

二重積分の変数変換の演習

桂田 祐史

2006年10月26日 (演習自体は19日)

1. a, b を正定数とする。 $\Omega = \left\{ (x, y); \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \leq 1 \right\}$ とおくと、 $I = \iint_{\Omega} x^2 dx dy$ を求めよ。

2. $\Omega = \{(x, y); 0 \leq x + y \leq 2, 1 \leq x - y \leq 3\}$ とするとき、 $J = \iint_{\Omega} \sqrt{x^2 - y^2} dx dy$ を求めよ。

1の解答 $x = ar \cos \theta, y = br \sin \theta$ ($r \geq 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi$) と変数変換する。

$$(x, y) \in \Omega \iff (x/a)^2 + (y/b)^2 \leq 1 \iff (r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2 \leq 1 \iff r \leq 1.$$

ゆえに Ω と対応するのは $D = \{(r, \theta); 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$. ヤコビアンは

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \det \begin{pmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a \cos \theta & -ar \sin \theta \\ b \sin \theta & br \cos \theta \end{pmatrix} = a \cos \theta \cdot br \cos \theta - (-ar \sin \theta) \cdot b \sin \theta = abr$$

となるので、 $dx dy = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| dr d\theta = abr dr d\theta$.

$$I = \iint_D (ar \cos \theta)^2 \cdot abr dr d\theta = a^3 b \int_0^1 r^3 dr \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = a^3 b \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2\pi}{2} = \frac{\pi a^3 b}{4}. \blacksquare$$

2の解答 $x + y = u, x - y = v$ と変数変換する。 Ω と対応するのは、 $D = \{(u, v); 0 \leq u \leq 2, 1 \leq v \leq 3\}$.

x と y について解くと、 $\begin{cases} x = (u + v)/2 \\ y = (u - v)/2, \end{cases}$ ゆえに $\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. ヤコビアンは

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \det \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

となるので、

$$dx dy = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv = \frac{1}{2} du dv. \quad (\text{絶対値に注意!!})$$

$x^2 - y^2 = uv$ であるから、

$$\begin{aligned} J &= \iint_D \sqrt{uv} \cdot \frac{1}{2} du dv = \frac{1}{2} \int_0^2 u^{1/2} du \int_1^3 u^{1/2} dv = \frac{1}{2} \left[\frac{2}{3} u^{3/2} \right]_0^2 \left[\frac{2}{3} v^{3/2} \right]_1^3 \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{2}{3} (3\sqrt{3} - 1) = \frac{4}{9} \sqrt{2} (3\sqrt{3} - 1). \blacksquare \end{aligned}$$