2009 年度 関数論 2・同演習 試験問題 (担当 桂田祐史)

2010 年 1 月 27 日 (水) 13:00〜15:00 施行,
ノート等持ち込み禁止, 解答用紙 (2 枚) のみ提出

次の **1**〜**6** の 6 問に解答せよ。**5A**, **5B** はどちらかを選択せよ。

1. 以下の各用語について、(a) 定義, (b) 例, (c) 英訳 (対応する英語表現) を記せ。
(1) 孤立特異点　(2) 除去可能特異点　(3) 極　(4) (孤立) 真性特異点

2. (1) 留数定理 (residue theorem) を書け。 (2) 留数定理の例を 1 つ説明せよ ((1) で書いた仮定をチェックすること)。

3. $a > 0$ とする。$P(z), Q(z) \in \mathbf{C}[z]$ が $\deg P(z) \geq \deg Q(z) + 1$, $\forall x \in \mathbf{R}$ $P(x) \neq 0$ を満たすとし、$f(z) := \dfrac{Q(z)}{P(z)}$ とおくとき、以下の (1), (2), (3) が成り立つことを示せ。

(1) $\exists M \in \mathbf{R}, \exists R \in \mathbf{R}, (\forall z \in \mathbf{C}\colon\ |z| \geq R)\ |f(z)| \leq M/|z|.$　(この M, R を (2) で用いる。)

(2) $A > R$, $B > R$, $C > R$ に対して、複素平面上で、$-A$ から B にいたる有向線分を Γ_1, B から $B + iC$ にいたる有向線分を Γ_2, $B + iC$ から $-A + iC$ にいたる有向線分を Γ_3, $-A + iC$ から $-A$ にいたる有向線分を Γ_4 とし、$\Gamma := \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4$ とおくとき、

$$\left|\int_{\Gamma_2} f(z)e^{iaz}dz\right| \leq \frac{M}{aB}, \quad \left|\int_{\Gamma_3} f(z)e^{iaz}dz\right| \leq \frac{M(A+B)}{C}e^{-aC}.$$

(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax}\,dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} c > 0} \operatorname{Res}\left(f(z)e^{iaz}; c\right).$

4. $f(z) := \dfrac{z^2+1}{(z+1)(2z-1)}$ について、以下の問に答えよ。
(1) (a) 0 のまわりの Taylor 展開を求めよ。(b) $1/2 < |z| < 1$ における Laurent 展開を求めよ。
(c) $1 < |z| < \infty$ における Laurent 展開を求めよ。　(2) $\operatorname{Res}(f; \infty)$ を求めよ。

5A. $c \in \mathbf{C}$, $R > 0$, $k \in \mathbf{N}$, $\Omega := \{z \in \mathbf{C}; 0 < |z - c| < R\}$, $f\colon \Omega \to \mathbf{C}$ は正則で、$(z-c)^k f(z)$ が Ω で有界とするとき、以下の (1), (2) を示せ。
(1) c は f の高々 k 位の極である。(2) f の c のまわりの Laurent 展開を $f(z) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-c)^n$ とおくと、$a_{-(k-n)} = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\lim_{z \to c}\left(\frac{d}{dz}\right)^n \left[(z-c)^k f(z)\right]$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$.

5B. (1) $n \in \mathbf{N}$, $k \in \mathbf{Z}$, $0 \leq k \leq n$ とするとき、$\dbinom{n}{k} = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{(1+z)^n}{z^{k+1}}dz$ を示せ。
(2) $|z| = 1$ とするとき、$\left|\dfrac{(1+z)^2}{5z}\right| \leq \dfrac{4}{5}$ であることを示せ。(3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}\frac{1}{5^n}$ を求めよ。

6. 次の積分を求めよ。(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^4+1}\,dx$　(2) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)^2}\,dx$

2010 年 1 月 31 日版 (12 時 47 分)

前年度期末試験の影は感じるのだが…小テストくらいは完全に消化しておこう。

解答

1.

(1) (a) c が複素関数 f の孤立特異点であるとは、$\exists R > 0$ s.t. f は $D(c;R)\setminus\{c\} = \{z\in\mathbf{C}; 0 < |z-c| < R\}$ で定義されていて、そこで正則であることを言う。このとき $\exists\{a_n\}_{n\in\mathbf{Z}}$ s.t.

$$(\bigstar) \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-c)^n} \quad (0<|z-c|<R)$$

が成り立つが、この右辺の級数を f の c のまわりの Laurent (級数) 展開と呼ぶ。(b) 0 は $f(z) := \dfrac{1}{z}$ の孤立特異点である。(c) isolated singularity

(2) (a) c が複素関数 f の除去可能特異点であるとは、c が f の孤立特異点であって、かつ f の c のまわりの Laurent 展開の主要部が 0, すなわち ($\bigstar$) において、$\forall n\in\mathbf{N}$ $a_{-n}=0$ が成り立つことを言う。(b) 0 は $f(z) := \dfrac{\sin z}{z}$ $(z\in\mathbf{C}\setminus\{0\})$ の除去可能特異点である。実際、

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n} \quad (0<|z|<\infty)$$

であるから。(c) removable singularity

(3) (a) c が複素関数 f の極であるとは、c が f の孤立特異点であって、かつ f の c のまわりの Laurent 展開の主要部が、0 でない有限級数であること、すなわち ($\bigstar$) において、

$$\exists k\in\mathbf{N} \quad \text{s.t.} \quad a_{-k}\neq 0 \quad \text{かつ} \quad (\forall n\in\mathbf{N}: n\geq k+1) \quad a_{-n}=0$$

が成り立つことを言う。(b) 0 は $f(z) := \dfrac{1}{z}$ $(z\in\mathbf{C}\setminus\{0\})$ の極である。(c) pole

(4) c が複素関数 f の孤立真性特異点であるとは、c が f の孤立特異点であって、かつ f の c のまわりの Laurent 展開の主要部が無限個の 0 でない項を持つこと、すなわち ($\bigstar$) において、

$$\forall k\in\mathbf{N} \quad (\exists n\in\mathbf{N}: n\geq k) \quad a_{-n}\neq 0$$

が成り立つことを言う。(b) 0 は $f(z) := \exp\dfrac{1}{z}$ $(z\in\mathbf{C}\setminus\{0\})$ の孤立真性特異点である。(c) (isolated) essential singularity

採点してみて

- 孤立特異点の定義は本によって違うところがある。教科書そしてそれにしたがった授業では、c で関数が微分可能である場合を許す流儀である。そうでないとした人もちらほらいた。そこで点を引く気はないが、どういう勉強をしているのか気になるところだ (つまりどちらの流儀にしても、一度それを採用したら首尾一貫していないと話がしづらいので、混ぜることは無理がある。つまり授業は聴いていないということなのだろう)。

- (1-a) 重要なことは、「ある $R>0$ があって f は $0<|z-c|<R$ で正則」の前半の R の説明。何も書いていない人が多い。それはマズイ (本来 0 点である)。

- (2-b) は出来れば、どちらの流儀でも正解になるような例をあげて欲しい。つまり c では f は定義されていないか、定義されてはいても連続になっていないような関数の例をあげるのが望ましい。例えば、
$$f(z)=\frac{\sin z}{z}\quad (z\in\mathbf{C}\setminus\{0\}),\quad c=0.$$
または
$$f(z)=\begin{cases} z & (z\neq 1)\\ 2 & (z=1),\end{cases}\qquad c=1.$$

- $0<|z-c|<R$ とすべきを $|z-c|<R$ とした人がちらほら。$z=c$ でどうなっているかを問わない、そこで微分できなかったり、定義すらされていなくても良い、というのが大事だところなので、$|z-c|<R$ はマズイ。

- ローラン展開の係数 a_n を紹介無しに持ち出した答案も多い。アウト。ローラン展開の係数をどういう記号で表すか、法律はない。そもそも関数ごとに違うのだから、一つの記号ですませられるわけがない。こういうものは、「ここではこの記号で表す」とどこかで宣言することが絶対に必要である。

2. (1) C は $\mathbf{C}$ 内の区分的に滑らかな単純閉曲線、D を C の囲む有界領域、Ω は $\overline{D}\subset\Omega$ を満たす領域、$\{c_j\}_{j=1}^N$ は曲線 C 内の相異なる点、$f\colon \Omega\setminus\{c_1,\dots,c_N\}\to\mathbf{C}$ は正則とするとき、
$$\int_C f(z)\,dz=2\pi i\sum_{j=1}^N \mathrm{Res}(f;c_j).$$

(2) 省略。

採点してみて

- 以前うっかり「$\{c_j\}_{j=1}^N$ は $\mathbf{C}$ 内の相異なる点」と書いてしまったことがあって (TEX で ¥打ってしまった)、そういう答案がぞろぞろ。$\mathbf{C}$ でなく C です。分かりにくいから、「曲線 C 内の」にしておくか (孤立特異点の c とも紛らわしいし、来年は「曲線 Γ」にしようかな、曲線は “curve” なので、C と書きたい気持ちは強いけれど)。こういうのは図を描いて、イメージ (画像) で覚えておいて欲しい。授業では板書したと思うのですが。

- (2) の例をパスした人が多い。猛省をうながしたい。定理はかならず例と一緒に勉強します (丸暗記でなくて命を吹き込む)。

- あほらしい注意だけれど、仮定と結論の境い目は明確に。「ならば」「とするとき」とか “$\Longrightarrow$” を書く。時々修士論文審査会のようなところでも書かない奴がいるけど (まあ、緊張しているのだろう、と見逃してやることが多い)、本当はむちゃくちゃですよね。

3. これは授業でやったことをほぼそのまま問題とした (授業では C を最初から $A+B$ としてあるところが違うていど)。
(1) (授業では不等式でがっちり証明しましたが、テストであれを再現するのは大変なので、ここでは少

し工夫して書いてみます。) $P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$, $a_0 \neq 0$, $Q(z) = b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \cdots + b_m$, $b_0 \neq 0$ と書けるので、z が 0 や $P(z)$ の零点でないところで

$$f(z) = \frac{1}{z^{n-m}} \cdot \frac{b_0 + b_1/z + \cdots + b_m/z^m}{a_0 + a_1/z + \cdots + a_n/z^n}.$$

明らかに

$$\lim_{z\to\infty} \frac{b_0 + b_1/z + \cdots + b_m/z^m}{a_0 + a_1/z + \cdots + a_n/z^n} = \frac{b_0}{a_0}$$

であるから (「収束するなら有界」という定理によって)、$\exists R > 0$, $\exists M > 0$ s.t.

$$(\forall z \in \mathbf{C} : |z| \geq R) \quad \left| \frac{b_0 + b_1/z + \cdots + b_m/z^m}{a_0 + a_1/z + \cdots + a_n/z^n} \right| \leq M.$$

このとき、

$$(\forall z \in \mathbf{C} : |z| \geq R) \quad |f(z)| \leq \frac{M}{|z|^{n-m}}.$$

$n \geq m+1$ より $|f(z)| \leq \dfrac{M}{|z|}$ $(|z| \geq \max\{R, 1\})$ を得る。$\max\{R, 1\}$ を新たに R と置き直せばよい。

(2) (方針) 曲線をパラメーター表示して、線積分 (曲線に沿う積分) を普通の実軸上の定積分に書き換えてから、

$$\left| \int_a^b f(t)\, dz \right| \leq \int_a^b |f(t)|\, dt, \quad \left| e^{X+iY} \right| = e^X \quad (X, Y \in \mathbf{R}), \quad |B + it| \geq B, \quad \left| \frac{1}{B+it} \right| \leq \frac{1}{B}$$

などを用いて評価する。

まあ、追試用の勉強がしたいという人もいるでしょうから、もう少し書いてみます。例えば $\displaystyle\int_{\Gamma_2} f(z)\, dz$ の評価。Γ_2 は $z = B + it$ $(t \in [0, C])$ とパラメーター付けできる。$dz = i\, dt$ であるから、

$$\int_{\Gamma_2} f(z) e^{iaz}\, dz = \int_0^C f(B+it) e^{ia(B+it)} \cdot i\, dt = i \int_0^C f(B+it) e^{-at+iaB}\, dt$$

$|z| = |B + it| = \sqrt{B^2 + t^2} \geq B \geq R$ であるから、$|f(z)| \leq \dfrac{M}{|z|} \leq \dfrac{M}{B}$. また $\left| e^{-at+iaB} \right| = e^{\mathrm{Re}(-at+iaB)} = e^{-at}$ であるから、

$$\left| \int_{\Gamma_2} f(z) e^{iaz}\, dz \right| \leq \int_0^C \left| f(B+it) e^{ia(B+it)} \right| dt \leq \int_0^C \frac{M}{B} e^{-at}\, dt = \frac{M}{B} \cdot \frac{1 - e^{-aC}}{a} \leq \frac{M}{aB}.$$

(3) $f(z) e^{iaz} = \dfrac{\text{整関数}}{P(z)}$ であるから、$f(z)e^{iaz}$ は複素平面から $P(z)$ の零点を除いたところで正則であり、$P(z)$ の零点は $f(z)e^{iaz}$ の極または除去可能特異点である。$P(z)$ は多項式だから零点は有限個しかない。ゆえに A, B, C が十分大きいとき、Γ は $\mathrm{Im}\, c > 0$ であるような $f(z)e^{iaz}$ の極をすべて含む。そのとき留数定理により、

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\, c > 0} \mathrm{Res}(f(z) e^{iaz}; c).$$

左辺は $\displaystyle\sum_{j=1}^4 \int_{\Gamma_j} f(z)\, dz$ に等しい。$\displaystyle\int_{\Gamma_1} f(z)\, dz = \int_{-A}^B f(x) e^{iax}\, dx$. $B \to \infty$ とすると $\displaystyle\int_{\Gamma_2} f(z) e^{iaz}\, dz \to 0$. $C = A + B$ として、$A, B \to \infty$ とすると $\displaystyle\int_{\Gamma_3} f(z) e^{iaz}\, dz \to 0$. また (2) と同様に $\displaystyle\left| \int_{\Gamma_4} f(z)\, dz \right| \leq \frac{M}{aA}$

が得られるので、$A \to \infty$ とすると $\displaystyle\int_{\Gamma_4} f(z)e^{iaz}\,dz \to 0$. 以上から $C = A + B$ として、$A, B \to \infty$ とするとき、

$$\int_{-A}^{B} f(x)\,dx \to 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} c > 0} \operatorname{Res}(f(z)e^{iaz}; c)$$

となることが分かる。■

採点してみて

- (2) で、線積分 (曲線に沿う積分) を、$\mathbf{R}$ の区間上の定積分に書けることを見ている (これは「関数論 1」で学んだこと (出来て当り前) で、「関数論 2」としては本来重要視すべき部分ではないが、ぜひ出来て欲しいところである (こういうのが自分ですらすら出来ると、この手の公式の証明の理解もしやすくなる)。
- それから不等式評価。難しいかも知れないが、使う手法はかなり限られている。$\left|\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt\right| \le \displaystyle\int_a^b |f(t)|\,dt$ とか、$|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$ とか。そういうところだけでも書いてくれると、点をあげられるし、それが自力で出来るようになると、こういう証明がより身近になるはず。
- 結論の式自体は、昨年度の問題と同じなのだけれど、仮定が違うので、同じ議論では証明できない。それなのに昨年度の解答のコピーをしようとしている人がいる。似た問題の答のコピーをするのはやめよう。
- 何かの写しを試みて「広義積分が絶対収束する」なんて書いてある答案があったけれど、この問題の積分は絶対収束するとは限らない ($\deg P(z) \ge \deg Q(z) + 2$ ならば絶対収束するけれど、$\deg P(z) \ge \deg Q(z) + 1$ としか仮定していない)。

4 (1) f を部分分数分解する。割算して $z^2 + 1 = \dfrac{1}{2} \cdot (z+1)(2z-1) + \dfrac{3}{2} - \dfrac{z}{2}$ であるから、

$$f(z) = \frac{z^2+1}{(z+1)(2z-1)} = \frac{1}{2} + \frac{3-z}{2(z+1)(2z-1)} = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{z+1} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{2z-1}.$$

(a) $|z| < 1/2$ のとき、

$$\frac{1}{z+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, \quad \frac{1}{2z-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n$$

などを使って、

$$f(z) = -1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{3} \cdot (-1)^n + \frac{5}{6} \cdot 2^n\right] z^n.$$

以下は略解。

(b) $1/2 < |z| < 1$ のときも同様にして、

$$f(z) = -\frac{1}{6} - \frac{2}{3} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n z^n + \frac{5}{6} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{z^n}.$$

(c) $1 < |z| < \infty$ のときは

$$f(z) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{2^n} - \frac{2}{3}(-1)^{n-1}\right] \frac{1}{z^n}.$$

(2) (1-c) で求めた $1<|z|<\infty$ における Laurent 展開は、∞ のまわりの Laurent 展開 $f(z)=\sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n z^n$ に他ならない。

$$\operatorname{Res}(f;\infty)=-a_{-1}=-\left[\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{2}-\frac{2}{3}(-1)^{1-1}\right]=\frac{1}{4}.\blacksquare$$

採点してみて

- この問題は「点を稼いでもらう」つもりの問題であり、Laurent 展開を「分かってもらう」ための問題でもある。院試に出題されたりすることもあるようである。

- Laurent 展開するとは、(適当な範囲で) $\sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n(z-c)^n$ の形に書いて、a_n が何かを示すということなので、n を与えても a_n を求めるのに計算が必要になるような式は、まっとうな答とは言えない。$\sum$ の個数はなるべく少なくするべきだろう。この問題の場合は、場合分けする必要も特にないから、(1-a) は一つ、(1-b) は二つ、(1-c) は一つの $\sum$ で書くことになる。この点は、あまり厳しく採点していないが、例えば (1-c) を三つの $\sum$ で書かれたりすると、さすがに満点はつけれられない。

- 部分分数分解が出来ない人が大勢いる (分子の次数が分母の次数以上だったら、まず割算して多項式を括り出して、分子の次数 < 分母の次数 の形にします)。高校でも習っているはずだし、1 年生の微積分でも出て来た。そもそも、関数論 2 の授業のあちこちで使っているわけだから、「必要だ」と自己判断して、必要ならば自習するべきだ。

- (1) の Taylor 展開が白紙という答案が結構ある (ひょっとして Laurent 展開せよ、と言ったら出来た？答は同じだけど)。そもそも Taylor 展開は 1 年生でも、2 年前期でも習った。先立つ授業で学んだことが出来なければ、理解することも単位を取得することも困難である。そして関数論 2 の授業で何度か強調したように、Laurent 展開は Taylor 展開の一般化であるから、「c のまわりの Taylor 展開」は「c のまわりの Laurent 展開」であり、「c のまわりで Taylor 展開せよ」は「c のまわりで Laurent 展開せよ」と言っても良い。数学は必要ならばどんどん一般化の方向に進む。前に習ったことは必要性を感じたら復習すること。

- 計算の途中経過を大きく省略する人がたまにいる。間違っている場合、中間点がやりづらいし、自分で見直す場合も直すのが難しいであろう。こういうのはケアレス・ミスとかいうのではなくて、計算が拙い、というのでしょうね。

- (1-c) で無限遠点の近傍である $1<|z|<+\infty$ での Laurent 展開が求めてあるので、(2) の $\operatorname{Res}(f;\infty)$ は定義 ($\operatorname{Res}(f;\infty):=-a_{-1}$ である) さえ覚えておけば楽勝のはずである。主要部を求めるのと勘違いしたり、Laurent 展開の 0 次の係数 a_0 を求めるのだと勘違いした人が続出した。うーん (主要部を求めよ、という問題を出したせいか？)。まだしも、有限の c の場合の a_{-1} と間違えるのなら中間点のあげようもありますが。授業でも強調しましたが、∞ を正の向きに一周する閉曲線 C について、
$$\int_C f(z)\,dz=2\pi i\operatorname{Res}(f;\infty)$$
が成り立つような定義になっていることに注意して、-1 がかけてあることを理解して下さい。…くどいけれど、もう少し説明を加える。f の孤立特異点 $c(\in\mathbf{C})$ における留数 $\operatorname{Res}(f;c)$ は
$$\operatorname{Res}(f;c):=a_{-1}$$

と定義される (ただし f の c における Laurent 展開を $\sum_n a_n(z-c)^n$ とする)。普通は Laurent 展開を求めるのは手間がかかること、特に a_n 全部を求めなくても、a_{-1} だけあれば十分であることが多いことから、a_{-1} だけを求めよう、という方法が色々ある。例えば c が f の k 位の極であるとき、

$$\mathrm{Res}(f;c)=\frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to c}\left(\frac{d}{dz}\right)^{k-1}\left[(z-c)^k f(z)\right]$$

とか、

$$\mathrm{Res}\left(\frac{Q(z)}{P(z)};c\right)=\frac{Q(c)}{P'(c)}\quad (\text{ただし } P(c)=0,\ P'(c)\neq 0,\ Q(c)\neq 0 \text{ とする})$$

とかね。でも、この問題では Laurent 展開を求めてしまっているので、留数が知りたければ、その展開の -1 番目の係数を見れば良い、ということです。■

5A (1) $g(z):=(z-c)^k f(z)$ $(z\in\Omega)$ とおく。c は g の孤立特異点であるが、g が Ω で有界なことから、c は g の除去可能特異点である (Riemann の定理による)。ゆえに g は $\Omega\cup\{c\}=D(c;R)$ で正則な関数に拡張できる。ゆえに g は Taylor 展開できる: $\exists\{b_n\}_{n\geq 0}$ s.t. $g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-c)^n$ $(z\in D(c;R))$.
このとき、$\forall z\in\Omega=D(c;R)\setminus\{c\}$ に対して、

$$\begin{aligned}
f(z)&=\frac{g(z)}{(z-c)^k}=\frac{\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-c)^n}{(z-c)^k}\\
&=\frac{b_0}{(z-c)^k}+\frac{b_1}{(z-c)^{k-1}}+\cdots+\frac{b_{k-1}}{z-c}+b_k+b_{k+1}(z-c)+b_{k+2}(z-c)^2+\cdots\\
&=\sum_{n=1}^{k}\frac{b_{k-n}}{(z-c)^n}+\sum_{n=0}^{\infty} b_{n+k}(z-c)^n.
\end{aligned}$$

ゆえに c は f の高々 k 位の極である。
(2) (1) で示した式と $f(z)=\sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n(z-c)^n$ を見比べて[1]、$(\forall n\in\mathbf{N}: n\geq k+1)$ $a_{-n}=0$, $(\forall n\in\mathbf{Z}: n\geq -k)$ $a_n=b_{n+k}$ であり、$z\in\Omega$ に対して

$$(z-c)^k f(z)=g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-c)^n=\sum_{n=0}^{\infty} a_{n-k}(z-c)^n.$$

右辺は g の Taylor 展開であるから、$z=c$ でも成立し、係数は微分で求まる:

$$a_{n-k}=b_n=\frac{g^{(n)}(c)}{n!}=\lim_{z\to c}\frac{g^{(n)}(z)}{n!}=\frac{1}{n!}\lim_{z\to c}\left(\frac{d}{dz}\right)^n\left[(z-c)^k f(z)\right].■$$

採点してみて

- (1) は小テストで出題したので (つまりマスターして欲しい 1 ダースの事項のうちに入っている)、もう少し出来て欲しかった。(2) は極における留数を求める公式の一般化で、証明はほとんどそのままと言って良い。そのやり方は具体例で小テストで出題したし、「この公式は自分で導けるようにしておきましょう」と何度も言いました。つまり試験対策をする人にとっては楽勝のはずの問題です。

[1] これが出来るのは Laurent 級数展開の一意性による。

- 関数論 2 は特異点がテーマで、孤立特異点のうちの極については、かなりうまく取り扱える、というのが関数論 2 のハイライトと言って構わないでしょう。この問題はその辺に位置していて、分かってしまえば全然難しくない。

5B (1) $\dfrac{(1+z)^n}{z^{k+1}} = z^{-k-1}\displaystyle\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}z^j = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}z^{j-k-1}$ であり、$\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{|z|=1} z^\ell\,dz = \begin{cases} 1 & (\ell=-1) \\ 0 & (\ell\neq -1)\end{cases}$ であるから、$\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{(1+z)^n}{z^{k+1}}\,dz = \binom{n}{j}\Big|_{j-k-1=-1} = \binom{n}{k}$. (2) $|z|=1$ のとき、$\left|(1+z)^2\right| = |1+z|^2 \le (1+|z|)^2 = (1+1)^2 = 4$, $|5z| = 5|z| = 5$ であるから、$\left|\dfrac{(1+z)^2}{5z}\right| \le \dfrac{4}{5}$. (3) まず (1) より $\dbinom{2n}{n} = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{(1+z)^{2n}}{z^{n+1}}dz$ である。(2) の評価と Weierstrass の M-test から、$|z|=1$ 上で $\sum\left(\dfrac{(1+z)^2}{5z}\right)^n$ が一様収束することに注意して、

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}\frac{1}{5^n} &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{(1+z)^{2n}}{z^{n+1}}dz\cdot\frac{1}{5^n}\right) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\int_{|z|=1}\frac{1}{z}\cdot\left(\frac{(1+z)^2}{5z}\right)^n dz \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(1+z)^2}{5z}\right)^n dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{1}{z}\frac{1}{1-\dfrac{(1+z)^2}{5z}}dz \\ &= -5\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{dz}{z^2-3z+1} = -5\sum_{|c|<1}\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2-3z+1};c\right) = \sqrt{5}.\blacksquare\end{aligned}$$

6. 問題 3 の公式に帰着させます。留数計算が出来るところを見せて下さい、という問題です。
(1)

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x^4+1}\,dx &= \operatorname{Im}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x^4+1}\,dx = \operatorname{Im}\left[2\pi i\sum_{\operatorname{Im}c>0}\operatorname{Res}\left(\frac{e^{iz}}{z^4+1};c\right)\right] \\ &= \operatorname{Im}\left[2\pi i\left(\operatorname{Res}\left(\frac{e^{iz}}{z^4+1};\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)+\operatorname{Res}\left(\frac{e^{iz}}{z^4+1};\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)\right)\right] \\ &= \operatorname{Im}\left[2\pi i\left(\frac{e^{iz}}{(z^4+1)'}\Big|_{z=(1+i)/\sqrt{2}}+\frac{e^{iz}}{(z^4+1)'}\Big|_{z=(-1+i)/\sqrt{2}}\right)\right] \\ &= e^{-1/\sqrt{2}}\pi\sin\frac{1}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

これら留数の計算は、良く似た問題を小テストで経験済みである。
(2) 被積分関数が偶関数であること、また $\dfrac{\cos x}{(x^2+1)^2} = \operatorname{Re}\dfrac{e^{ix}}{(x^2+1)^2}$ であることから、

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}\frac{\cos x}{(x^2+1)^2}\,dx &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{(x^2+1)^2}\,dx \\ &= \operatorname{Re}\left[\frac{1}{2}\cdot 2\pi i\operatorname{Res}\left(\frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2};i\right)\right] \\ &= \operatorname{Re}\left[\pi i\lim_{z\to i}\left((z-i)^2\cdot\frac{e^{iz}}{(z-i)^2(z+i)^2}\right)'\right] = \frac{\pi}{2e}.\end{aligned}$$