微分積分学 2

ベクトル場の演習

桂田 祐史

2006 年 11 月 16 日 出題, 12 月 7 日

問 (1) $\mathbf{R}^3$ 内の C^2 級の任意のベクトル場 $\boldsymbol{f}$ に対して、$\operatorname{div}(\operatorname{rot}\boldsymbol{f}) = 0$ を示せ。(2) $f(x,y,z) := \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ とするとき、$\operatorname{grad} f$, $\triangle f$ を求めよ。

(1) (まずは rot の定義を復習) $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, f_3)^T$ とするとき、

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{f} = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & f_1 & \boldsymbol{e}_1 \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & f_2 & \boldsymbol{e}_2 \\ \frac{\partial}{\partial x_3} & f_3 & \boldsymbol{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}.$$

(続いて div の定義を復習) 一方、$\boldsymbol{g} = (g_1, g_2, g_2)^T$ とするとき、

$$\operatorname{div}\boldsymbol{g} = \frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \frac{\partial g_2}{\partial x_2} + \frac{\partial g_3}{\partial x_3}.$$

$\boldsymbol{g} = \operatorname{rot}\boldsymbol{f}$ とすると、

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\operatorname{rot}\boldsymbol{f}) = \operatorname{div}\boldsymbol{g} &= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right) \\ &= \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_2 \partial x_1} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_3 \partial x_1} - \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_3 \partial x_2} \\ &= \left(\frac{\partial^2 f_3}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_2 \partial x_1}\right) + \left(-\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_3 \partial x_1}\right) + \left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_3 \partial x_2}\right).\end{aligned}$$

$\boldsymbol{f}$ が C^2 級であるから、2 階導関数は偏微分の順序によらないので、カッコ内はすべて 0 である。

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}\boldsymbol{f}) = 0 + 0 + 0 = 0.$$

(2) $f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$ であるから、

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+y^2+y^2\right) = \frac{-x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}.$$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ についても同様なので、

$$\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)^T = \frac{-1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

一方、

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-x\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}\right)$$
$$=-1\cdot\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}-x\cdot\frac{-3}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-5/2}\cdot 2x$$
$$=\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-5/2}\left[-(x^2+y^2+z^2)+3x^2\right]=\frac{2x^2-y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}.$$

同様にして

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{2y^2-z^2-x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=\frac{2z^2-x^2-y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

であるから、

$$\triangle f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=0.$$

なお、本質的におなじことだが、$r=(x^2+y^2+z^2)^{1/2}$ とおくと、$r_x=x/r$ となることを用いて、$f=1/r$ から $f_x=-x/r^3$, $f_{xx}=3x^2/r^5-1/r^3$ と進めると、コンパクトに書けて良いかもしれない。

1　おまけ: 曲線の弧長の計算演習

曲線の接線等について、「基礎数学 IV・微分方程式テキスト」の p.111 に問題がちょこっと載っていたりします。ところで曲線の弧長については、例も問題も載せるのを忘れました。罪滅ぼしに載せておきます。(もっとも、期末試験のテーマからは少しずれるので、そういう問題を出すことはしません。)

1.　次の曲線の長さを求めよ。

(1) $a>0$ とするとき、$\boldsymbol{r}=(a\cos t, a\sin t)$ $(0\le t\le 2\pi)$

(2) $a>0$ とするとき、$\boldsymbol{r}=\left(t,\dfrac{a}{2}\left(e^{t/a}+e^{-t/a}\right)\right)$ $(t_1\le t\le t_2)$

(3) $\boldsymbol{r}=(\cos t,\sin t,t)$ $(0\le t\le 1)$

(4) $\boldsymbol{r}=(\cos 2t,\sin 2t,3t)$ $(1\le t\le 3)$

(5) $\boldsymbol{r}=\left(e^{3t},e^{-3t},3\sqrt{2}t\right)$ $(0\le t\le 1/3)$

(6) $\boldsymbol{r}=(t,\log t)$ $(\frac{1}{2}\le t\le 2)$

(7) $\boldsymbol{r}=(t,\log\cos t)$ $(0\le t\le \frac{\pi}{3})$

(8) $\boldsymbol{r}=\left(t,\log(1-t^2)\right)$ $(0\le t\le \frac{3}{4})$

(9) $\boldsymbol{r}=(t,\cosh t)$ $(-1\le t\le 1)$

(10) $\boldsymbol{r}=\left(e^t\cos t,e^t\sin t\right)$ $(0\le t\le 2)$

解答　(1) $2\pi a$　(2) $a\left(\sinh\dfrac{t_2}{a}-\sinh\dfrac{t_1}{a}\right)$　(3) $\sqrt{2}$　(4) $2\sqrt{13}$　(5) $e-1/e$　(6) $\dfrac{\sqrt{5}}{2}+\log\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$
(7) $\log\left(2+\sqrt{3}\right)$　(8) $-\dfrac{3}{4}+\log 7$　(9) $2\sinh 1$　(10) $\sqrt{2}(e^2-1)$

2.　$a > 0$ とするとき、曲線 $y = \left(a^{2/3} - x^{2/3}\right)^{3/2}$ $(0 \leq x \leq a)$ の長さを求めよ。

解答　$\dfrac{3}{2}a$