^2}d\theta = \frac{M}{R}\int_0^\pi d\theta = \frac{\pi M}{R} \to 0.$$

(2) $I_R : z = x\ (x \in [-R, R])$, $\Gamma_R := C_R + I_R$ とおく。R が十分大きければ、f の極は $|z| < R$ の範囲に入るので、$\operatorname{Im} c > 0$ を満たす極は Γ_R の中に入る。留数定理より

$$\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{c\ \text{は}\ \Gamma_R\ \text{の中}} \operatorname{Res}(f;c) = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} c>0} \operatorname{Res}(f;c).$$

左辺は $\displaystyle\int_{-R}^R f(x)\,dx + \int_{C_R} f(z)\,dz$ に等しく、$R\to\infty$ とすることで $\displaystyle\int_{-R}^R f(x)\,dx$ に収束する。 ■

5B (1) $P(z) := \sin \pi z$, $Q(z) := \pi\cos\pi z$, $f(z) := Q(z)/P(z) = \pi\cot\pi z$ とおく。$P(z) = 0 \Leftrightarrow \exists n \in \mathbf{Z}$ s.t. $z = n\pi$. $P'(z) = \pi\cos\pi z = Q(z)$. $P'(n) = Q(n) = \pi\cos n\pi = (-1)^n\pi \neq 0$. ゆえに f の極は n ($n \in \mathbf{Z}$) で、その位数は 1, 留数は $\operatorname{Res}(f;n) = \dfrac{Q(n)}{P'(n)} = \dfrac{Q(n)}{Q(n)} = 1$.

(2) f は c を 1 位の極に持つので、$\operatorname{Res}(f;c) = \displaystyle\lim_{\substack{z\neq c\\ z\to c}}(z-c)f(z)$. また g は c の近傍で正則なので、特に連続で、$\displaystyle\lim_{\substack{z\neq c\\ z\to c}} g(z) = g(c)$. c は fg の高々 1 位の極であるから (例えば問 3 による)、

$$\operatorname{Res}(fg;c) = \lim_{\substack{z\neq c\\ z\to c}} [(z-c)f(z)g(z)] = \lim_{\substack{z\neq c\\ z\to c}} g(z) \lim_{\substack{z\neq c\\ z\to c}}(z-c)f(z) = g(c)\operatorname{Res}(f;c).$$

(3) $|z| = 5/2$ の内部にある f の極は $0, \pm1, \pm2$. $g(z) = z^2$ とおくと、

$$\begin{aligned}\int_{|z|=5/2} z^2\pi\cot\pi z\,dz &= \int_{|z|=5/2} f(z)g(z)\,dz = 2\pi i\sum_{|c|<5/2}\operatorname{Res}(fg;c) = 2\pi i\sum_{n=-2}^{2}\operatorname{Res}(fg;n)\\ &= 2\pi i\sum_{n=-2}^{2} g(n)\operatorname{Res}(f;n) = 2\pi i\sum_{n=-2}^{2} n^2\cdot 1 = 2\pi i(4+2+0+2+4) = 20\pi i.\end{aligned}$$

6 (1) $z^6+1=0$, すなわち $z^6 = -1$ の解は、$e^{\pi i/6} = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$, $e^{3\pi i/6} = i$, $e^{5\pi i/6} = \frac{-\sqrt{3}+i}{2}$, $e^{7\pi i/6} = \frac{-\sqrt{3}-i}{2}$, $e^{9\pi i/6} = -i$, $e^{11\pi i/6} = \frac{\sqrt{3}-i}{2}$. ($x^6+1 = (x^2+1)(x^4-x^2+1)$ として $x = \pm i$, $x^6+1 = (x^3+i)(x^3-i) = (x+i)(x^2-ix+1)(x-i)(x^2+ix-1)$ として、) みな z^6+1 の 1 位の零点であるから、f の 1 位の極である。このうち、$\operatorname{Im} > 0$ の範囲にあるのは、$\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$, i, $\dfrac{-\sqrt{3}+i}{2}$ の 3 つで、分母の 1 位の零点であるから、$\operatorname{Res}(f;c) = \dfrac{Q(c)}{P'(c)}$ という公式で計算できる。

$$\begin{aligned}I &= 2\pi i\sum_{\operatorname{Im} c>0}\operatorname{Res}(f;c) = 2\pi i\left[\operatorname{Res}\left(f;\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right) + \operatorname{Res}(f;i) + \operatorname{Res}\left(f;\frac{-\sqrt{3}+i}{2}\right)\right]\\ &= 2\pi i\left(\left.\frac{1}{6z^5}\right|_{z=\frac{\sqrt{3}+i}{2}} + \left.\frac{1}{6z^5}\right|_{z=i} + \left.\frac{1}{6z^5}\right|_{z=\frac{-\sqrt{3}+i}{2}}\right) = \frac{2\pi i}{-1\cdot 6}\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2} + i + \frac{-\sqrt{3}+i}{2}\right)\\ &= -\frac{\pi i}{3}\left(\frac{i}{2} + i + \frac{i}{2}\right) = -\frac{\pi i}{3}\cdot 2i = \frac{2\pi}{3}.\end{aligned}$$

(2)

$$I := \int_0^\infty \frac{\cos x}{(x^2+a^2)^3}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos x}{(x^2+a^2)^3}dx = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ix}}{(x^2+a^2)^3}dx.$$

$P(z)$, $Q(z)$ が $\deg P(z) \ge \deg Q(z) + 2$, $\forall x \in \mathbf{R}$ $P(x) \neq 0$ を満たす多項式であるとき、$a > 0$ に対して、$\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{Q(x)}{P(x)}e^{iax}\,dx = 2\pi i\sum_{\operatorname{Im} c>0}\operatorname{Res}\left(\frac{Q(z)}{P(z)}e^{iaz};c\right)$ という公式が成り立つ。これが適用できる。

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{\left(x^2+a^2\right)^3} dx &= 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} c>0} \operatorname{Res}\left(\frac{e^{iz}}{\left(z^2+a^2\right)^3}; c\right) = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^{iz}}{\left(z^2+a^2\right)^3}; ai\right) \\
&= 2\pi i \cdot \frac{1}{2!} \lim_{\substack{z\neq ai \\ z\to ai}} \left(\frac{d}{dz}\right)^2 \left[(z-ai)^3 \frac{e^{iz}}{\left(z^2+a^2\right)^3}\right] = \pi i \left[(z+ai)^{-3} e^{iz}\right]'' \Big|_{z=ai} \\
&= \pi i\, e^{iz} \left(12(z+ai)^{-5} - 6i(z+ai)^{-4} - i^2(z+ai)^{-3}\right)\Big|_{z=ai} \\
&= \pi i e^{-a} \left(\frac{12}{32a^5 i^5} - \frac{6i}{(2ai)^4} - \frac{1}{(2ai)^3}\right) = \pi e^{-a}\left(\frac{12}{32a^5} + \frac{6}{16a^4} + \frac{1}{8a^3}\right).
\end{aligned}
$$

$$
I = \frac{\pi e^{-a}}{16a^5}(a^2+3a+3). \blacksquare
$$