微分積分学 2

# 線積分の演習

桂田 祐史

2006 年 12 月 7 日 出題, 12 月 14 日配布 (訂正版)

(繰り返しになるけれど) 線積分には、$\displaystyle\int_C f\,ds$ というのと $\displaystyle\int_C \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r}$ というのと 2 種類ある。前者については、この授業では、説明はする (した) が試験には多分出題しない[1]。一方後者 ($\displaystyle\int_C \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r}$) については、定義に基づいて (例えばこのプリントで説明してある程度の) 簡単な計算ができることは、単位を取得するための必要条件であるくらいに考えてもらいたい。

**問**　$\boldsymbol{f}(x,y)=\begin{pmatrix} y \\ x^2 \end{pmatrix}$, $C_1$: $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{\varphi}(t)=\begin{pmatrix} t \\ t^{3/2} \end{pmatrix}$ $(0\le t\le 1)$, $C_2$: $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{\psi}(s)=\begin{pmatrix} s^2 \\ s^3 \end{pmatrix}$ $(0\le s\le 1)$ とするとき、定義に従って $\displaystyle\int_{C_1}\boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r}$, $\displaystyle\int_{C_2}\boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r}$ を求めよ。

**解説**　接線線積分の定義の式は、

$$\int_C \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_\alpha^\beta \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\varphi}(t))\cdot\boldsymbol{\varphi}'(t)\,dt$$

である (ただし $C$ は $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{\varphi}(t)$ $(t\in[\alpha,\beta])$ であるとする)。これに「代入」するだけである。ただ諸君の解答を見ていておぼつかない人もいるので、一つの流れを提示しておく (本当は計算の仕方を固定する理由はないし、害もありうるのであるが、「臨機応変」なんて言っていると取っ掛かりがないだろうから)。

(i) $\boldsymbol{f}(x,y)$ に $x=\varphi_1(t)$, $y=\varphi_2(t)$ を代入して、$t$ の関数 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\varphi}(t))=\boldsymbol{f}(\varphi_1(t),\varphi_2(t))$ を得る。

(ii) $\boldsymbol{\varphi}'(t)=\begin{pmatrix} \varphi_1'(t) \\ \varphi_2'(t) \end{pmatrix}$ を計算する。

(iii) 上の 2 つのベクトルの内積 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\varphi}(t))\cdot\boldsymbol{\varphi}'(t)$ を計算する。

(iv) $t$ について $\alpha$ から $\beta$ まで積分する。

**解答**　$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\varphi}(t))=\begin{pmatrix} t^{3/2} \\ t^2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\varphi}'(t)=\begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{3}{2}t^{1/2} \end{pmatrix}$ であるから、

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\varphi}(t))\cdot\boldsymbol{\varphi}'(t)=t^{3/2}\cdot 1+t^2\cdot\frac{3}{2}t^{1/2}=t^{3/2}+\frac{3}{2}t^{5/2}.$$

---

[1] 比較すると重要性がやや低いことと、計算が面倒になりがちで「自然な出題がしにくい」ことが理由である。

ゆえに

$$\int_{C_1} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^1 \left( t^{3/2} + \frac{3}{2} t^{5/2} \right) dt = \left[ \frac{2}{5} t^{5/2} + \frac{2}{7} \cdot \frac{3}{2} t^{7/2} \right]_0^1 = \frac{2}{5} + \frac{3}{7} = \frac{2 \cdot 7 + 3 \cdot 5}{35} = \frac{29}{35}.$$

一方、$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\psi}(s)) = \begin{pmatrix} s^3 \\ (s^2)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s^3 \\ s^4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\psi}'(s) = \begin{pmatrix} 2s \\ 3s^2 \end{pmatrix}$ であるから、

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\psi}(s)) \cdot \boldsymbol{\psi}'(s) = s^3 \cdot 2s + s^4 \cdot 3s^2 = 2s^4 + 3s^6.$$

ゆえに

$$\int_{C_2} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^1 \left( 2s^4 + 3s^6 \right) ds = \left[ \frac{2}{5} s^5 + \frac{3}{7} s^7 \right]_0^1 = \frac{2}{5} + \frac{3}{7} = \frac{2 \cdot 7 + 3 \cdot 5}{35} = \frac{29}{35}. \quad \text{(解答終り)}$$

**余談**　曲線 $C_1, C_2$ は、パラメーターづけ ($\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi}$ のこと) は異なるが、像 (図形としての曲線) と、向き (どこからスタートしてどこに向かうか) は一致するので、線積分の値は等しい:

$$\int_{C_1} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{C_2} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r}.$$

これは

$$I := \int_0^1 \left( t^{3/2} + \frac{3}{2} t^{5/2} \right) dt$$

において、$t^{1/2} = s$ と置換積分することによっても証明できる。実際、$t = s^2$, $dt = 2s\, ds$, $t = 0$ のとき $s = 0$, $t = 1$ のとき $s = 1$ であるから、

$$I = \int_0^1 \left( s^3 + \frac{3}{2} s^5 \right) \cdot 2s\, ds = \int_0^1 \left( 2s^4 + 3s^6 \right) ds$$

となる。